

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

43. Band, Heft 1/5

1. Juni 1952

S. 1—240

## Geschichte.

Venkatachalam Iyer, R.: *Paṭīganita and the Hindu abacus*. Math. Student 18, 79—82 (1951).

Pihl, Mogens: Die Theodoros-Stelle in Platons „Theaitetos“ und die Entdeckungsgeschichte der irrationalen Zahlen. Mat. Tidsskr. A 1951, 19—38 (1951) [Dänisch].

Verf. gibt unter Verwendung auch der neuesten Literatur (Ref. vermißt nur: K. Reidemeister, Die Arithmetik der Griechen, Leipzig 1940, dies. Zbl. 25, 145) einen klaren und erschöpfenden Überblick über all das, was wir von dem Auftreten des Irrationalen in der griechischen Mathematik auf Grund der Quellen bestimmt wissen. Eingehend wird die berühmte Theodorosstelle in Platons Dialog Theaitetos diskutiert und die Rolle der Pythagoreer, wobei vorsichtig Stellung genommen wird zu den über die Art der Irrationalitätsbeweise aufgestellten Theorien (Aristoteles, Zeuthen, Anderhub, von Fritz). Weiterhin wird auf den auch auf das Irrationale ausgedehnten eudoxischen und voreudoxischen Verhältnis- und Proportionsbegriff eingegangen. In der geometrischen Algebra, die doch aus dem Bestreben entstanden sein könnte, auch das Irrationale mit zu erfassen, sieht Verf. — im Gegensatz zu Zeuthen — nur ein allgemeines Ausdrucksmittel (an Stelle von Formeln) für algebraische Probleme. Verf. kommt zu dem Schluß, daß die Entwicklung der Irrationalenlehre im wesentlichen erst zur Zeit Platons erfolgte. Dies ist richtig, lediglich für das Bekanntwerden mit der  $\sqrt{2}$  wird man einen früheren Ansatz machen müssen.

Kurt Vogel.

Dijksterhuis, E. J.: Deux traductions de Proclus. Arch. internat. Hist. Sci. 30, 602—619 (1951).

Verf. unterzieht die beiden neuen Proklosübersetzungen von P. Ver Eecke (VE) und P. L. Schönberger (S) einer in einer früheren Besprechung (s. Verf., dies. Zbl. 34, 145) angekündigten ins Einzelne gehenden vergleichenden Untersuchung. Zuerst werden in (I) Beispiele gebracht, in denen die beiden Übersetzungen vollständig auseinander gehen, wobei die von S meist vorzuziehen sind. In (II) behandelt der Verf. mathematische Ungenauigkeiten bei S, in (III) solche — aber weniger zahlreiche — bei VE. Schließlich werden in (IV) Beispiele für sprachliche Mängel und störende Druckfehler bei VE angegeben. — Das Ergebnis faßt der Verf. dahin zusammen, daß der Wert beider Übersetzungen darin besteht, daß sie die Gedanken von Proklos, der die Hauptquelle für unsere Kenntnis der Philosophie der griechischen Mathematik ist, leicht zugänglich gemacht haben. Wegen der genaueren und flüssigeren Übersetzung zieht Verf. die von Schönberger vor, der sich als der bessere Kenner der griechischen Sprache und Philosophie erweist, während ihm gegenüber Ver Eecke mit der griechischen Geometrie vertrauter ist. Man wird also auch jetzt noch den griechischen Text nicht vollständig entbehren können.

Kurt Vogel.

Carmody, Francis J.: Regiomontanus' notes on Al-Bītrūjī's astronomy. Isis 42, 121—130 (1951).

Der spanisch-muslimische Astronom Al-Bītrūjī (Alpetragius von Sevilla, nicht: Alpetrangius) entwickelte in seinem von Michael Scotus i. J. 1217 mit dem Titel „De motibus stellarum“ übersetzten Werk eine neue, gegen die künstliche Epizykeltheorie des Ptolemaios gerichtete Lehre von der Bewegung der Himmelskörper. Sie nimmt ihren Ausgang davon, daß die 8 homozentrischen Sphären, auf denen Mond, Sonne, die 5 Planeten und die Fixsterne befestigt sind, von der sie umschließenden 9. Sphäre, dem primum mobile, in eine gleichgerichtete Bewegung



von Ost nach West versetzt werden, wobei die Geschwindigkeiten der einzelnen Sphären mit ihrem Abstand vom primum mobile abnehmen, so daß z. B. die von West nach Ost gerichtete Gegenbewegung der Sonne mit täglich  $59' 8''$  als ein Zurückbleiben um den gleichen Betrag gegenüber der Fixsternbewegung erklärt ist. Es ist bekannt, daß diese neue Theorie, die übrigens an ähnliche Vorstellungen vorplattonischer Astronomen erinnert, vielfach diskutiert und kritisiert wurde, z. B. von Levi ben Gerson ( $\dagger$  1344). Auch Regiomontan hat gegen Al-Biṭrūjī Stellung genommen in einer bisher unberücksichtigt gebliebenen Abhandlung, die nur in einer einzigen Wiener Hs. vorliegt. — Diese Hs. hat Verf. jetzt sorgfältig ediert und ausführlich erklärt, wobei er feststellt, daß Regiomontan in der Absicht, die Unhaltbarkeit des Systems nachzuweisen, nicht nur wirkliche Fehler beanstandet, sondern auch selbst fehlerhafte Gegenbeweise führt und manches nur oberflächlich gelesen hat.

*Kurt Vogel.*

**Kennedy, E. S.:** A fifteenth century lunar eclipse computer. Scripta math. 17, 91—97 (1951).

Verf. schildert nach zwei Hs. eine weitere Verwendung der vielseitigen „Platte der Zonen“ des Al-Kāṣī (1393—1449) (s. Verf., dies. Zbl. 37, 290). Nach Klarlegung der zugrunde liegenden Theorie wird gezeigt, wie sich das Eintreten (1. Berührung) und der weitere Verlauf (z. B. Anfang und Ende der totalen Verdunkelung) einer Mondfinsternis auf der Zonenplatte mechanisch beschreiben läßt. Die zur Einstellung des Instruments notwendigen Konstanten entsprechen abgerundeten Werten bei Ptolemaios.

*Kurt Vogel.*

**Hofmann, J. E.:** Zum Gedenken an Thomas Bradwardine. Centaurus 1, 293—308 (1951).

Die Arbeit ist aus einem Vortrag hervorgegangen, den Verf. im Juni 1950 bei einer Tagung des mathematischen und physikalischen Instituts der Universität Münster gehalten hat. Thomas Bradwardine (c. 1290—1349) studierte und lehrte in Oxford Theologie, Philosophie und Mathematik, ehe er nach London berufen wurde. Einleitend schildert Verf. die Bedeutung Oxfords für das Studium der Mathematik im 13. Jahrhundert. Er bespricht sodann die aus Oxforder Vorlesungen hervorgegangenen mathematischen Werke Bradwardines, besonders die Geometria Speculativa, die im 15. Jahrhundert weit verbreitet war und in bestem Ansehen stand, die Abhandlung über die Proportionen, die wegen ihrer physikalisch-mechanischen Problemstellung von besonderer Bedeutung ist und neue Wege weist, sowie die Abhandlung über das Kontinuum, die bisher nicht gedruckt und nur in Auszügen bekannt ist. Letztere gehört zu den bedeutsamsten Leistungen des Mittelalters über diese Frage und enthält Vorahnungen des Grenzbegriffs und einzelner Ergebnisse der Mengenlehre. In dem philosophisch-theologischen Hauptwerk Bradwardines, dem Traktat De causa Dei adversus Pelagium (1344), werden mathematische Schlußweisen auf theologische Fragen angewandt, die Verf. näher kennzeichnet. 4 Seiten Literaturangaben über die erwähnten Autoren bilden den Schluß. Die Bedeutung dieser Abhandlung über den doctor profundus, der auch auf Luther und Calvin bedeutenden Einfluß ausgeübt hat, liegt weniger in neuen Einzelheiten über seine Werke, als vielmehr in der geistesgeschichtlichen Charakterisierung. Bradwardine steht zwar auf mathematischem Gebiet auf dem Boden seiner Vorläufer, deren Wissen er klug zusammenfaßt. Aber nach Ansicht des Verf. weist er in eine neue Denkepoche hinüber, bringt Keimlinge neuer und aussichtsreicher Vorstellungen hervor und ist eine schöpferische Persönlichkeit von umfassender Genialität, deren Bedeutung über ihr Jahrhundert hinaus wirkt.

*Eugen Löffler.*

**Patroni, Adriano:** Il manoscritto M39r dei manoscritti di Leonardo da Vinci. (Raccolta di Francia.) Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 159—162 (1951).

Verf. macht bei einer unklaren Stelle in einem Ms. Leonardo da Vincis, deren bisherige Deutung einen für Leonardo unwahrscheinlichen, groben statischen Fehler dokumentiert, einen durchaus annehmbaren Vorschlag für eine bessere Lesung des Textes.

*Kurt Vogel.*

● **Pöhlein, Hubert:** Wolfgang Seidel 1492—1562. (Münchener Theologische Studien. I. Historische Abteilung, Band 2.) München: Karl Zink Verlag 1951. VIII, 247 S. 11 Tf. DM 22,— brosch.

Diese umfangreiche Diss. U. München (1946) enthält eine gründliche, auf jahrelangen Handschriftstudien beruhende Biographie des bedeutenden Kanzlerredners W. Seidel, eines Mannes von vielseitigen wissenschaftlichen Interessen und außerordentlicher literarischer Fruchtbarkeit (6 Druckwerke, 36 dicke Folianten Nachlaß). Schon während der Studienjahre in Tegernsee (1517/22) und der ersten erfolgreichen Wirksamkeit, die mit der Tätigkeit als Subprior und Prior (bis 1529) abschließt, widmet Seidel einen Teil seiner Arbeitszeit der Mathematik (1529:



Propositiones aliquot de transmutationibus mathematicis ex Nicolao de Cusa Cardinali, Clm 18862; 1530 Spiralenzirkel, Clm 18695) und der Astronomie (Auszüge und selbständige Studien ebd. und in Clm 18865 seit 1527). Er konstruiert seit 1526 Räderuhren mit Planetenzeigern (Cgm 4493), schreibt im Zusammenhang mit der Zahnradberechnung über Brüche (ebd.) und verfertigt u. a. in Andechs (1529/31) eine vielbewunderte Kunstuhr (genaue Beschreibung in Clm 18695). Im Anschluß an die Arbeiten der Wiener Schule (Peurbach, Regiomontan) macht er auch selbständige Stern- und Sonnenbeobachtungen. — Die gediegene Arbeit zeichnet sich durch sorgfältige Literaturnachweise, genaue Stellenangaben in den benutzten Druckwerken und Handschriften und sorgfältige Register (Werkkatalog, Namenregister) aus. An Einzelheiten ist die genaue Schilderung der Andechser Kunstuhr zu erwähnen, ferner die kennzeichnenden Proben von Handschriften, Werkzeichnungen und Titelfiguren. Hoffentlich ergänzt Verf. diese seine zusammenfassende Studie durch Edition der wichtigsten neuentdeckten Handschriften, worin die auf Cusanus gestützte das größte Interesse hätte. *Joseph Ehrenfried Hofmann.*

● **Kepler, Johannes: Gesammelte Werke. Band XIII: Briefe 1590—1599, Band XIV: Briefe 1599—1603, Band XV: Briefe 1604—1607. Herausgeb. M. Caspar. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung 1945, 1949, 1951. 432, 520, 568 S. Geh. DM 32,—, 32,—, 35,—. Halb.-Perg. DM 40,—, 40,—, 43,—.**

Die ersten 3 Bände dieser hochbedeutsamen Gesamtausgabe der Kepler-Korrespondenz umfassen die Studienzeit und die Jahre in Graz (Bd. 13), die Übersiedlung nach Prag zu Brahe, Vorstudien zu den *Harmonice mundi*, die optischen Arbeiten und die ersten Hypothesen über die Marsbewegung (Bd. 14), schließlich die weitausgreifende Korrespondenz im Zusammenhang mit dem Erscheinen der Optik und der endgültigen Erklärung der Planetenbewegung (Bd. 15). Wiedergegeben sind 54 + 32 + 48 Briefe Keplers, 56 + 99 + 105 Briefe seiner Korrespondenten und 17 + 16 + 6 kennzeichnende Stellen über Kepler aus Briefen Dritter. Die Texte sind in chronologischer Reihenfolge nach modernen editorischen Gesichtspunkten abgedruckt. Besonders aufschlußreich sind die umfangreichen Korrespondenzen mit Mästlin (54 Briefe), Herwart v. Hohenburg (79 Briefe) und Fabricius (40 Briefe), die großenteils erst jetzt im genauen Wortlaut vorliegen. Die älteren Briefsammlungen von M. G. Hansch (Leipzig 1718) und Chr. Frisch in den *Opera omnia* (Frankfurt/Erlangen 1858/71) sind voll ausgeschöpft. Das neu hinzugekommene Material stützt sich auf die zusammen mit W. v. Dyck begonnenen mühsamen archivalischen Studien des Verf., vor allem auf die aus dem unediert gebliebenen Nachlaß Hanschs durch Euler nach Pulkowo verbrachten 22 Mskr.-Bände mit den Originalbriefen der Korrespondenten und vielen Abschriften und Entwürfen der abgesandten Antworten. Den Texten folgen bandweise Nachberichte mit kurzen Inhaltsangaben der Briefe und (leider sehr knappen) sachlichen Erläuterungen, ferner Korrespondentenverzeichnisse und Namenregister. Diese Briefe sind (zusammen mit den Originalschriften Keplers) die wichtigste Unterlage für die Kepler-Biographie des Verf. (Stuttgart 1948; dies. Zbl. 33, 2) und von höchstem wissenschaftsgeschichtlichem Interesse, vor allem für das Werden und Reifen der Keplerschen Vorstellungen auf dem Gebiet der Astronomie und der Optik, aber auch hinsichtlich der religiösen und metaphysischen Strömungen der damaligen Zeit. Nun fällt auch auf die geometrischen Vorstudien zu den *Harmonice mundi* und die Integrationsprobleme der *Astronomia nova* neues Licht, so daß frühere Daten genauer als bisher präzisiert werden können. Die mathematikgeschichtlich interessantesten Aufschlüsse erwarten wir freilich erst von den späteren Bänden. Wir hoffen nach Abschluß der Korrespondenz auf ein eingehendes Sachregister, ohne das sich das sehr interessante, jedoch in seiner Reichhaltigkeit nur schwer übersehbare Material nicht hinreichend auswerten läßt.

*Joseph Ehrenfried Hofmann.*



**Taton, René: Documents nouveaux concernant Desargues.** Arch. internat. Hist. Sci. 30, 620—630 (1951).

Verf. hat eine Neuausgabe der zur Zeit bekannten mathematischen Schriften von G. Desargues mit biographisch-historischer Einleitung veranstaltet, deren erster Band bereits erschienen ist [L'Oeuvre Mathématique de G. Desargues, Paris (1951)]. Bei den Vorarbeiten dazu hat er die spärlichen Nachrichten, die wir über diesen „fruchtbarsten und originellsten Mathematiker des 17. Jahrhunderts“ besitzen, berichtigen oder vervollständigen können und verschiedene, bisher nur unvollständige oder überhaupt nicht bekannte Werke von ihm aufgefunden. Vorliegende Arbeit bringt eine Anzahl bisher unveröffentlichter Dokumente, die sich auf das Leben von Desargues beziehen, und gibt eine kurze Beschreibung einiger seiner Schriften, die in der von M. Poudra 1864 veranstalteten Ausgabe von Desargues' Werken nicht enthalten, vielmehr erst später gefunden worden sind. Zu den ersteren gehört z. B. der Geburtsschein, aus dem hervorgeht, daß Desargues nicht, wie man bisher glaubte, im Jahre 1593, sondern schon am 2. März 1591 oder wenige Tage früher geboren wurde. Zu den letzteren gehört außer einer Reihe kleinerer Schriften ein im März 1951 von M. Moisy zufällig in der Pariser Nationalbibliothek gefundener Originaldruck des berühmten „Brouillon project“ über die Kegelschnitte von 1639 nebst 2 Anhängen; bisher kannte man nur eine 1845 von M. Chasles gefundene unvollständige Abschrift von 1679. Die Arbeit, die 9 Tafeln mit Photokopien der verschiedenen Dokumente und einzelner Seiten aus dem neu entdeckten Originalwerk enthält, stellt in Verbindung mit der neuen Ausgabe der gesammelten Schriften einen wesentlichen Beitrag zur Desargues-Forschung dar. Sie zeigt aber auch, daß auf dem Gebiet der Geschichte der Wissenschaften bei planmäßigem Suchen immer noch verloren geglaubte Quellschriften gefunden werden können (vgl. auch B. A. Swinden, dies. Zbl. 39, 4).

*Eugen Löffler.*

**Coolidge, J. L.: The story of tangents.** Amer. math. Monthly 58, 449—462 (1951).

Verf. geht aus von der Definition der Tangente als der Nichtschneidenden bei Euklid und Apollonios und erwähnt alsdann Archimedes, Fermat, Descartes, Roberval, Torricelli, Sluse, Barrow, Newton und Leibniz. Leider bezieht er sich größtenteils nicht auf Originalstellen, sondern auf etwas zweifelhafte spätere Nachdrucke. Hinsichtlich der Zweitliteratur geht er nicht über das Jahr 1932 hinaus und wagt es deshalb nicht, in der Frage des Prioritätstreites einen Entscheid zu fällen. Er kennt anscheinend weder des Ref. Studien zur Vorgeschichte des Prioritätstreites (Abh. Preuß. Akad. Wiss., math.-nat. Kl. 1943, Nr. 2) noch die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik (1949; dies. Zbl. 32, 193), worin der deutsche Leser alle einschlägigen Unterlagen für das Thema des Verf. nebst den zugehörigen neueren Literaturnachweisen finden kann.

*Joseph Ehrenfried Hofmann.*

**Tenca, Luigi: L'attività matematica di Guido Grandi.** Periodico Mat., IV. Ser. 29, 181—197 (1951).

Verf., dem wir eine eingehende Bibliographie über Grandi (Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., vorgelegt am 6. VII. 1950) verdanken, gibt hier eine gedrängte Übersicht über das umfangreiche mathematische Schaffen Grandis, das neben den bekannten Druckwerken rund 4500 in verschiedenen italienischen Bibliotheken zerstreute wissenschaftlich interessante Briefe mit führenden Zeitgenossen (worunter Viviani, Newton, Leibniz, die Brüder Ceva, Saccheri, die Brüder Manfredi u. Graf G. Fagnani) und mehrere nachgelassene, bisher noch nicht näher analysierte Werke umfaßt. Er geht etwas näher ein auf die Gründe, die Grandi zur Festsetzung  $1 - 1 + 1 - 1 \dots = \frac{1}{2}$  veranlaßt haben.

*Joseph Ehrenfried Hofmann.*

• **Turnbull, Herbert Westren: Bi-centenary of the death of Colin Maclaurin (1698—1746), mathematician and philosopher, professor of mathematics in Marischal College, Aberdeen (1717—1725).** (Aberdeen University Studies No. 127.) Aberdeen: The University Press 1951. 20 pp. 5.— sh.

In dieser Ansprache vom 4. II. 1947 zum Gedächtnis an den 200 Jahre zurückliegenden Tod Maclaurins gibt Verf. eine feinsinnige biographische Studie und Proben aus den Werken des Autors: (1) die organische Erzeugung höherer Kurven durch passende Bewegung fester Winkel und die Führung der Ecken beweglicher



Vielecke durch feste Punkte auf gegebenen Kurven (Cramers Paradoxon, Höchstzahl der Doppelpunkte einer  $C_n$ ), (2) die Sätze über die Summe reziproker Werte der auf einer Kurventransversalen entstehenden Abschnitte nebst Anwendung auf die  $C_3$  (Cotes), (3) die nach Maclaurin benannte Entwicklung, (4) die Behandlung des Problems der Kurve schnellsten Abstiegs zwischen zwei gegebenen Punkten verschiedener Höhe.

*Joseph Ehrenfried Hofmann.*

**Coolidge, Julian L.:** Six female mathematicians. Scripta math 17, 20—31 (1951).

Es handelt sich um Kurzbiographien der Hypatia (375/415), der M. G. Agnesi (1718/99), der E. du Chatelet (1706/49), der M. Sommerville (1780/1872), der S. Germain (1776/1831) und der S. Kowalewski (1850/91) mit einigen ergänzenden Notizen über die maßgeblichen Biographien.

*Joseph Ehrenfried Hofmann.*

**Labrador, Juan Francisco:** Maria Cayetana Agnesi. Gac. mat., Madrid 3, 175—178 (1951) [Spanisch].

● **Maroger, A.:** Les trois étapes du problème Pythagore-Fermat. La récurrence, l'art des réciproques. (Mathématique-Métaphysique-Méthodologie.) Paris: Librairie Vuibert 1951. IX, 98 p. F. 400,—.

**Freudenthal, Hans:** La première rencontre entre les mathématiques et les sciences sociales. Arch. intern. Hist. Sci., Paris 30, 25—34 (1951).

● **Dugas, René:** Henri Poincaré devant les principes de la mécanique. Revue sci. 89, 75—82 (1951).

In dieser Conférence vor der École polytechnique im Dezember 1950 gibt Verf. eine Darstellung der Mitwirkung Poincarés bei der Schaffung der Relativitätsmechanik sowie seiner philosophischen Ansichten zu dieser wie zur Physik überhaupt und schließlich auch seiner Anteilnahme an der Quantentheorie.

*Georg Hamel.*

● **Dingle, Herbert:** A century of science. London: Hutchinson's Scientific and Technical Publication 1951. 338 p., 4 illustr. 15 s.

**Lavrent'ev, M. A. und L. A. Ljusternik:** Nina Karlovna Bari. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 6 (46), 184—185 (1951) [Russisch].

**Jessen, Børge:** Harald Bohr. 22. April 1887—22. January 1951. Acta math. 86, I—XXIII (1951).

Wissenschaftliche Würdigung mit Schriftenverzeichnis.

**Godeaux, Lucien:** Federigo Enriques (1871—1946). Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 77—85 (1951).

**Brahana, H. R.:** George Abram Miller. 1863—1951. Bull. Amer. math. Soc. 57, 377—382 (1951).

**Kuroš, A. G.:** Otto Jul'evič Šmidt. (Zum sechzigsten Geburtstag.) Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 5 (45), 197—199 (1951) [Russisch].

**Mardžanišvili, K. K.:** Ivan Matveevič Vinogradov. (Zum 60. Geburtstage.) Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 5 (45), 190—196 (1951) [Russisch].

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

**Severi, Francesco:** La donna e la matematica. Archimede 3, 210—212 (1951).

● **Dürr, Karl:** The propositional logic of Boethius. (Studies in logic and the foundations of mathematics.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1951. X, 79 p.

Das deutsche Manuskript dieses Werkes des Züricher Philosophen war bereits 1939 fertiggestellt. Die Zeitverhältnisse verhinderten die damals geplante Veröffentlichung. Nun wird es in der von L. E. J. Brouwer, E. W. Beth und A. Heyting herausgegebenen Sammlung über Studien in Logik und Grundlagen der Mathematik in englischer Sprache der Gelehrtenwelt vorgelegt. — Boethius (480—524) hat zwei (wenig bekannte) Schriften verfaßt, in denen Sätze der Aussagenlogik behandelt sind, nämlich „de syllogismo hypothetico“ und einen Kommen-



tar zu Ciceros „Topica“. Sie sind zwischen 510 und 523 geschrieben. Die Einleitung des vorliegenden Buches enthält eine Charakteristik der beiden Schriften mit bibliographischen Angaben. Im ersten Abschnitt werden die Quellen der erstgenannten Schrift untersucht. Der zweite Abschnitt schildert die Bedeutung beider Schriften für die Frühscholastik. Sie waren im 11. und 12. Jahrhundert handschriftlich im Umlauf und übten einen deutlich erkennbaren Einfluß auf die logische Literatur jener Zeit aus (Notker Labeo und Peter Abelard). Der dritte Abschnitt gibt eine Klärung der Begriffe Objektsprache und Objektwissenschaft in ihrem Verhältnis zur Metasprache (Syntaxsprache) und Metawissenschaft, und im Anschluß an die polnischen Logistiker eine Beschreibung der in der folgenden Untersuchung überwiegend verwendeten Metasprache. Der vierte Abschnitt enthält eine kritische Untersuchung der Schrift „de syllogismo hypothetico“. Die logischen Formeln (Aussagenformen und Schluß-Schemata), die Boethius in einer von ihm geschaffenen Form des Lateinischen darstellt, werden in die modernen Metasprachen übersetzt und mit den Methoden der mathematischen Logik auf ihre Richtigkeit untersucht. In dieser Schrift finden sich auch Ansätze zu einer Theorie der Modalitäten, die als Aussagenlogik betrachtet werden kann, weil die vorkommenden Veränderlichen Aussagenvariable sind. Boethius erwähnt als logisch wichtig diejenigen Aussagen mit Modalzeichen, die mit den Begriffen der Möglichkeit und der Notwendigkeit verknüpft sind. Die Sätze des Boethius stimmen weithin überein mit den Ergebnissen der modernen Modalitätslogik. Im fünften Abschnitt finden wir eine ähnliche Untersuchung eines Kapitels aus dem 5. Buch des Kommentars zu Ciceros „Topica“. Cicero erwähnt einige modi (Schlußtypen). Boethius identifiziert sie mit dem System der 7 konditionalen Syllogismen, d. h. Schluß-Schemata. Diese sind Gegenstand der Untersuchung des Verf. In einem Anhang gibt der Übersetzer des Buches, Norman M. Martin, einige im Text übergangene schwierigere Beweise mit den Hilfsmitteln der mathematischen Logik. Das Werk ist ein beachtenswerter Versuch, die Schlußfolgerungen eines mittelalterlichen Logikers vom Standpunkt der Logistik aus zu untersuchen, um ihre Richtigkeit zu beweisen. Bei der Untersuchung der „Objektwissenschaft“ des Boethius dienen die modernen logischen Disziplinen als „Metawissenschaften“.

Eugen Löffler.

● Curry, Haskell B.: *Outlines of a formalist philosophy of mathematics.* (Studies in logic and the foundations of mathematics.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1951. VII, 75 p.

Verf. faßt seine Darstellung auf als einen Versuch eines Mathematikers, dem Philosophen „den halben Weg entgegenzukommen“, um zu einer gemeinsamen Lösung des Zentralproblems der Philosophie der Mathematik kommen zu können. Dies Zentralproblem wird formuliert als „the definition of mathematical truth“. Nachdem die Lösungen des Realismus und Idealismus (Intuitionismus) kurz abgewiesen worden sind, gibt Verf. seine Lösung (Formalismus). (1) Was ist ein formal system? Die Definition eines formal system besteht aus einer Liste von primitiven Termen (Individuen), primitiven Operationen (zur Bildung von Termen) und primitiven Prädikaten (zur Bildung von Aussagen), ferner aus Regeln  $P_1, \dots, P_n \rightarrow P$  (bei Axiomen ist  $n = 0$ ) zur Ableitung von Sätzen. Es werden mehrere Beispiele gegeben. Die geringfügigen Unterschiede des Begriffs formal system zum Carnap'schen Begriff language-system werden ausführlich besprochen — mit einiger Kritik am „Syntaktizismus“. — (2) Verf. definiert: „mathematics is the science of formal systems“. Mit „science“ scheint ihm wesentlich gemeint zu sein, was Verf. als „metatheory of a formal system“ definiert, nämlich „study it by any means at our command“. Zur Verdeutlichung werden einige metatheoretische Aussagen angeführt: Aussagen über formale Systeme, die durch Induktion über alle Terme bzw. Sätze zu beweisen sind; Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit; nicht-konstruktive Aussagen wie der Gödel'sche Unvollständigkeitssatz u. a. — (3) Beschränkt man sich auf die konstruktive Metatheorie formaler Systeme, so besteht — wie Verf. ausführt — kein wesentlicher Unterschied zum Intuitionismus. Der Definition der Mathematik als Metatheorie formaler Systeme kann von jedem Standpunkt aus akzeptiert werden; sie ist unabhängig von philosophischen Voraussetzungen und umfaßt außerdem alles, was üblicherweise Mathematik genannt wird. Verf. meint daher, daß Meinungsverschiedenheiten nur noch auftreten sollten bei der Frage nach der „acceptability“, d. h. der Brauchbarkeit formaler Systeme. Da die Brauchbarkeit aber vom jeweiligen Zweck abhängt, sind für den Mathematiker alle formalen Systeme gleichberechtigt. — Verf. eröffnet mit seinem Buch die Möglichkeit einer vorurteilsfreien Diskussion. Das Zentralproblem ist aber noch nicht gelöst, denn dieses ist jetzt das Wahrheitskriterium für metatheoretische Aussagen. Die sog. klassische Analysis K. A. und die intuitionistische Analysis I. A. sind z. B. Metatheorien desselben formalen Systems (der elementaren Arithmetik). Sind nun K. A. und I. A. beide wahr? Diese Frage, die zur Mathematik, nicht zur Philosophie der Mathematik gehört, bleibt offen. Verf. behandelt nur formale Systeme K. A. F und I. A. F, die durch „Formalisierung“ (ein vom Verf. als unproblematisch hingenommener Prozeß) aus K. A. und I. A. hervorgegangen sind, und hebt die Brauchbarkeit von K. A. F gegenüber der Unbrauchbarkeit von I. A. F für die Physik hervor. Diese Brauchbarkeit von K. A. F ist nach der Meinung des Verf. „an empirical fact“. Könnte sie aber nicht ein geistesgeschichtliches Phänomen sein, dessen Erklärung zurückführbar ist auf die Frage, warum wir an die Wahrheit von K. A. glaubten bzw. noch glauben? Diese Frage ist nach dem Verf. „preposterous“.

Paul Lorenzen.



• Wright, Georg H. von: An essay in modal logic. (Studies in logic and the foundations of mathematics.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1951. VI, 90 p.

In this work the author discusses alethic, epistemic and deontic modalities and quantification theory. He develops methods of solving decision problems by means of truth-tables and normal-forms. — In the first two chapters, which are introductory, the modalities are defined and the notation is explained. — Chapter III contains a discussion of alethic modalities, both de dicto and de re. Instead of the Lewis symbol „ $\Diamond$ “ the author uses „ $M$ “ to denote logical possibility. If the operator  $M$  is prefixed to a formula of the classical Propositional Calculus ( $M_0$ -sentence) the resulting formula is called an atomic  $M_1$ -sentence. A formula constructed solely from atomic  $M_1$ -sentences solely by means of functions of the classical Propositional Calculus is called an  $M_1$ -sentence. The author gives decision methods for the system  $M_1$ . He then gives a similar discussion of the system  $M_1 + M_0$  which consists of formulae constructed from atomic  $M_1$  and/or  $M_0$ -sentences solely by functions of the classical Propositional Calculus. He then discusses alethic de re systems and points out that it is possible to develop systems  $M_{1r}$  and  $M_{1r} + M_{0r}$  „isomorphous“ with the systems  $M_1$  and  $M_1 + M_0$  respectively. — In Chapter IV the author discusses epistemic modalities, the proposition  $V a$  meaning „the proposition  $a$  is verified“ and defining the falsification operator  $F$  by  $V \sim$ . He shows that if in sentences expressing  $M$ -tautologies we replace the operator  $M$  by  $\sim V \sim$  we obtain sentences expressing  $V_1$ -tautologies, the system  $V_1$  being constructed by a method strictly analogous to that for the system  $M_1$ . — Chapter V deals briefly with deontic modalities of the first order. — In Chapter VI the author discusses the combination of epistemic and existential modalities. By an atomic  $EV$ -sentence is understood the existential operator  $E$  followed by a  $V$ -predicate. An  $EV$ -sentence is a formula constructed from atomic  $EV$ -sentences by means of functions of the classical Propositional Calculus. The systems  $VE$  and  $VE + EV$  are defined similarly and decision methods are given for the three systems. — Chapter VII deals with alethic modalities of higher order. The author gives decision methods for unreduced modalities and for reduced modalities, reductions being made by means of the first or second principles of reduction. These principles are „reflected“ in the formulae  $M M a \rightarrow M a$ ,  $M a \rightarrow \sim M \sim M a$  respectively. — The book concludes with two appendices. The first of these is devoted to a discussion of the Modal Syllogism. In the second the author exhibits his systems for alethic modalities in axiomatic form. He shows that the first of his systems containing alethic modalities of all orders is at least as strong as the Lewis system  $S 2$  but weaker than  $S 3$ . He then shows that his two following systems are equivalent to  $S 4$  and  $S 5$  respectively. Alan Rose.

Rose, Alan: A formalization of the  $C-O$  propositional calculus. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 635—636 (1951).

Nachweis, daß für den zweiwertigen Aussagenkalkül mit Implikation „ $C$ “ und Falsum „ $O$ “ als Grundkonstanten die Axiome  $CCCpqrCCr p C s p$  und  $C O p$  in Verbindung mit der üblichen Einsetzungs- und Abtrennungsregel ein vollständiges Axiomensystem bilden. Gisbert Hasenjaeger.

Rose, Alan: Axiom systems for three-valued logic. J. London math. Soc. 26, 50—58 (1951).

$L^{(3)}$  sei die durch dreiwertige Matrizen und in diesem Sinne semantisch bestimmte dreiwertige Aussagenlogik in  $\xrightarrow{L^{(3)}}$  und  $\sim$  von J. Łukasiewicz [Ruch filozoficzny 5, 169—171 (1920)]. In  $L^{(3)}$  sei eine Matrix für  $\vee$  im Anschluß an P. Dienes [J. symbolic Logic 14, 85—94 (1949)] so bestimmt, daß in  $L^{(3)}$   $H_1 \vee H_2$  definierbar ist durch  $\sim H_1 \xrightarrow{L^{(3)}} H_2$  und umgekehrt in  $L^{(3)}_*$   $H_1 \xrightarrow{L^{(3)}} H_2$  durch  $\sim H_1 \vee H_2$ . In  $L^{(3)}_*$  sei ferner  $H_1 \wedge H_2$  definiert durch  $\sim (\sim H_1 \vee H_2)$ . Verf. zeigt, daß auf dieser Basis unter Voraussetzung der Einsetzungs- und der Abtrennungsregel  $L^{(3)}$  axiomatisierbar ist (1) durch  $M_1 = \{A1.1, \dots, A1.4\}$ , (2) durch  $M_2 = \{A2.1, \dots, A2.4\}$  mit „ $\rightarrow$ “ für „ $\xrightarrow{L^{(3)}}$ “ und

$$A1.1 = A2.1 = (p \wedge p) \vee p \rightarrow p \quad A1.4 = A2.4 = (p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee p \rightarrow r \vee q)$$

$$A1.2 = A2.2 = p \rightarrow q \vee p \quad A2.3 = p \rightarrow p$$

$$A1.3 = p \vee q \rightarrow q \vee p$$

Der Beweis wird geliefert durch eine Reduktion von  $M_1$  und  $M_2$  auf das Axiomensystem von M. Wajsberg (dies. Zbl. 4, 385). Heinrich Scholz.



**Rose, Alan:** *Remarque sur les notions d'indépendance et de non-contradiction.* C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 512—513 (1951).

$K$  sei ein deduktiver Kalkül in  $\rightarrow$  und  $\sim$  mit der widerspruchsfreien Axiomenmenge  $M$ ,  $H$  ein  $K$ -Ausdruck, der mit Hilfe der Schlußregeln von  $K$  aus  $M$  nicht abgeleitet werden kann. Verf. zeigt, daß hieraus nicht generell auf die Widerspruchsfreiheit von  $M \cup \{\sim H\}$  geschlossen werden kann. Beweis: M. Wajsberg hat gezeigt (dies. Zbl. **4**, 385), daß die semantisch definierte dreiwertige Aussagenlogik  $L^{(3)}$  von J. Łukasiewicz in  $\rightarrow$  und  $\sim$  unter Voraussetzung der Einsetzungs- und der Abtrennungsregel axiomatisiert werden kann durch  $M = \{A1, \dots, A4\}$ , mit

$$\begin{array}{ll} A1 = (p \rightarrow \sim p) \rightarrow p \cdot \rightarrow \cdot p & A3 = (\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q) \\ A2 = p \rightarrow (q \rightarrow p) & A4 = p \rightarrow q \cdot \rightarrow \cdot (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r). \end{array}$$

Es sei  $H = (\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$ .  $H$  ist kein  $L^{(3)}$ -Satz, folglich nicht ableitbar aus  $M$ .  $M$  ist widerspruchsfrei, dagegen nicht mehr  $M \cup \{\sim H\}$ , da  $M \cup \{H\}$  nur Identitäten des zweiwertigen Aussagenkalküls enthält. Heinrich Scholz.

**Rose, Alan:** *Strong completeness of fragments of the propositional calculus.* J. symbolic Logic **16**, 204 (1951).

In einer sehr interessanten Studie hat L. Henkin (dies. Zbl. **34**, 7) ein allgemeines Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe jeder semantisch definierte Teilkalkül des klassischen Aussagenkalküls, der wenigstens das Implikationssymbol im Sinn der *material implication* enthält, unter Voraussetzung eines auf die Abtrennungsregel und dementsprechend auf Axiomenschemata beschränkten Folgebegriffs deduktiv so entwickelt werden kann, daß den jeweiligen Teilkalkülen die semantische Vollständigkeit zukommt: Die Menge der Sätze fällt zusammen mit der Menge der identischen Ausdrücke des jeweiligen Teilkalküls. In der vorstehenden Note wird durch eine Überlegung von beispielhafter Einfachheit gezeigt, daß den so formalisierten Kalkülen nach Adjungierung der Einsetzungsregel auch die syntaktische Vollständigkeit zukommt: Fügt man zu den Axiomen einen unbeweisbaren Ausdruck hinzu, so ist jeder Ausdruck des in Frage stehenden Teilkalküls ableitbar. Hiermit ist ein von A. Tarski 1930 ausgesprochenes allgemeines Theorem bewiesen. Heinrich Scholz.

**L'Abbé, Maurice:** *On the independence of Henkin's axioms for fragments of the propositional calculus.* J. symbolic Logic **16**, 43—45 (1951).

Eine scharfsinnige Entscheidung der unentschiedenen Unabhängigkeitsfragen zu dem System der Axiomenschemata von Henkin (dies. Zbl. **34**, 7). Beiläufiges Ergebnis: Das System der vier Axiomenschemata

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow (B \rightarrow A) & (A \rightarrow C) \rightarrow C \cdot \rightarrow \cdot \sim A \rightarrow C \\ A \rightarrow B : \rightarrow : A \rightarrow (B \rightarrow C) \cdot \rightarrow \cdot A \rightarrow C & A \rightarrow C \cdot \rightarrow \cdot (\sim A \rightarrow C) \rightarrow C \end{array}$$

ist unter Voraussetzung eines auf die Abtrennungsregel beschränkten Folgebegriffs unabhängig und eine Basis für ein im semantischen Sinne vollständiges System des Aussagenkalküls in  $\rightarrow$  und  $\sim$ . Heinrich Scholz.

**Scroggs, Schiller Joe:** *Extensions of the Lewis system S 5.* J. symbolic Logic **16**, 112—120 (1951).

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind (nach einigen vorbereitenden Sätzen aus der Algebra der logischen Matrizen): Theorem 4. Jede in bezug auf Einsetzung und Abtrennung für materielle Implikation abgeschlossene echte Erweiterung von  $S5$  besitzt eine endliche adäquate Matrix. — Theorem 5. Jede solche Erweiterung von  $S5$  ist auch abgeschlossen in bezug auf den Übergang von  $\mathfrak{A}$  zu  $\sim \diamond \sim \mathfrak{A}$  (dies gilt auch für  $S5$  selbst). — Theorem 6. Jede unendliche Boolesche Algebra liefert eine adäquate Matrix für  $S5$ , wenn man 1 als ausgezeichneten Wert nimmt, der Konjunktion und Negation die entsprechenden Booleschen Operationen und der Möglichkeit  $\diamond$  die Operation  $*$  zuordnet, wo  $*$  erklärt ist durch:  $*0 = 0$ ,  $*x = 1$  für  $x \neq 0$ . Gisbert Hasenjaeger.



**McNaughton, Robert:** A theorem about infinite-valued sentential logic. *J. symbolic Logic* 16, 1—13 (1951).

Ein Beitrag zum „Repräsentantenproblem“ für den unendlichwertigen Aussagenkalkül in Implikation und Negation mit der Matrix  $[I, 1, \min(1-x+y), 1-x]$ , wo  $I$  das abgeschlossene reelle Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  ist. — Verf. beweist das Theorem: Eine Abbildung  $f$  (von  $I^n$  in  $I$ ) ist genau dann durch einen aussagenlogischen Ausdruck repräsentierbar, wenn  $f$  eindeutig und stetig ist und wenn es eine endliche Zahl von Linearformen  $\lambda_j = b_j + \sum_{v=1}^n m_{vj} x_v$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) mit ganzrationalen  $b_j$  und  $m_{vj}$  gibt, so daß zu jedem  $x \in I^n$  ein  $j$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) existiert, so daß  $f(x) = \lambda_j(x)$ . — Folgerung für abzählbar unendliche Teilmatrizen mit einer in  $I$  dichten Wertmenge  $K$ : Die Abbildung  $f$  (von  $K^n$  in  $K$ ) muß sich eindeutig und stetig zu einer für  $I$  repräsentierbaren Funktion ergänzen lassen. — Folgerung für endliche Teilmatrizen mit der Wertmenge  $K_m = \{0, 1/(m-1), 2/(m-1), \dots, 1\}$ :  $f$  (von  $(K_m)^n$  in  $K_m$ ) ist genau dann repräsentierbar, wenn  $f$  eindeutig ist und für jedes Argumentensystem, das einem  $K_t$  mit  $(t-1)/(m-1)$  angehört, auch einen Wert aus  $K_t$  liefert.

Gisbert Hasenjaeger.

**Quine, W. V.:** On the consistency of „new foundations“. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 37, 538—540 (1951).

Hao Wang hat gezeigt, daß seine Revision (s. dies. Zbl. 39, 246) von Quines Mathematical Logic (die auch für dessen dritte Auflage maßgeblich sein wird) widerspruchsfrei ist (wf.), wenn die sogenannten „New Foundations“ (dies. Zbl. 16, 193) von Quine wf. sind. Verf. legt nun dar, wie die Wf. der New Foundations auf die Wf. einer geeigneten Fassung der Principia Mathematica (mit „stratification“,  $\varepsilon$ -Beziehung als Primitivsymbol, Relationstheorie nach N. Wiener) zurückgeführt werden kann.

Gert H. Müller.

**Wang, Hao:** Arithmetic translations of axiom systems. *Trans. Amer. math. Soc.* 71, 283—293 (1951).

Die Untersuchungen des Verf. bewegen sich im gleichen Rahmen wie frühere (vgl. das Referat in dies. Zbl. 37, 296). Das Verhältnis von Theorien, das durch die Möglichkeit ihrer Gödelschen Arithmetisierung entsteht, wird näher untersucht. Die Übersetzung eines Systems  $S$  in ein anderes  $S'$  wird wie früher erklärt; ferner bezeichnet  $\text{Con}(S)$  wie früher die arithmetische Aussage, die ausdrückt, daß nicht gleichzeitig ein Satz und sein Gegenteil in  $S$  beweisbar sind. Unter  $Z$  wird das von Hilbert und Bernays (Grundlagen der Mathematik I, S. 371) benutzte System der Zahlentheorie verstanden, unter  $Z_s$  das System, das aus  $Z$  durch Hinzufügen von  $\text{Con}(S)$  entsteht. Verschiedene Sätze der vorliegenden Arbeit wurden schon in der früheren Arbeit bewiesen. Wir erwähnen die weiteren hier abgeleiteten Ergebnisse: Wenn  $Z_s$  widerspruchsfrei ist, ist  $S$  widerspruchsfrei. Wenn  $S$  widerspruchsfrei und  $Z$   $\omega$ -widerspruchsfrei ist, ist  $Z_s$  widerspruchsfrei. Weitere Bemerkungen betreffen die relative Widerspruchsfreiheit spezieller Systeme. Unter  $N$  wird ein schwaches System der Mengenlehre verstanden, das nur die Existenz der Nullmenge und der Mengen mit einem oder zwei Elementen postuliert.  $N'$  verhält sich zu  $N$  wie ein Prädikatenkalkül der  $(n+1)$ -ten Stufe zu einem solchen der  $n$ -ten Stufe, abgesehen davon, daß Variable des  $(n+1)$ -ten Typs nicht dazu benutzt werden dürfen, Klassen von niedrigerem Typ zu definieren.  $N \#$  entsteht aus  $N$  durch Hinzufügung von  $\text{Con}(N)$ .  $N'$  ist dann relativ zu  $N \#$  widerspruchsfrei. Wenn  $N$   $\omega$ -widerspruchsfrei ist, ist  $N \#$  widerspruchsfrei. Unter Benutzung des bekannten Gödelschen Theorems wird gezeigt: Es existiert eine unbegrenzte Folge von Systemen  $L_0 (= Z), L_1, L_2, \dots$ , die alle mit dem Zeichenmaterial von  $Z$  ausgedrückt werden können, so daß jedes System in ein beliebiges nachfolgendes übersetzbar ist, während nie das Umgekehrte gilt.

Wilh. Ackermann.

**Mostowski, Andrzej:** On the rules of proof in the pure functional calculus of the first order. *J. symbolic Logic* 16, 107—111 (1951).

Es ist üblich, die Gültigkeit eines prädikatenlogischen Ausdrucks ( $P$ -Ausdrucks)  $H$  der ersten Stufe für einen fest vorgegebenen Individuenbereich  $\omega$  so zu definieren, daß der leere Individuenbereich zur Konkurrenz nicht zugelassen ist. Identifiziert man mit Leibniz die Sätze einer Prädikatenlogik mit den  $P$ -Ausdrücken, die gültig sind in jedem Individuenbereich, so bedeutet die Ausschließung des leeren Individuenbereichs eine Einschränkung, die als willkürlich, folglich als unerwünscht empfunden werden kann, auch dann, wenn sie begründet wird durch die Tatsache, daß mathematische Theorien von einem erkenntnistheoretischen Interesse



stets einen nicht-leeren Individuenbereich zur Voraussetzung haben. Es ist also sinnvoll zu fragen, ob der Prädikatenkalkül der ersten Stufe in seiner deduktiven Gestalt nicht auch so aufgebaut werden kann, daß die semantische Vollständigkeit dieses Kalküls bezogen werden kann auf einen Begriff von Allgemeingültigkeit, der die Gültigkeit in dem leeren Individuenbereich umfaßt. — Zur Gültigkeit von  $H$  in  $\omega$ . Unter einer prädikatenlogischen Belegung  $\mathfrak{B}$  über  $\omega$  soll eine simultane Abbildung der Menge der Subjektvariablen  $x, y, z, \dots$  in die Menge der  $\omega$ -Individuen und der Menge der  $n$ -stelligen Prädikatenvariablen ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) in die Menge der  $\omega$ -Attribute von derselben Stellenzahl verstanden sein.  $H(x)$  sei ein  $P$ -Ausdruck, in welchem  $x$  an wenigstens einer Stelle frei vorkommt ( $H$  kann neben  $x$  noch beliebig viele Subjektvariablen von derselben Art als Parameter enthalten). Dann kann man, im Anschluß an eine grundlegende Konstruktion von A. Tarski, die Redeweise „ $\mathfrak{B}$  erfüllt  $H$  über  $\omega$ “ für ein beliebiges  $H$ , folglich auch für ein  $H'$  vom Typus  $H(x)$  so definieren, daß für den Fall, daß  $\omega$  leer ist, folgendes gilt: (1)  $\mathfrak{B}$  erfüllt  $\forall x H(x)$  über  $\omega$  in jedem Falle, weil dies für ein beliebiges  $\omega$  gleichbedeutend ist mit der Redeweise: „Für jedes  $x$ : Wenn  $x$  ein  $\omega$ -Individuum ist, so erfüllt die Belegung  $\mathfrak{B}'$ , die sich von  $\mathfrak{B}$  höchstens dadurch unterscheidet, daß  $\mathfrak{B}'(x) = x$ ,  $H(x)$  über  $\omega$ .“ Die Prämisse ist für das leere  $\omega$  nie erfüllt. Folglich trifft die Wenn-so-Aussage zu. (2)  $\mathfrak{B}$  erfüllt  $\exists x H(x)$  über  $\omega$  in keinem Falle, weil dies für ein beliebiges  $\omega$  gleichbedeutend ist mit der Redeweise: „Es gibt ein  $x$ , so daß  $x$  ein  $\omega$ -Individuum ist und die Belegung  $\mathfrak{B}'$ , die sich von  $\mathfrak{B}$  höchstens dadurch unterscheidet, daß  $\mathfrak{B}'(x) = x$ , erfüllt  $H(x)$  über  $\omega$ .“ Für das leere  $\omega$  gibt es kein solches  $x$ . — Für ein beliebiges  $\omega$  soll  $H$ -gültig heißen, wenn jede  $\omega$ -Belegung  $H$  erfüllt. Hieraus folgt, daß für das leere  $\omega$  folgendes gilt: (1\*) Jeder  $P$ -Ausdruck vom Typus „ $\forall x H(x)$ “ ist  $\omega$ -gültig. (2\*) Jeder  $P$ -Ausdruck vom Typus „ $H(x)$ “ ist  $\omega$ -gültig. Man muß dann nur axiomatisch fordern, was auf der angegebenen Basis für jedes nicht-leere  $\omega$  leicht zu zeigen ist, daß auch für das leere  $\omega$   $H(x)$   $\omega$ -gültig sein soll genau dann, wenn  $\forall x H(x)$   $\omega$ -gültig ist. (3\*) Kein  $P$ -Ausdruck vom Typus „ $\exists x H(x)$ “ ist  $\omega$ -gültig. — Aus (3\*) folgt unmittelbar, daß kein  $P$ -Ausdruck vom Typus „ $\exists x H(x)$ “ allgemeingültig sein kann, wenn der leere Individuenbereich zur Konkurrenz zugelassen wird. — Verf. zeigt für eine gleichwertige nicht-formalisierte Definition der  $\omega$ -Gültigkeit von A. Church („Introduction to mathematical logic“, Part I, Princeton 1944, p. 73), daß die Einbeziehung des leeren  $\omega$  in die für die Allgemeingültigkeit geforderte  $\omega$ -Gültigkeit für jedes  $\omega$  in der Tat gelingt, und zwar schon dann, wenn man in dem System der von Church angenommenen Regeln des Schließens die Abtrennungsregel so abschwächt, daß sie lautet: Wenn alle freien Variablen in  $H_1$  auch in  $H_2$  vorkommen, so gilt: Wenn  $H_1$  und  $H_1 \rightarrow H_2$  beweisbar sind, so auch  $H_2$ . Die Churchsche Konstituierung des deduktiven Prädikatenkalküls der ersten Stufe (a. a. O. p. 66ff.) ist in bezug auf die Menge der  $P$ -Sätze gleichwertig mit einer Konstituierung dieses Kalküls, die als Axiome alle  $P$ -Ausdrücke zuläßt, die aus einer aussagenlogischen Identität durch eine prädikatenlogische Einsetzung hervorgehen, und als Schlußregeln die Regeln der freien Umbenennung und die Regeln der vorderen und hinteren Generalisierung und Partikularisierung. — Man überzeugt sich leicht davon, daß in einem solchen Kalkül zwar immer noch, wie es um der semantischen Vollständigkeit willen erforderlich ist, die  $P$ -Ausdrücke  $\forall x H(x) \rightarrow H(x)$  und  $H(x) \rightarrow \exists x H(x)$  beweisbar sind, aber, wegen der abgeschwächten Abtrennungsregel, nicht mehr  $\forall x H(x) \rightarrow \exists x H(x)$ ; denn dieser Übergang hat die Regel des Kettenschlusses zur Voraussetzung, die in dem vorliegenden Falle nicht mehr funktioniert. Dies ist der Preis, den man nach Einführung der abgeschwächten Abtrennungsregel für die Einbeziehung des leeren Individuenbereichs zu zahlen hat und zugleich eine überzeugende Begründung dafür, daß man auf diesen Bereich im allgemeinen Falle verzichtet; denn es ist nicht wahrscheinlich, daß eine noch schwächere Modifikation dasselbe leistet. Heinrich Scholz.

**Myhill, John:** Towards a consistent set-theory. J. symbolic Logic 16, 130—136 (1951).

Verf. setzt hier seine früheren, an Chwistek anknüpfenden Bemühungen (dies. Zbl. 42, 8) fort, auf der Basis einer nicht-finiten, eine besondere Form der Typentheorie enthaltenden Logik, deren Widerspruchsfreiheit gezeigt werden kann, zur Entwicklung eines Systems der Mathematik zu gelangen, das sich dem klassischen möglichst annähert. Über die in der früheren Arbeit gegebene Annäherung an die Theorie der reellen Zahlen bemerkt er, daß sie vom Standpunkt der mathematischen Praxis nur ein sehr kleines Bruchstück der Analysis darstellt. Statt auf diesem Wege fortzuschreiten, beweist er hier mit einem etwas modifizierten System Analoga zu den Axiomen der Mengenlehre mit Ausnahme des Extensionalitätsaxioms unter Zugrundelegung der Axiomatik von Bourbaki (dies. Zbl. 34, 1). Alle diese Analoga sind natürlich mit seiner Typentheorie behaftet. Wie weit nun und ob überhaupt die von ihm bewiesenen Axiome mehr leisten als ein Aufbau der verzweigten Mengenlehre in der üblichen Weise, dessen Widerspruchsfreiheit mit einfachen Mitteln gesichert werden kann, wird nicht erläutert und ist für den Leser schwer zu übersehen. Verf. stellt als weitere Ziele seiner Untersuchungen auf: 1. zu zeigen, daß einem Widerspruch in einem nicht-extensionalen Bourbakischen System ein Widerspruch in seinem System parallel gehen würde; 2. zu zeigen, daß ein nicht-extensionales Bourbakisches System ein extensionales System als Modell enthält. Die Möglichkeit, dieses Programm durchzuführen, beurteilt Ref. etwas skeptisch.

Wilhelm Ackermann.



**Markov, A.:** Die Unmöglichkeit von gewissen Algorithmen in der Theorie assoziativer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 19—20 (1951) [Russisch].

**Markov, A.:** Die Unmöglichkeit von Algorithmen für die Entscheidbarkeit gewisser Eigenschaften assoziativer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 953—956 (1951) [Russisch].

In zwei Noten aus dem Jahre 1947 (dies. Zbl. 29, 101; 30, 194) hat Verf. u. a. ein endliches „Alphabet“  $A$  und eine endliche Menge von „Wörtern“  $W_j, W'_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) mit Buchstaben aus  $A$  angegeben derart, daß im zugehörigen assoziativen System (das ist das Restsystem von der Menge der Wörter über  $A$  nach der engsten Äquivalenzrelation, bezüglich der das leere Wort sich selbst und jedes Wort  $W_j$  dem entsprechenden Wort  $W'_j$  äquivalent ist) das „Identitätsproblem“ — d. h. die Frage, ob zwei Elemente  $V, W$  des assoziativen Systems gleich sind — nicht (durch ein allgemeines Verfahren) entscheidbar ist. Gestützt auf dieses Ergebnis skizziert Verf. in der zweiten der vorliegenden Noten den Beweis eines sehr allgemeinen Satzes, aus welchem sich unmittelbar die Nicht-Entscheidbarkeit einer ganzen Reihe weiterer spezieller Probleme ergibt, die in der ersten Note direkt bewiesen wurde. Es handelt sich dabei um assoziative Systeme über einem gewissen endlichen Alphabet  $A$ , welche mittels einer endlichen Menge von Wörtern  $W_j, W'_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) als Restsystem dargestellt werden können; solche Systeme nennt Verf. kurz  $K$ -Systeme. Eine Eigenschaft  $\mathfrak{P}$  von  $K$ -Systemen heiße „invariant“, wenn aus ihrer Gültigkeit für ein gewisses  $K$ -System  $S$  die Gültigkeit für jedes isomorphe System  $S'$  folgt. Der erwähnte Satz lautet dann folgendermaßen: Sei  $\mathfrak{P}$  eine invariante Eigenschaft von  $K$ -Systemen, für die gilt: (1) Es gibt ein  $K$ -System  $S_1$ , welches  $\mathfrak{P}$  besitzt, und (2) es gibt ein  $K$ -System  $S_2$ , welches in kein  $K$ -System einbettbar ist, das  $\mathfrak{P}$  besitzt; dann gibt es ein Alphabet  $A$  und eine endliche Menge von Wörtern  $W_j, W'_j$  derart, daß im zugehörigen assoziativen System die Eigenschaft  $\mathfrak{P}$  nicht entscheidbar ist. Geht  $S_1$  aus einem Alphabet mit  $n$  Elementen hervor, so kann die Anzahl von  $A$  noch beliebig  $\geq n + 4$  vorgeschrieben werden. — Beschränkt man sich auf „erbliche“ Eigenschaften  $\mathfrak{P}$  von  $K$ -Systemen, das sind Eigenschaften, deren Gültigkeit für ein gewisses  $K$ -System  $S$  die Gültigkeit für jedes eingebettete  $K$ -System  $T$  nach sich zieht, so läßt sich die Voraussetzung (2) offenbar abschwächen zu: (2') Es gibt ein  $K$ -System  $S_2$ , welches die Eigenschaft  $\mathfrak{P}$  nicht besitzt. — Aus dem genannten Satz ergibt sich unmittelbar, daß es für ein Alphabet  $A$  mit mindestens 4 Buchstaben kein Verfahren (Algorithmus) geben kann, um für irgend zwei  $K$ -Systeme  $S, S'$  über  $A$  zu entscheiden, ob sie isomorph sind (Isomorphieproblem). Ferner sieht man, daß es für ein Alphabet  $A$  mit mindestens 4 Buchstaben keine Verfahren geben kann, um für irgendein  $K$ -System  $S$  über  $A$  zu entscheiden, ob  $S$  nur aus dem Einheits-element besteht, ob  $S$  eine Gruppe ist, ob  $S$  eine Halbgruppe ist, ob  $S$  in eine Gruppe einbettbar ist, ob in  $S$  das Identitätsproblem entscheidbar ist (Metaproblem der Identität), ob  $S$  endlich ist (Endlichkeitsproblem).

Leo Kaloujnine — Günter Asser.

## Algebra und Zahlentheorie.

### Allgemeines. Kombinatorik:

● Rees, P. K. and F. W. Sparks: Intermediate algebra. New York: McGraw-Hill 1951. VIII, 329 p. \$ 3,25.

● Verriest, Gustave: Les nombres et les espaces. (Collection Armand Colin. Sect. de Math. No. 269.) Paris: A. Colin 1951. 188 p.

Das vorliegende Büchlein entspricht im Umfang und Format etwa den deutschen Göschenbänden. Es ist dazu bestimmt, der Jugend vor dem Eintritt in ein mehr zweckgebundenes Fachstudium einen Einblick in die Höhen der reinen Mathematik zu verschaffen. Es wird demgemäß überall auf größere Formelentwicklungen, ähnlich wie bei vielen für Laien bestimmten Darstellungen, verzichtet. Dennoch wird auf den 185 Seiten ein bemerkenswerter Einblick in die behandelten Dinge gewährt. Die Kapitel lauten: I. Zahlbegriff und Mengen, II. Räume und Geometrien, worin besonders die nichteuklidischen Geometrien in ihrer physikalischen Anwendung behandelt sind, III. Gruppen, ein Kapitel, das besonders für die Leistungen von Galois Verständnis zu wecken sucht, IV. Moderne Algebra mit einem Eingehen auf den Idealbegriff, V. Die großen Etappen der Geometrie. Das Buch ist überall mit einem begeisterten Schwung geschrieben, was schon aus der Einleitung und treffend gewählten Leitsprüchen zu den einzelnen Abschnitten hervorgeht.

Werner Burau.



Shanks, E. B.: Iterated sums of powers of the binomial coefficients. Amer. math. Monthly 58, 404—407 (1951).

L'A. obtient une formule générale à deux paramètres donnant la  $p^{\text{ième}}$  somme itérée de la  $k^{\text{ième}}$  puissance du  $(i+1)^{\text{ième}}$  coefficient du binôme. Cette formule contient de nombreux résultats particuliers établis jusqu'ici par d'autres chercheurs.

Il pose  $S_i^k(n, 0) = \binom{n}{i}^k$  et l'itérée:  $S_i^k(n, p) = S_i^k(1, p-1) + S_i^k(2, p-1) + \dots + S_i^k(n, p-1)$ , où  $i, k, n, p$  sont des entiers positifs. Sa formule est:

$$S_i^k(n, p) = \binom{n + ik - i + p}{ik + p} + A_2 \binom{n + ik - i + p - 1}{ik + p} + \dots \\ \dots + A_{i-k-i} \binom{n + p + 1}{ik + p} + \binom{n + p}{ik + p}$$

où les coefficients  $A_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, ik - i$ , sont indépendants de  $n$  et de  $p$  et entièrement calculés sous formes de déterminants en fonction de  $i$  et  $k$ .

*S. Bays.*

Ryser, H. J.: A combinatorial theorem with an application to latin rectangles. Proc. Amer. math. Soc. 2, 550—552 (1951).

Verf. beweist durch völlig elementare Schlüsse: Ist  $A$  eine Matrix mit  $r$  Zeilen und  $n$  Spalten, wobei in jeder Zeile  $k$  Einsen und  $n - k$  Nullen vorkommen, und kommen in der  $i$ -ten Spalte genau  $N(i)$  Einsen vor, wo  $k - n + r \leq N(i) \leq k$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  ist, so läßt sich  $A$  zu einer  $n$ -reihigen quadratischen Matrix so ergänzen, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau  $k$  Einsen vorkommen. Unter Heranziehung eines Satzes von D. König [Math. Ann. 77, 453—465 (1916)], nach welchem eine derartige quadratische Matrix Summe von  $k$  Permutationsmatrizen ist, gibt Verf. folgende Anwendung: Unter einem lateinischen Rechteck  $T$  mit  $r$  Zeilen und  $s$  Spalten werde eine aus den Zahlen  $1, 2, \dots, n$  gebildete Matrix verstanden, bei der jede dieser Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens einmal vorkommt. Insgesamt komme die Zahl  $i$  in  $T$  genau  $N(i)$ mal vor. Dann ist  $N(i) \geq r + s - n$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich  $T$  zu einem lateinischen Quadrat mit  $n$  Zeilen und Spalten ergänzen läßt.

*Alfred Stöhr.*

Mingot Shelly, Jose: Die Umfüllaufgabe von Typ  $2m, 2m - p, p$ . Gac. mat., Madrid 3, 88—91 (1951) [Spanisch].

L'A. étudie en détail le problème des transvasements: „On a trois vases  $A, B, C$ , de capacités respectives  $a = 2m, b, c (a > b \geq c)$ .  $A$  est plein,  $B$  et  $C$  sont vides. Par des transvasements entre  $A, B$  et  $C$  placer  $m$  litres dans  $A$  et  $m$  litres dans l'ensemble  $B, C$ , sans utiliser aucun récipient auxiliaire.“ Il suppose  $c = 3, b = 2m - 3$ . On sait qu'avec ces données le problème a toujours deux solutions. L'une des deux méthodes classiques est exposée. La succession des opérations est examinée dans les trois cas suivants: 1<sup>er</sup> cas:  $2m \equiv 0 \pmod{3}$ . Le nombre des transvasements est  $2m/3$  [en considérant l'état initial  $(2m, 0, 0)$  comme obtenu par un premier transvasement à partir de  $(0, 0, 0)$ ]. 2<sup>me</sup> et 3<sup>ème</sup> cas:  $2m \equiv \pm 1 \pmod{3}$ . Le nombre des transvasements est  $2m$  [avec la même supposition]. Tableaux, exemples, esquisse du cas où  $c$  est quelconque. Page 89, ligne 40, lire  $6n'$  au lieu de  $n' \cdot 3$ . — P. 90, ligne 17, lire  $(2m - 1)/3$  au lieu de  $(2n - 1)/3$ ; ligne 27 lire  $\frac{3}{2}$  au lieu de  $3$ ; ligne 40, lire  $\frac{6}{5}$  au lieu de  $6$ . — P. 91, ligne 1, lire  $2m$  au lieu de  $2m - 3$ ; ligne 30, lire  $7$  au lieu de  $1$ .

*Albert Sade.*

## Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

•Schreier, O. and E. Sperner: Introduction to modern algebra and matrix theory. Transl. by M. Davis and M. Hausner. New York: Chelsea 1951. VIII, 378 p. \$ 4,95.

• Enzyklopädie der Elementarmathematik. Unter Redaktion von P. S. Alexandroff, A. I. Markuševič und A. Ja. Chinčhin. Band II: Algebra. (Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der RSFSR.) Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 424 S. R. 12,40 [Russisch].



Ce deuxième tome comprend trois parties. La première (rédigée par A. I. Uzko v) débute par une étude élémentaire des vecteurs plans et des déterminants du second ordre. Ensuite sont introduits les vecteurs „numériques“ (définis par leurs coordonnées par rapport à une base invariable) et les déterminants d'ordre quelconque. Résolution de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnus dans le cas où le déterminant des coefficients est  $\neq 0$ . — Définition axiomatique des espaces vectoriels; dépendance linéaire; rang; résolutions des systèmes d'équation linéaires. — Métrique, produit scalaire et transformation linéaires dans les espaces à deux et trois dimensions. Réduction des formes quadratiques dans ces espaces. — La deuxième partie (rédigée par L. Ya. Okuniev) traite de l'anneau des polynômes et des corps de fonctions rationnelles. Dès le début, les polynômes d'une variable sont introduits sur un anneau, ce qui permet par la suite le passage aux polynômes à plusieurs variables. Signalons la démonstration complète du théorème fondamental de l'algèbre (pour le corps des nombres complexes) fondée sur le principe du minimum, ainsi que l'étude de la résolubilité des équations par radicaux, qui conduit à l'exposé des éléments de la théorie de Galois. — La troisième partie (rédigée par A. P. Domorial) traite des méthodes de résolution numériques et graphiques des équations. — Tout l'ouvrage est rédigé avec le plus grand soin. De nombreux exemples illustrent les applications pratiques des théories exposées. Ce livre constitue en même temps une excellente introduction aux théories axiomatiques de l'algèbre moderne.

Michel Lazard.

● Wade, Thomas L.: *The algebra of vectors and matrices*. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, Inc., 1951. 189 p. \$ 4,50.

Der Zweck dieses Buches wird am besten durch die Worte des Verf. gekennzeichnet. „It is concerned largely with an elementary exposition of the algebra of vectors and matrices, that exposition being articulated with the basic concepts of modern algebra in the broad sense, to wit, group, integral domain, field, ring, basis, dimension, and isomorphism. While the student using this text will be primarily learning about vectors and matrices, he will be getting that knowledge in the setting of modern algebraic theory. This book, therefore, is suitable for use in the first course of a sequence of courses devoted to modern algebraic theories.“ Auf Grund der leicht lesbaren, sehr breiten Darstellung, die allerdings in den Ergebnissen nicht weit führt, und einer großen Zahl von Beispielen und Übungen (mit Lösungen) eignet sich dieses Buch besonders auch zum Selbststudium. Für den Kenner wird es durch die vielen im Text enthaltenen Literaturhinweise wertvoll. Der Inhalt gliedert sich in die folgenden 11 Kapitel: 1. Basic concepts. 2. Vectors of two and three dimensions. 3. Vector methods in geometry; linear dependence of vectors. 4. Vectors of  $n$  dimensions. 5. Elementary properties of matrices. 6. Related and special matrices. 7. Groups, matrices, and transformations. 8. The characteristic equation of a matrix. 9. Rank of a matrix. 10. Matrices and algebraic forms. 11. Some applications of matrix algebra.

Friedrich Kasch.

● Ferrar, W. L.: *Finite matrices*. Oxford: Oxford University Press 1951. VI, 182 p. 17 s. 6 d.

„This book is for graduate students and for undergraduate students . . . (who need) . . . more matrix theory than a textbook of elementary properties will provide“. The text discusses in an adequate manner elementary properties, equivalence  $PAP^{-1}$ , equivalence  $PAP^*$ , of matrices the elements of which are from a field or from a ring of polynomials over a field. In addition there is a chapter which gives (standard) methods for finding some solutions of  $X^n = A$  ( $x^n$  analytic near eigenvalues of  $A$ ), by resolving the identity. Functions more complicated than  $x^n$  are also considered. The text is well-arranged and there is a good index. — The reviewer wishes to remark that many text-book writers confuse the ideas (1°) matrix and (2°) elements of a matrix by badly-chosen notation. If  $(a_{rs})$  is used to denote a matrix, its transpose cannot be written  $(a_{sr})$ .

J. L. Brenner.

Fage, M. K.: *Über symmetrische Matrizen*. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 3 (43), 153—156 (1951) [Russisch].

According to Kolmogoroff [Math. Ann. 112, 155—160 (1936); this Zbl. 12, 410] a  $n \times n$  matrix  $A = (a_{ij})$  is called generalized symmetric if there exists a non-singular diagonal matrix  $P = [p_1, \dots, p_n]$  such that  $AP$  is symmetric. In case the elements are real and all  $p_i > 0$ , the matrix is called „symmetric“. Kolmogoroff proved that every generalized symmetric matrix satisfies the condition that for any cycle  $(i_1, \dots, i_k)$  of length  $k \leq n$  we have  $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1} - a_{i_1 i_k} \dots a_{i_3 i_2} a_{i_2 i_1}$ . The author proved that Kolmogoroff's condition together with the condition that for any pair  $i$  and  $j$ ,  $a_{ij}, a_{ji}$  are either both zero or both



non-zero is a necessary and sufficient condition for the matrix  $(a_{ij})$  to be generalized symmetric. He also proved that the condition for a generalized symmetric matrix to be „symmetric“ is that for any pair  $i$  and  $j$ ,  $a_{ij}$  and  $a_{ji}$  have the same sign. The author has introduced some knowledge on linear graphs to prove the theorems.

*Loo-Keng Hua.*

**Drazin, M. P.: On diagonalizable and normal matrices.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 189—198 (1951).

In this article the author collects some known results concerning  $n \times n$  matrices over an algebraically closed field. The matrix  $A$  is diagonalizable if for some matrix  $P$ ,  $P^{-1}AP$  is diagonal; the matrix  $A$  is normal if  $AA^* = A^*A$ , where  $*$  is an automorphism of order 2 in the field, followed by transposition of the matrix. Every normal matrix is diagonalizable. The statements of the article will be clear to readers familiar with the Jordan canonical form; the proofs do not use this form explicitly, but are in the spirit of the derivation of this form in Murnaghan's Theory of group representations, Baltimore 1938, this Zbl. 22, 118. — The following new result appears. Let  $A_i$  be such that  $A_i^* = \varepsilon_i A_i$  ( $i = 1, 2$ ), where  $\varepsilon_i$  are scalars. Then if  $A_1 A_2 - A_2 A_1$  is nilpotent, it is 0, and  $A_1, A_2$  are diagonalizable. Other theorems of the paper concern projections, and null spaces of  $(A - \lambda E)^n$ . E. g.:  $A$  is diagonalizable if and only if  $(A - \lambda E)^2 \xi = 0$  implies  $(A - \lambda E) \xi = 0$  for every scalar  $\lambda$  and every vector  $\xi$ , also if and only if there exist scalars  $\lambda_j$ , matrices  $E_j$  such that  $\sum \lambda_j E_j = A$ ,  $\sum E_j = E$ ,  $E_j E_k = 0$  ( $j \neq k$ ). *J. L. Brenner.*

**Brenner, J. L.: Matrices of quaternions.** Pacific J. Math 1, 329—335 (1951).

Some of the classical theorems on characteristic roots and similarity transformations of matrices with complex elements are generalised here to matrices with real quaternion elements. The author points out that some of his results have been proved by different methods by H. C. Lee (this Zbl. 36, 298). *Shepherdson.*

**Potter, H. S. A.: The volume of a certain matrix domain.** Duke math. J. 18, 391—397 (1951).

Let  $S$  and  $T$  be two real positive definite symmetric matrices of orders  $m$  and  $n$  respectively. Let  $P$  be the real Euclidean space of the matrices  $X$  of  $m$  rows and  $n$  columns and  $H$  the bounded subspace of  $P$  for which the matrix  $T - X' S X$  is positive definite;  $X'$  denoting the transpose of  $X$ . The author obtains an expression for the euclidean volume of  $H$ . *K. G. Ramanathan.*

**Bell, James H.: Families of solutions of the unilateral matrix equation.** Proc. Amer. math. Soc. 1, 151—159 (1950).

Jede der beiden folgenden Bedingungen reicht dafür hin, daß die Gleichung I:  $\sum R_m X^m = 0$  unendlich viele  $(n, n)$ -Lösungen  $X$  mit Elementen aus einem gegebenen Körper  $F$  der Charakteristik 0 besitzt; dabei sind die  $R_m$  ( $0 \leq m \leq s$ ) gegebene  $(n, n)$ -Matrizen mit Elementen aus  $F$ . (1) Es gibt zwei zueinander ähnliche Lösungen  $X_1 \neq X_2$ . (2) Es ist  $|\sum R_m \lambda^m| = 0$  identisch in der skalaren Unbestimmten  $\lambda$ , und I besitzt mindestens eine Lösung  $X_1$ . Im Fall (1) gibt es sogar unendlich viele Lösungen  $X_i$ , die derselben Familie angehören [in dem Sinn, daß die aus  $\lambda E - X_i$  durch Multiplikation mit einem passenden unimodularen Linksfaktor  $U(\lambda)$  entstehende Dreiecks-Normalform  $D_i(\lambda)$  eine von  $i$  unabhängige Hauptdiagonale hat]; umgekehrt folgt aus der Existenz einer unendlichen Familie von Lösungen, daß (1) erfüllt ist. — Genau dann sind alle zu einer speziellen Lösung  $X_1$  in  $F$  ähnlichen Matrizen ebenfalls Lösungen von I, wenn das Minimalpolynom  $\varphi(\lambda)$  von  $X_1$  ein gemeinsamer Teiler aller  $n^2$  Elemente von  $\sum R_m \lambda^m$  ist. Dies folgt aus der Bemerkung, daß die genannte Bedingung notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von  $\sum R_m \times X^m = 0$  ist [ $A \times B$  bezeichnet das Kroneckersche Produkt  $(A b_{ij})$ ]. *Helmuth Wielandt.*

**Bell, James H.: The solution of a unilateral direct product matrix equation.** Proc. Amer. math. Soc. 1, 777—781 (1950).



In der vorstehend besprochenen Note trat bei der Behandlung der Gleichung I:  $\Sigma R_m X^m = 0$  die Hilfgleichung II:  $\Sigma R_m \times X^m = 0$  auf. Jetzt wird die beide Fälle umfassende Gleichung III:  $\Sigma A_m \times (K_m X^m) = 0$  betrachtet, in der alle  $A_m$   $r$  Zeilen und  $p$  Spalten, alle  $K_m$  ( $0 \leq m \leq s$ )  $t$  Zeilen und  $n$  Spalten haben. III ist gleichwertig zu dem System IV:  $\Sigma a_{ij}^{(m)} K_m X^m = 0$  von  $rp$  Gleichungen des Typus I. Ist insbesondere  $t = n$ , so ist notwendig für die Lösbarkeit von III, daß die  $rp$  Determinanten  $D_{ij} = |\Sigma a_{ij}^{(m)} K_m \lambda^m|$  einen gemeinsamen Teiler  $D$  des Grades  $n$  mit Koeffizienten aus dem betrachteten Körper  $F$  besitzen. Falls außer  $t = n$  auch  $r = p$  gilt, läßt sich der von Ingraham (dies. Zbl. 25, 98) zur Lösung von I (d. h. von III mit  $r = p = 1$ ) entwickelte Algorithmus übertragen. Dies beruht darauf, daß auch für  $r = p > 1$  genau dann  $X$  eine Lösung von III ist, wenn  $\Sigma A_m \times (K_m \lambda^m)$  von rechts durch  $E \times (\lambda E - X)$  teilbar ist.

Helmut Wielandt.

**Bell, James H.: A note on the solution of the unilateral matrix equation.** Proc. Amer. math. Soc. 2, 553—557 (1951).

Durch zwei einfache Bemerkungen wird die Gleichung V:  $\Sigma R_m X^m = 0$  mit rechteckigen  $(k, l)$ -Matrizen  $R_m$  auf die schon eingehend behandelte Gleichung I:  $\Sigma R_m^* X^m = 0$  mit quadratischen Koeffizientenmatrizen zurückgeführt. (1) Ist  $k < l$ , so ergänzt man  $R_m$  durch  $l - k$  Nullzeilen zu einer quadratischen Matrix  $R_m^*$ . (2) Ist  $k > l$ , so bestimmt man eine unimodulare Matrix  $U(\lambda)$  derart, daß die  $k - l$  letzten Zeilen von  $U(\lambda) \Sigma R_m \lambda^m = \Sigma S_t \lambda^t$  verschwinden, und versteht unter  $R_m^*$  die von den ersten  $l$  Zeilen von  $S_m$  gebildete quadratische Matrix. In beiden Fällen hat I dieselben Lösungen wie V. Damit ist auch die Gleichung II:  $\Sigma R_m \times X^m = 0$  der Theorie der Gleichung I zugänglich geworden, da das in der vorigen Besprechung erwähnte zu II gleichwertige System IV in eine einzige Gleichung der Form V zusammengefaßt werden kann.

Helmut Wielandt.

**Feller, William and George E. Forsythe: New matrix transformations for obtaining characteristic vectors.** Quart. appl. Math. 8, 325—331 (1951).

Kennt man von einer  $(n, n)$ -Matrix  $A$  einen Eigenwert  $\lambda$  und je eine zugehörige Eigenzeile  $R$  und Eigenspalte  $C$ , so kann man bekanntlich die Berechnung weiterer Eigenwerte erleichtern, indem man von  $A$  zu  $B = UAU^{-1}$  übergeht und die transformierende Matrix  $U$  auf Grund der Kenntnis von  $R$  und  $C$  so wählt, daß  $B$  in irgendeinem Sinn einfacher ist als  $A$ . Verff. verallgemeinern einige der bisher benutzten Matrizen  $U$  durch Einführung dreier Parameter. Für welche Werte der Parameter die nicht ganz durchsichtigen Formeln wirklich eine Vereinfachung von  $A$  ergeben, dürfte schwer allgemein festzustellen sein. Jedoch wird ein bemerkenswerter neuer Sonderfall hervorgehoben: Sind die Komponenten von  $R$  und  $C$  auf  $\Sigma r_v c_v = 1$  normiert, so zerfällt  $B$  vollständig in zwei Teilmatrizen der Grade  $n - 1$  und  $1$ , sobald man  $U = \begin{pmatrix} (\delta_{ij} - \Gamma c_i r_j) & (-\gamma c_i - \Gamma c_i r_n) \\ (r_j) & r_n \end{pmatrix}$  ( $i, j = 1, \dots, n - 1$ ) wählt; dabei ist  $\Gamma = 1 - \gamma c_n$  gesetzt, und  $\gamma$  ist nur durch die Forderung eingeschränkt, daß die lineare Gleichung  $\Gamma(1 - \varrho r_n) - \gamma \varrho$  mindestens eine Lösung  $\varrho$  besitzen soll. Ist insbesondere  $c_v = r_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ), was bei symmetrischem  $A$  vorausgesetzt werden darf, so ist  $U$  sowohl für  $\gamma = (c_n + 1)^{-1}$  wie für  $\gamma = (c_n - 1)^{-1}$  eine orthogonale Matrix (mit vorgeschriebener letzter Zeile  $R$ ); daher ist  $UAU^{-1}$  zugleich mit  $A$  symmetrisch. — Zwecks Erhöhung der Allgemeinheit verbinden Verff. ihre Ähnlichkeitstransformationen von vornherein mit der Verschiebung des gegebenen Eigenwerts  $\lambda$  um eine beliebig vorgeschriebene Differenz  $t$ , welche bekanntlich durch Übergang von  $A$  zu  $A - tCR$  bewirkt werden kann. [Nicht verwertet wird hier die erhebliche Vergrößerung der Anpassungsfähigkeit, welche durch Benutzung allgemeinerer Subtrahenden vom Range 1 an Stelle von  $tCR$  zu erzielen ist; vgl. H. Wielandt, Math. Z. 50, 93—143 (1944).]

Helmut Wielandt.



**Afriat, S. N.:** Bounds for the characteristic values of matrix functions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 81—84 (1951).

Es seien  $A$  eine Matrix und  $\alpha$  und  $\beta$  der größte und der kleinste Eigenwert der nichtnegativen hermiteschen Matrix  $A'A$ . Verf. bezeichnet  $\alpha^{\frac{1}{2}} = |A|_*$  und  $\beta^{\frac{1}{2}} = |A|_*$  als oberen und unteren Betrag von  $A$ , notiert die für die Beträge von  $A+B$ ,  $AB$  und  $A^{-1}$  geltenden Rechenregeln und stellt mit Hilfe des oberen Betrages Konvergenzkriterien für unendliche Reihen und Produkte von Matrizen auf. Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  gilt  $|A|_* \leq |\lambda| \leq |A|_*$ ; hieraus ergeben sich Abschätzungen für die Eigenwerte von Matrixfunktionen  $f(A)$ . (Der wesentliche Inhalt der Note ist wohl bekannt, sogar für den allgemeinen Fall der linearen Operatoren in normierten Räumen.)  
*Helmut Wielandt.*

**Karush, W.:** An iterative method for finding characteristic vectors of a symmetric matrix. Pacific J. Math. 1, 233—248 (1951).

Untersucht wird das folgende Iterationsverfahren zur Bestimmung des kleinsten Eigenwerts und eines zugehörigen Eigenvektors für eine gegebene reelle symmetrische  $n$ -reihige Matrix  $S$ . Man wählt eine natürliche Zahl  $s > 1$  und einen Ausgangsvektor  $x_0$ , für welchen  $x_0, Sx_0, \dots, S^{s-1}x_0$  linear unabhängig sind; man bezeichnet für  $i = 0, 1, 2, \dots$  mit  $\mathcal{U}_i$  den von  $x_i, Sx_i, \dots, S^{s-1}x_i$  aufgespannten Vektorraum und berechnet den kleinsten Eigenwert  $\nu_i$  der Projektion  $S_i$  von  $S$  auf  $\mathcal{U}_i$ , also die kleinste Wurzel von  $\varphi_i(\nu) = |(x_i, S^{\alpha+\beta+1}x_i) - \nu(x_i, S^{\alpha+\beta}x_i)| = 0$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, s-1$ ); schließlich bestimmt man  $x_{i+1} \in \mathcal{U}_i$  als denjenigen Eigenvektor von  $S_i$  zu  $\nu_i$ , welcher die Gestalt  $x_{i+1} = x_i + \eta_i$  mit  $(x_i, \eta_i) = 0$  hat. Dann konvergiert  $\nu_i \rightarrow \lambda_1$ , den kleinsten an  $x_0$  beteiligten Eigenwert von  $S$ , und  $x_i \rightarrow y_1$ , einen zugehörigen Eigenvektor.  $\varphi_i(\nu)$  kann in übersichtlicher Weise durch Orthogonalisierung der Vektorfolge  $x_i, Sx_i, \dots, S^{s-1}x_i$  berechnet werden (als charakteristische Gleichung des  $\nu$ -ten Abschnitts einer zu  $S$  ähnlichen Matrix, die nur in der Diagonale und den beiden benachbarten Schrägreihen von 0 verschiedene Elemente hat); weiter kann dann (nach Berechnung von  $\nu_i$ ) auch  $x_{i+1}$  ohne Auflösung eines linearen Gleichungssystems explizit hingeschrieben werden.

*Helmut Wielandt.*

**Karpelevič, F. I.:** Über die charakteristischen Wurzeln von Matrizen mit nicht-negativen Elementen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 15, 361—383 (1951) [Russisch].

Es sei  $M_n$  die Menge der charakteristischen Wurzeln aller  $n$ -reihigen Matrizen mit nicht-negativen Elementen, deren sämtliche charakteristischen Wurzeln dem Betrag nach  $\leq 1$  sind. Es wird die Aufgabe gelöst,  $M_n$  als Punktmenge der komplexen Ebene zu kennzeichnen. Unter Benutzung einer früheren Arbeit [N. Dmitriev und E. Dynkin, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 167—184 (1946)], in der diese Aufgabe bereits zum Teil (insbesondere für  $n \leq 5$ ) gelöst worden war, ergibt sich:  $M_n$  ist symmetrisch zur reellen Achse. Mit  $|z| = 1$  hat  $M_n$  die Punkte  $e^{2\pi ia/b}$  ( $0 \leq a < b \leq n$ ) gemeinsam. Der Rand von  $M_n$  besteht aus diesen Punkten und gewissen Verbindungskurven dieser Punkte in ihrer Reihenfolge auf  $|z| = 1$ . Für  $n > 3$  haben diese Verbindungskurven Parameterdarstellungen von einer der Formen I.  $\lambda^a(\lambda^p - t)^r = (1 - t)^r$  oder II.  $(\lambda^b - t)^d = (1 - t)^d \lambda^a$  mit  $0 \leq t \leq 1$ . Dabei sind  $b, d, p, q, r$  natürliche Zahlen, die sich folgendermaßen bestimmen: Seien  $e^{2\pi ia'/b'}$  und  $e^{2\pi ia''/b''}$  die Endpunkte des betreffenden Bogens, gerechnet im positiven Umlaufsinn. Dann sind die beiden Fälle möglich a)  $b'' \left[ \frac{n}{b''} \right] \geq b' \left[ \frac{n}{b'} \right]$

oder b)  $b'' \left[ \frac{n}{b''} \right] \leq b' \left[ \frac{n}{b'} \right]$ . Gilt für einen Bogen a), so gilt für den konjugiert-komplexen Bogen b) und umgekehrt. Wegen der Symmetrie bezüglich der reellen Achse genügt es daher, a) zu betrachten. Sei  $r_1 = b''$ ,  $r_2 = a''$ , und seien  $r_3, r_4, \dots$  die Reste, die sich beim Euklidischen Algorithmus, ausgehend von  $r_1, r_2$ , ergeben. Ist  $[n/b''] = 1$



und  $r_{2s} = 1$ , so hat die Kurve die Parameterdarstellung I mit  $r - r_{2s-1}$ ,  $a'' \cdot p \equiv 1 \pmod{b''}$  ( $0 < p < b''$ ) und  $a'' \cdot q \equiv -r \pmod{b''}$  ( $0 \leq q < b''$ ). Im andern Fall hat die Parameterdarstellung die Form II mit  $d = [n/b'']$ ,  $b = b''$  und  $a'' \cdot q \equiv -1 \pmod{b''}$  ( $0 < q < b''$ ).

Rudolf Kochendörffer.

**Drazin, M. P.:** Some generalizations of matrix commutativity. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 222—231 (1951).

Let  $A_1, \dots, A_m$  be a set of  $n \times n$  matrices. — The author defined inductively that  $L^0 = \{A_1, \dots, A_m\}$ ,  $L^{(k)} = \{A_i C^{(k-1)} - C^{(k-1)} A_i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $C^{(k-1)} \in L^{(k-1)}$ ), and called  $L^{(k)}$  the set of  $k$ -th commutators of  $L^0$ . He proved first that the eigenvalues  $\alpha_k^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(m)}$  can be so arranged that any polynomial  $\varrho(A_1, \dots, A_m)$  in  $A_1, \dots, A_m$  has eigenvalues  $\varrho(\alpha_k^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(m)})$  ( $k = 1, \dots, n$ ), if and only if  $\varrho(A_1, \dots, A_m) C^{(k)}$  is nilpotent for any polynomial  $\varrho(A_1, \dots, A_m)$  and for any  $C^{(k)} \in L^{(k)}$ . This is a generalization of a result of N. H. McCoy [Bull. Amer. math. Soc. 42, 592—600 (1936); this Zbl. 15, 55]. — He proved also that if there is an integer  $k$  such that  $C^{(k)} = 0$  for all  $C^{(k)} \in L^{(k)}$ , then for every eigenvector  $\xi$  of any polynomial  $\varrho(A_1, \dots, A_m)$  in  $A_1, \dots, A_m$  it is possible to construct a polynomial  $q(A_1, \dots, A_m)$  such that  $q(A_1, \dots, A_m)\xi$  is a common eigenvector of  $A_1, \dots, A_m$  having the same eigenvalue for  $\varrho(A_1, \dots, A_m)$  as  $\xi$  has. Finally, he proved that if there is an integer  $k$  such that  $C^{(k)} = 0$  for all  $C^{(k)} \in L^{(k)}$ , then there is an integer  $k'$  such that all  $k'$ -th commutator of any set of polynomials in  $A_1, \dots, A_m$  are zero.

Loo-Keng Hua.

**Shepherdson, J. C.:** Inverses and zero divisors in matrix rings. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 71—85 (1951).

L'A. se propose de construire effectivement un anneau  $R$ , tel que l'anneau des matrices carrées  $n \times n$  sur  $R$  possède au moins un élément  $A$  inversible à droite et diviseur de zéro à gauche ( $AB = I$ ,  $AX = 0$ ,  $X \neq 0$ ). Il suffit pour cela:  $AB = I$ ,  $BA \neq I$ , puisque  $A(BA - I) = 0$ , et on peut se borner au cas  $n = 2$  qui donne à résoudre le système:

$$E_1 \equiv a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} - 1 = 0; \quad E_2 \equiv a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0$$

$$E_3 \equiv a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0; \quad E_4 \equiv a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} - 1 = 0$$

tandis que le système:

$$F_1 \equiv b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} - 1 = 0; \quad F_2 \equiv b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 0$$

$$F_3 \equiv b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} = 0; \quad F_4 \equiv b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} - 1 = 0$$

ne doit pas être vérifié. La méthode utilise l'anneau  $C[x_i]$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) à coefficients entiers et à multiplication non commutative. L'anneau cherché est alors l'anneau  $R$  des classes résiduelles suivant l'idéal bilatère engendré par les  $E_i$ ; dans  $R$ , les classes des  $x_i$  vérifient bien le premier système, sans vérifier le deuxième. La difficulté consiste à obtenir une construction effective de l'anneau  $R$ , c'est à dire un procédé permettant d'arriver au bout d'un nombre fini d'opérations à une forme normale pour toute classe de polynômes, modulo l'idéal  $(E_i)$ . Ce procédé consiste dans le cas présent à remplacer dans chaque polynôme tous les  $a_{ij}b_{ij}$  par leurs expressions tirées des équations  $E_i = 0$ . Il est indiqué par l'A. pour un type d'équations généralisant celles du problème qu'il a en vue. Dans ce problème, l'anneau  $R$  est sans diviseurs de zéro.

Léonce Lesieur.

**Ostrowski, Alexander:** Über das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen. Compositio math. 9, 209—226 (1951).

Verf. beweist (und verallgemeinert) die folgenden — auch im Hinblick auf die Anwendungen — wichtigen Sätze.  $D$  sei eine Determinante  $n$ -ter Ordnung mit reellen oder komplexen Elementen  $a_{\mu\nu}$ , wobei alle  $a_{\nu\nu} = 0$ .  $\sum_{\nu}^n$  bezeichne abkürzend  $\sum_{\nu=1}^n$  mit der Nebenbedingung



$v \neq \mu$ ; ferner sei  $\alpha_{\mu\nu} = |a_{\mu\nu}|$ ,  $Z_\mu = \sum_\nu \alpha_{\mu\nu}$ ,  $S_\mu = \sum_\nu \alpha_{\nu\mu}$  und für jedes  $\alpha$  aus dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$   $M_\mu^{(\alpha)} \equiv Z_\mu^\alpha S_\mu^{1-\alpha}$ . Satz 1:  $D \neq 0$ , wenn  $\alpha_{\mu\mu} > M_\mu^{(\alpha)}$  für ein  $\alpha \in [0, 1]$  und für  $\mu = 1, \dots, n$ . Der Fall  $\alpha = 1$  (und damit auch  $\alpha = 0$ ) ist von J. Hadamard bewiesen worden (Leçons sur la propagation des ondes, Paris 1903, S. 13–14; für weitere Literaturhinweise s. O. Taussky-Todd, dies. Zbl. 36, 13). Eine abgeschwächte, aber für numerische Berechnungen leichter zu handhabende Aussage ergibt sich, wenn die Schranken  $M_\mu^{(\alpha)}$  ersetzt werden durch  $N_\mu^{(\alpha)} \equiv \alpha Z_\mu + (1-\alpha) S_\mu \geq M_\mu^{(\alpha)}$ . — Eine Verschärfung von Satz 1 enthält Satz 2:  $D \neq 0$ , wenn  $\alpha_{\nu\nu} \alpha_{\mu\mu} > M_\nu^{(\alpha)} M_\mu^{(\alpha)}$  für ein  $\alpha \in [0, 1]$  und für alle Indexpaare  $\nu, \mu$  mit  $\nu \neq \mu$ . Den Fall  $\alpha = 1$  (und damit auch  $\alpha = 0$ ) hat Verf. schon früher (vgl. dies. Zbl. 17, 290) erledigt. Sind alle  $a_{\mu\nu}$  reell, so gilt unter den Voraussetzungen der Sätze 1 oder 2 genauer:  $\operatorname{sgn} D = \operatorname{sgn} \prod_{\nu=1}^n a_{\nu\nu}$ .

— Satz 1 ergibt unmittelbar Satz 3: Für jedes  $\alpha \in [0, 1]$  und für  $\mu = 1, \dots, n$  liegt jeder Eigenwert der Matrix von  $D$  innerhalb oder auf dem Rande eines der  $n$  Kreise  $|\lambda - a_{\mu\mu}| \leq Z_\mu^\alpha S_\mu^{1-\alpha} = M_\mu^{(\alpha)}$ . Spezialfälle für  $\alpha = 1$  und  $\alpha = 0$  sind von S. Gerschgorin 1931 (s. dies. Zbl. 3, 1) entdeckt und seitdem wiederholt wiedergefunden worden. — Aus Satz 3 folgt Satz 4: Für jedes  $\alpha \in [0, 1]$  ist der absolute Betrag jedes Eigenwertes der Matrix von  $D$  höchstens gleich  $\max_{\mu=1, \dots, n} (\alpha_{\mu\mu} + Z_\mu^\alpha S_\mu^{1-\alpha})$ .

An Stelle dieser Schranke können auch (weniger scharf) die Schranken  $\max_{\mu=1, \dots, n} (\alpha_{\mu\mu} + Z_\mu)^\alpha \cdot (\alpha_{\mu\mu} + S_\mu)^{1-\alpha}$  und  $\max_{\mu=1, \dots, n} (\alpha_{\mu\mu} + \alpha Z_\mu + (1-\alpha) S_\mu)$  treten. Die letztere Schranke mit  $\alpha = \frac{1}{2}$

ist 1937 von W. V. Parker (dies. Zbl. 17, 290) aufgestellt, die andere (ebenfalls für  $\alpha = \frac{1}{2}$ ) von ihm vermutet und von E. W. Barankin [Bull. Amer. math. Soc. 51, 767–770 (1945)] bewiesen worden. — Ebenso wie aus Satz 1 der Satz 3 folgt, führt Satz 2 auf Satz 5: Für jedes  $\alpha \in [0, 1]$  und für alle Indexpaare  $\nu, \mu$  mit  $\nu \neq \mu$  liegt jeder Eigenwert der Matrix von  $D$  innerhalb oder auf dem Rande eines der  $n(n-1)/2$  Lemniskatengebiete  $|\lambda - a_{\nu\nu}| |\lambda - a_{\mu\mu}| \leq (Z_\nu Z_\mu)^\alpha (S_\nu S_\mu)^{1-\alpha}$ . Für  $\alpha = 1$  und  $\alpha = 0$  von A. Brauer 1947 bewiesen (s. dies. Zbl. 29, 337). — Der Grenzfall  $D = 0$ , falls die Ungleichungen des Satzes 1 abgeschwächt werden zu  $\alpha_{\mu\mu} \geq M_\mu^{(\alpha)}$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ), steht im Zusammenhang mit der Zerlegung von  $D$  in irreduzible und total irreduzible Komponenten. Dabei heiße  $D$  irreduzibel, wenn es keine kogrediente Umordnung (= gleichnamige Permutation der Zeilen und Spalten) gibt, die  $D$  in die Gestalt  $\begin{pmatrix} P & 0 \\ U & Q \end{pmatrix}$  mit quadratischen Matrizen

$P, Q$  überführt, und  $D$  heiße total irreduzibel, wenn es keine kogrediente Umordnung gibt, die  $D$  in  $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$  transformiert ( $0 = \text{Nullmatrix}$ ). — Für das Folgende kann  $\alpha$  im offenen Intervall  $(0, 1)$  gewählt werden (zu  $\alpha = 1$  und  $\alpha = 0$  vgl. O. Taussky-Todd, loc. cit.). Satz 6: Ist  $D$  total irreduzibel und gleich Null unter den Voraussetzungen  $\alpha_{\mu\mu} \geq M_\mu^{(\alpha)}$  für ein  $\alpha \in (0, 1)$ , so gilt in diesen sämtlichen Relationen das Gleichheitszeichen, und  $D$  ist auch irreduzibel schlechthin. — Satz 7: Ist über die Voraussetzungen von Satz 6 hinaus  $\alpha_{\mu\mu} \geq N_\mu^{(\alpha)}$ , so gilt in allen diesen Relationen das Gleichheitszeichen; für jedes  $\mu$  ist  $Z_\mu = S_\mu$ ,  $D$  ist irreduzibel schlechthin und läßt sich nach Multiplikation der Zeilen und Spalten mit geeigneten Faktoren vom absoluten Betrage Eins in eine Determinante überführen, bei der sämtliche Zeilensummen (und damit auch die Spaltensummen) Null sind. — Die Beweise sind kurz, sehr scharfsinnig und nicht immer frei von Kunstgriffen. Zur Anordnung der Beweise: Im Anschluß an den Beweis von Satz 1 (und damit der Sätze 3 und 4) folgen zwei Beispiele und dann unter Heranziehung zweier Sätze von O. Taussky-Todd (loc. cit.) die Beweise der Sätze 6 und 7. Satz 2 erhält für den Beweis eine andere Formulierung, in der an Stelle von  $D$  eine Determinante  $D_0$  tritt, auf die Satz 1 direkt anwendbar ist. Anschließend wird die Trennung der Eigenwerte durch Kreisgebiete des Satzes 3 diskutiert und an zwei Beispielen erläutert. Sodann folgen Verschärfungen bei Benutzung der Lemniskatengebiete aus Satz 5; insbesondere wird gezeigt, daß ein solches Gebiet durch höchstens zwei Kreise überdeckt werden kann [also statt der  $n$  Kreise deren  $n(n-1)/2$  zu benutzen sind], und daß diese Abgrenzungen dennoch sehr genaue Resultate liefern; hierzu zwei Beispiele, in denen zur Vereinfachung sogar noch  $M_\mu^{(\alpha)}$  durch  $N_\mu^{(\alpha)}$  ersetzt worden ist. — In einem letzten Abschnitt wird die günstigste Wahl von  $\alpha$  untersucht. Durch Konstruktion geeigneter konvexer Hüllkurven ist bei den Schranken  $\max_{\mu} (\alpha_{\mu\mu} + Z_\mu)^\alpha$

$\cdot (\alpha_{\mu\mu} + S_\mu)^{1-\alpha}$  und  $\max_{\mu} (\alpha_{\mu\mu} + N_\mu^{(\alpha)})$  für die absoluten Beträge der Eigenwerte eine systematische Diskussion möglich.

Herbert Bilharz.



• **Springer, T. A.:** Über symplektische Transformationen. (Diss.) Leiden: 1951. 35 S. [Holländisch] mit französ. Zusammenfassg.

Die Klasseneinteilung der bilinearen Formen in  $n$  Veränderlichen mit Koeffizienten aus einem kommutativen Körper  $K$  führt bei der allgemeinen linearen Gruppe  $GL_n(K)$  auf die klassischen Normalformen einer quadratischen Matrix [vgl. z. B. van der Waerden, *Moderne Algebra II*]. Verf. behandelt und löst das entsprechende Problem für die symplektische Gruppe  $Sp_n(K)$ , deren Transformationen eine gegebene alternierende Bilinearform invariant lassen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Charakteristik von  $K$  verschieden von zwei sei. — Ist  $f$  ein Polynom in  $X$  vom Grade  $g$  mit Koeffizienten aus  $K$  und setzt man  $f(X) = X^g f(X^{-1})$ , dann läßt sich beweisen, daß für ein zu einer symplektischen Transformation gehöriges Minimalpolynom die Beziehung  $f = \pm \bar{f}$  gelten muß. Die Klasseneinteilung dieser Transformationen führt dann auf zwei Fälle: 1.  $f = (p\bar{p})^h$ , wo  $p$  irreduzibel und  $p = \pm \bar{p}$ ; 2.  $f = q^m$  mit  $q$  irreduzibel und  $q = \pm \bar{q}$ . Im ersten Falle führt die weitere Klassifikation der symplektischen Transformationen  $u$  genau so wie bei der allgemeinen linearen Gruppe  $GL_n(K)$  auf die verschiedenen Normalformen von  $u$ . Im zweiten Falle jedoch wird die weitere Klassifikation durch das Äquivalent-Sein gewisser Hermitescher und quadratischer Formen bestimmt.

Roland W. Weitzenböck.

**Murnaghan, Francis D.:** A generalization of Hermite's law of reciprocity. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **37**, 439—441 (1951).

Das Hermitesche Reziprozitätsgesetz in der Theorie der binären Formen besagt, daß die Anzahl  $C_{n,m}$  der linear-unabhängigen Komitanten einer Form  $n$ -ten Grades  $f_n$ , die in den Koeffizienten von  $f_n$  vom Grade  $m$  sind, gleich der Anzahl  $C_{m,n}$  bei einer Form  $f_m$  ist:  $C_{n,m} = C_{m,n}$ . Diese Symmetrie bez.  $m$  und  $n$  kann in der Darstellungstheorie mit Hilfe von Littlewoodschen  $S$ -Funktionen [*Philos. Trans. roy. Soc. London. Ser. A* **239**, 305—365 (1944)] ausgedrückt werden durch  $\{m\} \otimes \{n\} = \{n\} \otimes \{m\}$ . Es wird gezeigt, wie diese Gleichung aus einer einfacheren zu erhalten ist und wie man schrittweise das Produkt  $\{m\} \otimes \{1^n\}$  berechnen kann.

Roland W. Weitzenböck.

**Babbage, D. W.:** An algebro-geometric interpretation of the associated forms of a binary form. *Proc. London math. Soc., III. Ser.* **1**, 170—177 (1951).

Soient  $n + 2$  points  $\{P_{ij}\}$  de  $S_n$ , les points de toute  $(n + 1)$ -ple étant linéairement indépendants. On considère les  $\infty^{n-1}$  courbes  $C_n$  rationnelles et normales de  $S_n$  qui passent par les  $\{P_{ij}\}$ . Pour chaque  $C_n$  soit  $\mathfrak{D}_s$  ( $s \geq 2$ ) l'ensemble des points représentés sur  $C_n$  par la Schwesterform  $u_s$  [Gordan, *Vorlesungen über Invariantentheorie II* (Leipzig 1887), pp. 354—360] de celle qui donne les  $\{P_{ij}\}$ . Quand  $C_n$  varie,  $\mathfrak{D}_s$  décrit une hypersurface  $\mathfrak{H}_s$  dont l'équation, si on exprime les points de  $S_n$  au moyen d'un système surabondant de coordonnées  $y_0, \dots, y_{n+1}$  avec  $\sum y_i = 0$ , peut prendre la forme  $\sum y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_s} = 0$ , où  $(i_1, \dots, i_s)$  parcourt les combinaisons sans répétition des indices  $0, 1, \dots, n + 1$ . Ces surfaces donnent une interprétation pour les Schwesterformen de Gordan.

Germán Ancochea.

**Wolibner, W.:** Sur un polynôme d'interpolation. *Colloq. math.* **2**, 136—137 (1951).

Gegeben in der Ebene  $n$  Punkte  $P_k = (a_k, b_k)$ ,  $a_{k-1} < a_k$ ;  $b_{k-1} \neq b_k$ . Es wird ein Polynom konstruiert, dessen Graph durch alle  $P_k$  hindurchgeht und das in jedem Intervall  $(P_{k-1}, P_k)$  monoton ist.

Friedrich Wilhelm Levi.

**Popov, B. S.:** Sur une équation algébrique proposée par Pitoiset. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **37**, 17—19 (1951).

Sei  $P_n(x) = x^n + a_1 p x^{n-2} + a_2 p^2 x^{n-4} + \dots$  mit  $a_k = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$  und seien  $p, q$  beliebige Zahlen. In den *C. r. Acad. Sci., Paris* **231**, 745 (1950) wird mit-



geteilt, daß Charles Pitoiset die Lösungen der Gleichung  $P_n(x) + q = 0$  gefunden hat, ohne daß diese jedoch angegeben werden. Verf. zeigt, daß diese Gleichung die Lösungen  $x = 2i\sqrt{p} \cos \frac{(2k+1)\pi - \arccos A_n}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  mit  $A_n - \frac{1}{2} i^{-n} p^{n/2} q$  besitzt. Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Beziehung  $P_n(x) = 2i^n p^{n/2} T_n(x/2i\sqrt{p})$ , wobei die  $T_n$  die Tschebyscheffschen Polynome sind, deren bekannte Eigenschaften benutzt werden. Friedrich Kasch.

## Gruppentheorie:

Evans, Trevor: On multiplicative systems defined by generators and relations.

I. Normal form theorems. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 637—649 (1951).

Eine nicht notwendig assoziative Gruppe (= loop) ist eine Menge  $G$  von Elementen, die durch drei Operationen: Multiplikation  $xy$ , Linksdivision  $x \setminus y$  und Rechtsdivision  $x / y$  verbunden sind, welche Operationen den offenbaren Bedingungen genügen müssen. Ein System  $R$  von Relationen zwischen Erzeugenden einer solchen Gruppe heiße ein System geschlossener Relationen, wenn (a) jede Relation eine der Formen:  $xy = z$ ,  $x \setminus y = z$  oder  $x / y = z$  hat, (b)  $R$  mit einer der drei Relationen  $xy = z$ ,  $x \setminus z = y$ ,  $z / y = x$  auch die beiden anderen enthält, (c) keine Paare von Relationen  $xy = z$  und  $xy = z'$  mit  $z \neq z'$  in  $R$  vorkommen, (d) die Relationen  $x1 = x$  und  $1x = x$  in  $R$  vorkommen [1 wird unter die Erzeugenden aufgenommen]. Definiert man dann elementare Reduktionen und Erweiterungen von Worten in den Erzeugenden in naheliegender Weise, so kann Verf. den schönen Satz beweisen, daß jede Äquivalenzklasse ein und nur ein kürzestes Wort enthält — natürlich unter der Voraussetzung, daß die Relationen in der eben charakterisierten geschlossenen Form gegeben sind. Auf Grund dieses Satzes kann dann Verf. eine neue Herleitung der Batesschen Theorie der Untergruppen (dies. Zbl. 35, 12) geben.

Reinhold Baer.

Bruck, R. H.: An extension theory for a certain class of loops. Bull. Amer. math. Soc. 57, 11—26 (1951).

Unter einem Paar  $(G, M)$  wird verstanden eine Quasigruppe  $M$  mit neutralem Element 1 (loop), für deren Elemente  $m$  ein Produkt  $gm$  mit den Elementen einer abelschen Gruppe  $G$  so erklärt ist, daß die Gleichungen  $g1 = g$ ,  $(gg')m = (gm)(g'm)$ ,  $(gm)m' = g(mm')$  gelten. Eine  $(G, M)$ -Erweiterung wird erklärt als ein Paar  $(E, \theta)$  bestehend aus einer Quasigruppe  $E$  mit neutralem Element und einem Homomorphismus  $\theta$  von  $E$  auf  $M$  so, daß der Kern  $K$  von  $\theta$  (bestehend aus den  $x$  mit  $x\theta = 1$ ) im Assoziator von  $E$  liegt [d. h.  $(xy)z = x(yz)$  falls  $x, y$  oder  $z$  in  $K$ ] sowie das Zentrum  $G$  hat und daß  $ge = e(gm)$  für  $g \in G$ ,  $e \in E$ ,  $m = e\theta \in M$  gilt. Man erhält auf diese Weise alle  $E$ , welche unter den angegebenen Eigenschaften des Kernes auf  $M$  homomorph abgebildet sind. Im folgenden wird das Paar  $(G, M)$  festgehalten. Die Erweiterungen  $(E, \theta)$  und  $(E', \theta')$  heißen äquivalent, wenn es einen Isomorphismus  $\pi$  von  $E$  auf  $E'$  mit  $\theta = \pi\theta'$  und  $g\pi = g$  für  $g \in G$  gibt. Das Produkt  $(E_1, \theta_1) \otimes (E_2, \theta_2)$  wird als die folgende Erweiterung  $(E, \theta)$  erklärt:  $E$  besteht aus den Paaren  $(e_1, e_2)$  mit  $e_i \in E_i$  und  $e_1\theta_1 = e_2\theta_2$ , wobei  $(e_1, e_2) = (e'_1, e'_2)$  durch  $e'_1 = e_1 g$ ,  $e'_2 = e_2 g^{-1}$  (für ein  $g \in G$ ) definiert wird, und man setzt  $(e_1, e_2)(e'_1, e'_2) = (e_1 e'_1, e_2 e'_2)$ ,  $(e_1, e_2)\theta = e_1\theta_1 = e_2\theta_2$  sowie  $(g, 1) = g$  für  $g \in G$ . Mit der Multiplikation  $\otimes$  und der Äquivalenz als Gleichheit bilden die  $(E, \theta)$  eine kommutative Halbgruppe  $S$  mit neutralem Element und die zentralen  $(E, \theta)$ , d. h. diejenigen mit  $K = G$ , eine abelsche Gruppe  $S'$  mit demselben neutralen Element. Hat das Element  $W(x_1, \dots, x_n)$  der freien Quasigruppe mit neutralem Element von  $n$  Erzeugenden  $x_i$  die als „rein-nichtassoziativ“ (r. n. a.) bezeichnete Eigenschaft, daß für Elemente  $a_i$  einer Gruppe stets  $W(a_1, \dots, a_n) = 1$  gilt, so hängt bei  $e_i \in E$  und fester Erweiterung  $(E, \theta)$  der Wert  $W(e_1, \dots, e_n)$  nur von den  $x_i = e_i\theta$  ab:  $W(e_1, \dots, e_n) = F(W, E; x_1, \dots, x_n)$ . Sind dann die  $m_i \in M$  so gewählt, daß  $W(m_1, \dots, m_n) = 1$  gilt, so liefert die Zuordnung von  $F(W, E; m_1, \dots, m_n)$  zu  $(E, \theta)$  einen Homomorphismus von  $S$  in  $M$ .  $(E, \theta)$  heißt „stark gruppenähnlich“ (s. g.), wenn für jedes r. n. a.  $W$  aus  $W(e_1, \dots, e_n)\theta = 1$  stets  $W(e_1, \dots, e_n) = 1$  folgt. Ist  $C$  eine Menge von r. n. a.  $W$ , so wird  $(E, \theta)$  als  $C$ -Erweiterung bezeichnet, wenn  $W(e_1, \dots, e_n) = 1$  für alle  $W \in C$  und  $e_i \in E$  gilt. Falls  $C$  aus dem durch  $x_1 x_2 \cdot x_3 x_1 = (x_1(x_2 x_3 \cdot x_1)) B_3$  definierten  $B_3$  besteht, sind die  $C$ -Erweiterungen diejenigen, für welche  $E$  eine Moufang-Quasigruppe ist. Die Mengen  $N_{sg}$  und  $N_c$  der s. g. Erweiterungen bzw. der  $C$ -Erweiterungen sind Kerne von Homomorphismen der Halbgruppe  $S$  auf (abelsche) Gruppen:  $\mathfrak{B} = S/N_{sg}$ ,  $\mathfrak{B}_c = S/N_c$ . Ebenso sind  $\mathfrak{B} = (S' \otimes N_{sg})/N_{sg}$  sowie  $\mathfrak{B}_c = (S' \otimes N_c)/N_c$ .



und damit auch  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0$ ,  $\mathfrak{S}_C = \mathfrak{S}_0/\mathfrak{S}_0$  (abelsche) Gruppen. Ist  $M$  eine freie Quasigruppe mit neutralem Element, so haben  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{S}_C$  die Ordnung 1. Es gilt  $N_C = N_{sg}$ , sobald  $M$  eine freie  $C$ -Quasigruppe mit neutralem Element ist (d. h. freie Struktur unter den Bedingungen: Quasigruppe, neutrales Element,  $W(m_1, \dots, m_n) = 1$  für alle  $W \in C$ ). Falls  $M$  eine Gruppe und  $C = \{\mathfrak{S}_3\}$  ist, ruft die Abbildung  $(E, \theta) \rightarrow F(B_3, E; m_1, m_2, m_3)$  einen Homomorphismus von  $\mathfrak{S}_C$  auf die dritte  $G$ -Kohomologiegruppe von  $M$  hervor. Die zentralen  $\{B_3\}$ -Erweiterungen bilden eine Untergruppe von  $S'$ , falls  $M$  eine Moufang-Quasigruppe ist; der Fall, daß  $M$  endlich ist, wird näher untersucht.

Günter Pickert.

Michiura, Tadashi: On simply ordered groups. Portugaliae Math. 10, 89—95 (1951).

In einer angeordneten, additiv geschriebenen Gruppe  $G$  heißt ein Element  $a$  archimedisch, wenn  $a \geq 0$  ist und es zu jedem  $b \in G$  eine natürliche Zahl  $n$  mit  $n \cdot a \geq b$  gibt. Ein Normalteiler  $N$  von  $G$ , der mit zwei Elementen stets auch das ganze zwischen ihnen liegende Intervall enthält, wird  $l$ -Ideal von  $G$  genannt; die Anordnung von  $G$  überträgt sich dann in natürlicher Weise auf die Faktorgruppe  $G/N$ , da jede Nebenklasse  $\neq N$  von  $N$  entweder nur Elemente  $> 0$  oder nur Elemente  $< 0$  enthält.  $G$  wird der Einschränkung unterworfen: Jedes nichtarchimedische Element  $\in G$  erzeugt einen Normalteiler von  $G$ ; gleichbedeutend damit: jedes nichtarchimedische Element  $\in G$  liegt im Zentrum von  $G$ . Dann gilt: Das  $l$ -Ideal  $N (\neq G)$  ist genau dann maximal unter den  $l$ -Idealen  $\neq G$  von  $G$ , wenn  $G/N$  archimedisch ist;  $G$  ist kommutativ; enthält  $G$  genau  $n+1$  verschiedene  $l$ -Ideale, so ist  $G$  isomorph zu einer Untergruppe der angeordneten additiven Gruppe der  $n$ -tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  reeller Zahlen (mit der üblichen Addition der  $n$ -tupel), in der  $(a_1, \dots, a_n) < (b_1, \dots, b_n)$  als  $a_i < b_i$  für das kleinste  $i$  mit  $a_i \neq b_i$  erklärt ist.

Günter Pickert.

Britton, J. L. and J. A. H. Shepperd: Almost ordered groups. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 188—199 (1951).

The authors generalize the concept of partially ordered groups (po-groups) by introducing the concept of almost ordered groups (ao-groups). The axiom „ $a < b$  implies  $ga < gb$  and  $ah < bh$  for all  $g, h$  in  $G$ “ for po-groups  $G$ , is replaced by „ $a < b$  implies  $ga < gb$  and  $ah < bh$  for most elements  $g, h$  in  $G$ “ in the definition of ao-groups  $G$ . The property of containing most elements of  $G$  has to satisfy the axioms: (i) if  $S_1$  and  $S_2$  contain most elements of  $G$ , then  $S_1 \cap S_2$  is not empty; (ii) if  $S$  contains most elements of  $G$ , then so do the sets  $gS$  and  $Sg$  for each  $g \in G$ ; (iii) if  $S_1 \subset S_2$  and  $S_1$  contains most elements of  $G$ , then so does  $S_2$  too. An almost fully ordered group (afo-group) is defined as a po-group possessing but a finite number of elements incomparable with the identity element. The authors discuss the main properties of ao-groups and afo-groups, as well as the extension of the order of an afo-group. Of the many results we mention the following ones: (1) the order relation  $<$  of an ao-group  $G$  can always be extended to a partial order ( $<$ ) by defining  $a(<)b$  if and only if there are elements  $c$  and  $d$  in  $G$  such that  $cad < cbd$ ; (2) if there are  $n$  elements of finite order, other than 1, in an ao-group  $G$ , then any two of them are incomparable and every element  $g$  in  $G$  has at least  $n$  elements incomparable with it; (3) if in an afo-group  $G$  there are  $n$  elements incomparable with 1, then the same is true for every  $g$  in  $G$ ; (4) in an afo-group the existence of positive integers  $n, m$  with  $a^n > 1$  and  $b^m > 1$  implies the existence of a positive integer  $r$  such that  $(ab)^r > 1$ ; (5) the order relation  $<$  of an afo-group can be extended to an order relation [ $<$ ] by putting  $a [<] b$  if and only if there is a natural number  $n$  with  $(a^{-1}b)^n > 1$ ; in this order [ $<$ ] an element  $= 1$  is comparable with 1 if and only if it is of infinite order; the order [ $<$ ] has no proper extension.

Ladislav Fuchs.

Waerden, B. L. van der: Example d'un groupe avec deux générateurs, contenant un sousgroupe commutatif sans système fini de générateurs. Nieuw Arch. Wiskunde, II. R. 23, 190 (1951).

Verf. gibt im Anschluß an eine unter gleichem Titel erschienene Arbeit von I. de Groot (dies. Zbl. 35, 14) ein weiteres Beispiel einer aus zwei Elementen erzeugbaren Gruppe, die eine abelsche, nicht aus endlich vielen Elementen erzeugbare Untergruppe enthält. Siehe dazu die Bemerkung des Ref. in dem zitierten Referat.

Otto Grün.

Edel'man, S. L.: Über  $p$ -Normalreihen einer Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 209—212 (1951) [Russisch].



Sei  $G$  eine Gruppe und  $G^p$  diejenige (charakteristische) Untergruppe von  $G$ , die von den Elementen erzeugt wird, deren Ordnungen Potenzen der Primzahl  $p$  sind. Eine Untergruppe  $N$  von  $G$ , deren Normalisator  $G^p$  umfaßt, wird vom Verf.  $p$ -Normalteiler genannt. Verf. zeigt, daß Durchschnitt und Erzeugnis von  $p$ -Normalteilern wieder  $p$ -Normalteiler sind. Eine von  $G$  zum Einheits-Element führende Reihe von Untergruppen, deren jede echter  $p$ -Normalteiler in der vorangehenden ist, heiße  $p$ -Normalreihe. Wenn in einer Gruppe  $G$  für je zwei Untergruppen  $N \supset H$  die Beziehung  $N^p \cap H = H^p$  gilt, so läßt sich der Schreiersche Verfeinerungs-Satz für  $p$ -Normalreihen übertragen: je zwei  $p$ -Normalreihen einer solchen Gruppe besitzen isomorphe Verfeinerungen.

Kurt A. Hirsch.

**Plotkin, B. I.:** Zur Theorie der lokal-nilpotenten Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **76**, 639—641 (1951) [Russisch].

A group is called locally nilpotent, if every finite set of its elements is contained in some nilpotent subgroup (i. e. one with a central series of finite length). A group is said to satisfy the normalizer condition if every proper subgroup of it is distinct from its normalizer. It is an open problem whether a group with normalizer condition always possesses an ascending central series. This has recently been proved by the reviewer (this Zbl. **42**, 21) under the severe restriction that the group satisfies the maximal condition. In the present paper the author obtains the same result for all groups with finite numbers of generators. This is a corollary from the main theorem: A group  $G$  with normaliser condition is locally nilpotent.

Kurt A. Hirsch.

**Smirnov, D. M.:** Zur Theorie der lokal-nilpotenten Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **76**, 643—646 (1951) [Russisch].

The author calls a subgroup  $H$  of a group  $G$  „infra-invariant“ if for every inner automorphism  $\varphi$  of  $G$  either  $\varphi(H) \subseteq H$  or  $\varphi(H) \supseteq H$ , in other words if the conjugates of  $H$  are ordered by inclusion. For periodic groups the concepts of „infra-invariant“ and „normal“ subgroup coincide. The author proves (theorem 1) that the same is true for locally nilpotent groups and that (theorem 2) a group whose cyclic subgroups are all infra-invariant is Hamiltonian. The next group of theorems refer to groups with an upper central series  $1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n \subset \dots \subset Z_\gamma = G$  of at most countable length  $\gamma \leq \omega$ . Theorem 3: if for  $n \geq 2$  the maximal periodic subgroup  $P_n/Z_{n-1}$  of  $Z_n/Z_{n-1}$  satisfies the minimal condition then from the finiteness of the centre  $Z_1$  of  $G$  follows the finiteness of  $G$ . Theorem 4: if the group is locally infinite and the centre  $Z_1$  does not contain a complete subgroup, then neither does  $G$  nor any factor of the upper central series. Theorem 5: if in each factor  $Z_n/Z_{n-1}$  the periodic part is finite and its factor-group has finite rank, then the upper central series has finite length. Theorem 8: In a locally nilpotent group the normaliser of any serving subgroup (Servanz-Untergruppe in the sense of Prüfer) is again a serving subgroup. Theorem 9. Let  $G$  be a soluble group with maximal condition (an  $S$ -group in the terminology of the reviewer) and  $A$  a locally soluble group of automorphisms of  $G$ . Then  $A$  is again an  $S$ -group.

Kurt A. Hirsch.

**Kazačkov, B. V.:** Über Sätze vom Sylowschen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 5—7 (1951) [Russisch].

Die Arbeit schließt sich inhaltlich und terminologisch an die Arbeiten von S. A. Čunichin an (siehe z. B. dies. Zbl. **39**, 17), in denen er die Sylowschen Sätze und ihre weitgehenden Verallgemeinerungen im Falle auflösbarer Gruppen durch Ph. Hall [J. London math. Soc. **3**, 98—105 (1928)] auf weitere Klassen von Gruppen ausdehnt. Verf. nennt eine Gruppe vom Typus  $\Pi$ - $S$ , wenn in ihr alle  $\Pi$ -Sylow-Gruppen konjugiert und auflösbar sind. Er beweist, wenn die Faktor-Gruppe  $G/N$  nach einem auflösbaren Normalteiler vom Typus  $\Pi$ - $S$  ist, dann auch die Gruppe  $G$  selbst. Wenn  $G$  endlich ist, so braucht man  $N$  nur als  $\Pi$ -auflösbar anzunehmen. Weiter gibt Verf. einige, allerdings recht spezielle, Sätze vom Sylowschen Typus



für unendliche Gruppen, von denen das folgende Beispiel genügen mag: In einer auflösbaren Gruppe mit Minimal-Bedingung für Untergruppen sind alle Sylowschen  $\Pi$ -Untergruppen untereinander konjugiert.

*Kurt A. Hirsch.*

**Mal'cev, A. I.:** Über einige Klassen unendlicher auflösbarer Gruppen. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **28 (70)**, 567—588 (1951) [Russisch].

Die Hauptergebnisse dieser wichtigen Arbeit sind in einer kurzen Note (dies. Zbl. **33**, 246) ohne Beweise mitgeteilt worden. Die vorliegende Arbeit bringt die vollständigen Beweise. Satz 6 der Voranzeige ist durch den folgenden stärkeren Satz 7 ersetzt: Wenn jeder endliche Komplex von Elementen einer Gruppe  $G$  in einem auflösbaren Normalteiler von  $G$  enthalten ist und alle Abelschen Untergruppen von  $G$  den Typus  $A_3$  besitzen [d. h. die Elemente endlicher Ordnung bilden ein direktes Produkt einer endlichen Anzahl von zyklischen Gruppen und Gruppen des Typs  $(p^\infty)$  und die Faktor-Gruppe hat endlichen Rang], so ist  $G$  auflösbar.

*Kurt A. Hirsch.*

**Scott, W. R.:** Algebraically closed groups. *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 118—121 (1951).

Systems of simultaneous equations  $u_i(x_1, \dots, x_r, g_1, \dots, g_s) = 1$  and inequalities  $v_i(x_1, \dots, x_r, g_1, \dots, g_s) \neq 1$  are considered, where  $x_1, \dots, x_r$  are variables and  $g_1, \dots, g_s$  elements of a group  $G^*$ . The author calls  $G^*$  strongly algebraically closed if every finite system of such equations and inequalities has solutions  $x_1, \dots, x_r$  in  $G^*$  whenever it has solutions in some group containing  $G^*$ ; and he calls  $G^*$  weakly algebraically closed if every finite system of such equations only, without the inequalities, has solutions in  $G^*$  whenever it has solutions in a group containing  $G^*$ . He proves that every group  $G$  can be embedded in a strongly algebraically closed group  $G^*$ ;  $G^*$  can be constructed as a countable group if  $G$  is countable, and of the same order as  $G$  if  $G$  is uncountably infinite. A strongly algebraically closed group contains an isomorphic copy of every finite group. „Finite“ can be replaced throughout by „of cardinal less than a fixed infinite cardinal“. A strongly algebraically closed group is evidently also weakly algebraically closed. The question whether every non-trivial weakly algebraically closed group is also strongly algebraically closed is left open; as is also the problem whether there is an infinite group  $G$  completely defined by a finite number of generators, relations, and inequalities (i. e. so that every group satisfying the same relations and inequalities is isomorphic to  $G$ ). Generalisations to other algebraic systems are hinted at.

*Bernhard H. Neumann.*

**Higman, Donald G.:** Lattice homomorphisms induced by group homomorphisms. *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 467—478 (1951).

Die folgenden beiden Sätze enthalten die wichtigsten Resultate der vorliegenden Untersuchung: (1) Wenn  $H$  eine echte Untergruppe der Gruppe  $G$  ist, so sind die folgenden drei Bedingungen notwendig und hinreichend für die Existenz eines Endomorphismus  $\sigma$  derart, daß  $S^\sigma = S \cap H$  für jede Untergruppe  $S$  von  $G$  gilt:  $H$  ist direkter Faktor von  $G$ ; die Ordnungen aller Elemente in  $G$  sind endlich; die Ordnungen aller Elemente in  $G/H$  sind teilerfremd zu den Ordnungen aller Elemente in  $H$ . (2) Ist  $N$  ein echter Normalteiler von  $G$ , so sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von  $N(S \cap T) = NS \cap NT$  für alle Untergruppen  $S, T$  von  $G$ : die Ordnungen aller Elemente in  $G$  sind endlich; enthält  $G/N$  ein Element der Ordnung  $p$ , so ist jedes  $p$ -Element in  $G$  im Zentralisator von  $N$  enthalten und jedes  $p$ -Element in  $N$  ist Potenz eines jeden nicht in  $N$  enthaltenen  $p$ -Elements in  $G$ ; dabei sind  $p$ -Elemente Elemente, deren Ordnung eine Potenz der Primzahl  $p$  ist. — Aus dem Satz (2) lassen sich Reduktionssätze für die Konstruktion von Normalteilern mit den gewünschten Eigenschaften herleiten, die es insbesondere zu zeigen gestatten, daß von Zappa für endliche Gruppen gewonnene Resultate Spezialfälle der vorliegenden Sätze sind.

*Reinhold Baer.*



Neumann, B. H.: Groups with finite classes of conjugate elements. (In memorial Issai Schur.) Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 178—187 (1951).

Hauptresultate der vorliegenden Abhandlung sind die folgenden engverknüpften Sätze: (1) Das Element  $g$  der Gruppe  $G$  ist dann und nur dann in einem endlichen Normalteiler von  $G$  enthalten, wenn die Ordnung von  $g$  und die Anzahl der zu  $g$  in  $G$  konjugierten Elemente endlich sind. (2) Aus der Endlichkeit der Faktorgruppe nach dem Zentrum folgt die Endlichkeit der Kommutatorgruppe. (3) Sind sämtliche Klassen in  $G$  konjugierter Elemente endlich, so bilden die Elemente endlicher Ordnung in  $G$  eine Untergruppe  $P$  derart, daß  $G/P$  eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist.

Reinhold Baer.

Ore, Oystein: Some remarks on commutators. Proc. Amer. math. Soc. 2, 307—314 (1951).

In einer Gruppe braucht das Produkt zweier Kommutatoren nicht wieder ein Kommutator zu sein. Es besteht also die Frage, unter welchen Bedingungen alle Elemente der Kommutatorgruppe einer Gruppe Kommutatoren sind. — Verf. beweist, daß in der symmetrischen Gruppe  $\Sigma_n$  alle Elemente der alternierenden Gruppe  $A_n$  Kommutatoren sind. Für  $n \geq 5$  sind sogar alle Elemente aus  $A_n$  auch schon Kommutatoren aus Elementen in  $A_n$ . Für die symmetrische Gruppe  $\Sigma_s$  einer abzählbar unendlichen Menge  $S$  hat Baer gezeigt, daß  $\Sigma_s$  ihre eigene Kommutatorgruppe ist. Verf. beweist, daß jede eindeutige Abbildung von  $S$  auf sich selbst ein Kommutator ist. Überraschend ist dabei, daß alle endlichen Permutationen in  $\Sigma_s$ , die in bezug auf die von ihnen bewegten Gegenstände keine Kommutatoren sind, auch Kommutatoren in  $\Sigma_s$  sind.

Franz Wever.

Douglas, Jesse: On finite groups with two independent generators. I. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 604—610 (1951).

Es sei  $\Gamma$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $mn$ , die zwei zyklische Untergruppen  $\{A\}$ ,  $\{B\}$  der Ordnungen  $m$  bzw.  $n$  mit dem Durchschnitt 1 enthält. Mit mod  $m$  bzw.  $n$  bestimmten  $x$  bzw.  $y$  werden dann durch  $A^x B^y$ , (I)  $A^x \{B\}$ , (II)  $\{A\} B^y$  alle Elemente aus  $\Gamma$  bzw. alle Links- bzw. Rechtsrestklassen von  $\Gamma \bmod \{B\}$  bzw.  $\{A\}$  eindeutig dargestellt. Die Permutationen  $(I^*) A^x \{B\} \rightarrow B A^x \{B\} = A^{\Theta(x)} \{B\}$ ,  $(II^*) \{A\} B^y \rightarrow \{A\} B^y A = \{A\} B^{\Phi(y)}$  von (I) bzw. (II) induzieren zwei Restklassenpermutationen der ganzen rationalen Zahlen (R. P.)  $\Theta \bmod m$  und  $\Phi \bmod n$ . Durch sie ist schon die Struktur von  $\Gamma$  festgelegt:  $A^u B^v A^x B^y = A^{u+\Theta^v(x)} B^{v+\Phi^x(y)}$  ( $\Theta^v = y$ -te Potenz von  $\Theta$  bei Verknüpfung durch Nacheinanderausführung; entsprechend  $\Phi^x$ ). Verf. nennt eine wie  $\Theta$  durch  $(I^*)$  induzierte R. P. speziell (spez.) — die Bevorzugung der einen Komponente bei dieser Definition ist unbedeutend: Substituiert man  $A = B^{-1}$ ,  $B = A^{-1}$ , so wird durch  $A^u \{B\} \rightarrow B A^u \{B\}$  wegen  $B A^u \{B\} = A^{\Phi(u)} \{B\}$  die R. P.  $\Phi$  induziert;  $\Phi$  ist also auch spez. — und zwei spez. R. P. konjugiert, wenn sie wie  $\Theta, \Phi$  gleichzeitig durch eine Gruppe  $\Gamma$  induziert werden. Durch Charakterisierung (1) der spez. unter den R. P. und (2) der konjugierten (konj.) unter den Paaren spez. R. P. gelingt es Verf., einen Überblick über die Gruppen  $\Gamma$  zu geben. (1) Eine beliebige R. P.  $\Theta \bmod m$  mit der Ordnung  $r$  (bei angegebener Verknüpfung) ist dann und nur dann spez., wenn  $\Theta(x) = 0$  für  $x \equiv 0 \bmod m$  und wenn  $\Theta^z(x+1) - \Theta^z(1) = \Theta^{\Theta_1(z)}(x) \bmod m$  für alle  $x \bmod m$  und  $z \bmod r$  durch eine R. P.  $\Theta_1 \bmod r$  gelöst werden kann.  $\Theta_1$ , die sogenannte Derivierte, ist dann eindeutig bestimmt und ebenfalls spez., und es ist  $\Theta$  mit  $\Theta_1$  konj. — Ist  $s$  ein Teiler von  $m$  und gilt für eine R. P.  $\Theta \bmod m$  sogar  $\Theta(x) \equiv \Theta(y) \bmod s$  für  $x \equiv y \bmod s$ , so kann  $\Theta$  auch als eine R. P.  $\bar{\Theta} \bmod s$  aufgefaßt werden. (2) Zwei spez. R. P.  $\Theta \bmod m, \Phi \bmod n$  mit den Ordnungen  $s$  bzw.  $t$  sind dann und nur dann konj., wenn (a)  $t|m, s|n$ , (b)  $\Theta$  und  $\Phi$  als R. P.  $\Theta \bmod t$  bzw.  $\Phi \bmod s$  aufgefaßt werden können mit  $\Theta = \Phi_1$  und  $\Phi = \Theta_1$ . — Weitere Eigenschaften spez. und konj. R. P.: Ist  $\Theta \bmod m$  in Zyklendarstellung gegeben und spez.,  $m > 1$ , so ist die Ordnung von  $\Theta$  gleich der Länge des Zyklus, der die Restklasse 1 mod  $m$  (Hauptzyklus) enthält. Zwei konj. R. P. bestimmen sich schon durch ihre Hauptzyklen gegenseitig. — Alle Sätze werden ohne Beweis mitgeteilt. Wolfgang Gaschütz.

Paige, L. J.: Complete mappings of finite groups. Pacific J. Math. 1, 111—116 (1951).

A complete mapping of a group  $G$  is a one-to-one mapping  $x \rightarrow \theta(x)$  of  $G$  upon  $G$  such that  $x \rightarrow x \cdot \theta(x)$  is also a one-to-one mapping of  $G$  upon  $G$ . A group is called admissible if it has at least one complete mapping. It is known that all infinite

groups are admissible, that all finite groups of odd order are admissible, and that a finite abelian group of even order is admissible if and only if it contains more than one element of order two. The problem of determining which finite non-abelian groups of even order are admissible is unsolved. The present paper gives several partial results on this problem and also discusses how a complete mapping of a finite group  $G$  makes it possible to construct a Latin square orthogonal to the group table of  $G$ .

*Paul T. Bateman.*

**Zappa, Guido:** Sulla condizione perchè un emitropismo inferiore tipico tra due gruppi sia un omotropismo. Giorn. Mat. Battaglini 80, 80—101 (1951).

An upper (lower) hemitropism of a finite group  $G$  is a single valued mapping of the lattice of subgroups of  $G$  onto the lattice of subgroups of some group  $H$ , which preserves the group theoretical union (intersection) of each pair of subgroups of  $G$ . If  $N$  is a subgroup of  $G$ , the lower hemitropism defined by mapping each subgroup  $S$  of  $G$  onto the subgroup  $S \cap N$  of  $N$  is called the typical lower hemitropism of  $G$  onto  $N$ . In the present paper the author complements the results of his earlier paper (this Zbl. 34, 14) by giving a characterization of those pairs  $N, G$  consisting of a finite group  $G$ , and a subgroup  $N$  of  $G$  which are such that the typical lower hemitropism of  $G$  onto  $N$  is also an upper hemitropism, i. e. which are such that for each pair  $S, T$  of subgroups of  $G$ ,  $(S \cup T) \cap N = (S \cap N) \cup (T \cap N)$ . Let  $g$  = the order of  $G$ ;  $n$  = the order of  $N$ ,  $m$  = the largest divisor of  $g$  which is prime to  $n$ ;  $h$  = the largest divisor of  $g$  every prime divisor of which divides both  $n$  and  $g/n$ ;  $l$  = the largest divisor of  $g$  which is prime to  $g/n$ . Then  $g = mhl$ , and  $l$  divides  $n$ ,  $n = kl$ . The principal result of this paper is as follows: The typical lower hemitropism of  $G$  onto  $N$  is also an upper hemitropism if and only if (1)  $N$  is a normal subgroup of  $G$ , (2) the totality  $M$  of elements of  $G$  whose orders divide  $m$  forms a subgroup of  $G$  (which necessarily has order  $m$ , and is characteristic in  $G$ ), (3) the totality  $L$  of elements of  $G$  with orders dividing  $l$  forms a subgroup of  $G$  (which necessarily has order  $l$ , and is characteristic in  $G$ ), (4) there exist subgroups  $H, K$  of  $G$  with orders  $h, k$  respectively, such that (4.a)  $H$  is cyclic, or the direct product of a dihedral group with a cyclic group of odd order, (4.b)  $K$  is cyclic, and in case  $H$  is not cyclic,  $k = 2t$ ,  $t$  odd, and (4.c) if  $S$  is a  $p$ -Sylow subgroup of  $H$ , then every element or subgroup of  $L$  which is permutable with every element of  $S \cap N$  is permutable with every element of  $S$ . Note that these conditions imply that  $G = MHL$ , and  $N = KL$ . An interesting auxiliary result is given. Suppose that  $N$  is a normal subgroup of a finite group  $G$ , with index prime to its order. Assume in addition that either  $N$  or  $G/N$  is solvable. Then it follows from well known theorems (Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, Leipzig 1937; p. 125, Satz 25; p. 126, Satz 27) that there exists a subgroup  $S$  of  $G$  of order  $[G:N]$  and any two such subgroups are conjugate. Now suppose that  $T$  is a subgroup with order dividing  $[G:N]$ , and consider the subgroup  $H = NT$ . By Dedekind's law,  $H \cap S$  has order equal to that of  $T$ . Hence it follows from the above mentioned theorems that there exists an element  $x$  in  $N$  such that  $T = x^{-1}(H \cap S)x$ , so that  $T$  is part of the subgroup  $x^{-1}Sx$ , which has order equal to  $[G:N]$ . The situation which is treated by the author is as follows. A group  $G$  is called  $p$ -complemented for a set  $p$  of primes, if for each prime  $p$  in  $p$  there exists a normal subgroup  $N(p)$  of  $G$  such that  $[G:N(p)]$  is the highest power of  $p$  which divides the order of  $G$ . Denote by  $N$  the intersection of the  $N(p)$ . Then  $N$  is a normal subgroup of  $G$ ,  $[G:N]$  is the product of the  $[G:N(p)]$ , and hence is relatively prime to the order of  $N$ , and  $G/N$  is nilpotent. Hence we may apply the above remarks to obtain: If a finite group  $G$  is  $p$ -complemented, and if  $h$  is the largest divisor of the order of  $G$  all the prime divisors of which belong to  $p$ , then any subgroup whose order divides  $h$  is part of a subgroup of order  $h$ , and any two subgroups of order  $h$  are conjugate.

*D. G. Higman.*

**Suzuki, Michio:** On the lattice of subgroups of finite groups. Trans. Amer. math. Soc. 70, 345—371 (1951).

The present paper presents an impressive number of results connected with the general question of the extent to which the structure of a finite group  $G$  is determined by the lattice  $L(G)$  of its subgroups. We shall list some of these. (1) There is an upper bound on the orders of the groups (if any) whose lattices of subgroups are isomorphic with a lattice  $L$  which has no chain as a direct factor. If  $\Phi$  is an isomorphism of  $L(G)$  onto  $L(H)$  for some group  $H$ , then  $\Phi$  is referred to as an  $L$ -isomorphism of  $G$  onto  $H$ , and  $G$  and  $H$  are said to be  $L$ -isomorphic. An abelian  $p$ -group is an abelian group  $A$  such that  $A^p = 1$  for some prime  $p$ ; a non-abelian  $p$ -group is a group of the form  $S(p)S(q)$ , where  $S(p)$  is an abelian  $p$ -group, and  $S(q)$  is a cyclic group of prime order  $q$ ,  $S(q) = \{y\}$ , such that for each  $x$  in  $S(p)$ ,  $y^{-1}xy = x^r$ , with  $r \not\equiv 1, r^q \equiv 1 \pmod{p}$ . (2) A group  $G$ ,  $L$ -isomorphic with a  $p$ -group  $H$  is again a  $p$ -group, unless either  $H$  is cyclic and  $G$  is cyclic of prime power order, or  $H$  is an abelian  $p$ -group, and  $G$  is a non-abelian  $p$ -group. An  $L$ -isomorphism  $\Phi$  of  $G$  is called index preserving if  $[S:T] = [S\Phi:T\Phi]$ , for every pair of subgroups  $S, T$  of  $G$  such that  $S \leq T$ . Otherwise  $\Phi$  is called singular.  $\Phi$  is called normal if both  $\Phi$  and  $\Phi^{-1}$  map normal subgroups onto normal subgroups. The author



investigates in some detail the structures of groups which admit singular  $L$ -isomorphisms, and of groups which admit non-normal  $L$ -isomorphisms. The results of these discussions are applied to give the following. (3) An  $L$ -isomorphism of a perfect group is index preserving. (4) If a group  $G$  is  $L$ -isomorphic with a solvable (perfect) group  $H$ , then  $G$  is solvable (perfect). (5) An  $L$ -isomorphism of a perfect group is normal. (3), (4) and (5) imply that if a perfect group  $G$  is  $L$ -isomorphic with a group  $H$ , then  $H$  is perfect, the orders of  $G$  and  $H$  are equal, and the modular lattices of normal subgroups of  $G$  and  $H$  are isomorphic. The author raises, but leaves open the question of whether or not  $G$  and  $H$  are isomorphic in this case. The answer is evidently unknown even in the case where  $G$  (and hence  $H$ ) are non-abelian simple groups. (6) An  $L$ -isomorphism of a perfect group  $G$  onto a group  $H$  maps the center of  $G$  onto the center of  $H$ . (7) If the center of a group  $G$  consists of the identity element alone, then the group of automorphisms of  $G$  is isomorphic with a subgroup of the group of  $L$ -automorphisms of  $G$ . (8) If  $G$  is a non-abelian simple group, and if  $H$  is  $L$ -isomorphic with  $G \times G$ , then  $H$  is isomorphic with  $G \times G$ . (9) A simple group  $G$  is isomorphic with a group  $H$  if and only if  $L(G \times G)$  is isomorphic with  $L(H \times H)$ . — The final sections of this paper are devoted to the study of groups with duals. A group  $G$  is called a dual of a group  $H$  if there exists a duality between  $L(G)$  and  $L(H)$ . The next two results (10) and (11) are valid for arbitrary (not necessarily finite) nilpotent groups. (10) A nilpotent group has a dual if and only if it is periodic, and every primary component is a finite modular group, not a 2-Hamiltonian group. (11) If a nilpotent group has a dual, it is  $L$ -isomorphic with an abelian group. (12) A (finite) solvable group  $G$  has a dual if and only if it is the direct product of groups  $G(i)$  of mutually prime orders, each of which is either a  $P$ -group, or a modular group of prime power order which is not a 2-Hamiltonian group. (13) If a (finite) solvable group has a dual it is  $L$ -isomorphic with an abelian group. The author remarks that if one could prove that a finite non-abelian simple group has no dual, then one could remove the hypothesis of solvability from (12) and (13). D. G. Higman.

**Suzuki, Michio:** On the  $L$ -homomorphisms of finite groups. Trans. Amer. math. Soc. **70**, 372—386 (1951).

In this paper, the author extends to  $L$ -homomorphisms some of the results established for  $L$ -isomorphisms in his preceding paper (see the above review). An  $L$ -homomorphism of a finite group  $G$  is a homomorphism of the lattice  $L(G)$  of subgroups of  $G$  onto some lattice  $L$ . If  $L$  is the subgroup lattice of some group  $H$ , we refer to the  $L$ -homomorphism of  $G$  onto  $H$ , and say that  $G$  is  $L$ -homomorphic to  $H$ . As a preparation for this study, a characterization of groups  $L$ -homomorphic to a cyclic group is given, namely: (1) A group  $G$  is  $L$ -homomorphic to a cyclic group  $G'$  of order  $\prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$  if and only if there exist mutually distinct primes  $q_i$ , an integer  $g$  which is prime to each  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) and normal subgroups  $N$  and  $G_0$  of  $G$  such that the order of  $G$  is  $\prod_{i=1}^n q_i^{f_i} \cdot g$ , the order of  $G_0$  is  $\prod_{i=1}^n q_i^{a_i}$  with  $f_i \geq a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $N$  has order  $g$ ,  $G/N$  is a nilpotent group whose  $p$ -Sylow subgroups are cyclic or dihedral groups, and if  $q_i = 2$ , and if a 2-Sylow subgroup is a dihedral group, then  $a_i = e_i = 1$ . If  $\Phi$  is an  $L$ -homomorphism of a group  $G$  onto a lattice  $L$ , it follows that  $L$  has a greatest element  $I$ , and a least element  $O$ . The intersection (composite) of all those subgroups  $S$  of  $G$  such that  $S\Phi = I$  ( $S\Phi = O$ ) is called the upper (lower) kernel of  $\Phi$ . (2) The upper and lower kernels of an  $L$ -homomorphism of a group  $G$  are normal subgroups of  $G$ . An  $L$ -homomorphism of a group is called proper if it is neither an  $L$ -isomorphism, nor the trivial  $L$ -homomorphism. (3) If a group  $G$  admits a proper  $L$ -homomorphism  $\Phi$ , then  $G$  contains a normal subgroup  $N$ , and a subgroup  $H$  with order prime to that of  $N$ , such that  $G = NH$ ,  $H$  contains the upper kernel  $G_0$  of  $\Phi$ , and  $N$  is part of the lower kernel  $E$  of  $\Phi$ .  $E \cap G_0$  is a cyclic subgroup of the center of  $G$ , and  $H/G_0$  is nilpotent. Several further properties relating the subgroups  $E$ ,  $G_0$ , and  $H$  are given, and applied in establishing subsequent results. A consequence of these investigations, together with the fact (proved in the author's paper referred to above) that a group  $L$ -isomorphic with a perfect group is perfect, is: (4) If there exists an  $L$ -homomorphism of a perfect group  $G$  onto a group  $H$ , then  $H$  is perfect. Groups  $L$ -homomorphic to a solvable group are characterized in terms of the subgroups  $N$  and  $H$  of (3). In particular we remark that: (5) If  $\Phi$  is a proper  $L$ -homomorphism of a group  $G$  onto a nilpotent group  $G'$ , and if  $S(i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) are the Sylow subgroups of  $G'$ , then there exist subgroups  $H(i)$  of  $H$  such that  $H$  is the direct product of the  $H(i)$ , and  $H(i)\Phi = S(i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, t$ ). (6) If there exists an  $L$ -homomorphism of a solvable group  $G$  onto a group  $G'$ , then  $G'$  is solvable. An element  $u$  of a lattice  $L$  is called a neutral element of  $L$  if every triple  $u, x, y$  of elements of  $L$  generates a distributive sublattice of  $L$ . If  $L$  is directly decomposable, then an element of  $L$  is neutral if and only if each of its components is neutral. Thus the following result determines the neutral elements of the lattice of subgroups of any (finite) group. (7) Assume that  $L(G)$  is irreducible. Then a subgroup  $K$  of  $G$  is a neutral element of  $L(G)$  if and only if  $K$  is part of the center of  $G$ , and  $G$  contains a

normal subgroup  $N$ , and a subgroup  $H$  with order prime to that of  $N$ , such that  $G = NH$ ,  $H$  contains  $K$ ,  $H$  is nilpotent, and each Sylow subgroup of  $H$  is either cyclic, or a dihedral group.

*D. G. Higman.*

**Piccard, Sophie:** Les permutations associées aux bases du groupe de Klein généralisé et les groupes associés. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 906—908 (1951).

Le groupe de Klein généralisé  $G_{2^n}$  est un groupe abélien, régulier, de degré et d'ordre  $2^n$ , dont toutes les substitutions, sauf l'identité, sont du second ordre. Il existe des systèmes de  $n$  éléments indépendants générateurs du groupe et le groupe ne peut être engendré par moins de  $n$  éléments. Le nombre total de ces bases du groupe est  $(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 2^2) \dots (2^n - 2^{n-1})/n!$ . Dans cette note très concentrée, l'A. donne quantité de résultats particuliers concernant les bases du groupe  $G_{2^n}$ , les permutations du groupe symétrique  $S_{2^n}$  des éléments 1, 2, 3, ...,  $2^n$  dites associées à ces bases et les ensembles de substitutions de  $S_{2^n}$  qui transforment ces bases en elles-mêmes. Ce sont ces ensembles qui constituent les groupes dits associés à ces bases.

*S. Bays.*

**Piccard, Sophie:** Structure des groupes imprimitifs. Suites associées, classes de substitutions, sous-groupes distingués, nombre minimum d'éléments générateurs. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 297—307, Indagationes math. 13, 297—307 (1951).

A tout groupe imprimitif  $G$  de degré  $n \geq 4$ , dont on considère un ensemble donné (1),  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , de systèmes d'imprimitivité, correspond un groupe  $g$  de degré  $n'$  de substitutions  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n' \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n'} \end{pmatrix}$ , telles qu'une substitution au moins du groupe  $G$  transforme  $E_i$  en  $E_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n'$ .  $g$  est le premier groupe associé à  $G$ , relatif aux systèmes (1). — Soit  $G_1$  un groupe imprimitif de degré  $n \geq 4$ . On définit une suite (2),  $G_1, G_2, \dots, G_m$ , de groupes, dont le dernier seul est primitif, en considérant pour toute valeur de  $i = 1, 2, \dots, m-1$ , un ensemble déterminé de systèmes d'imprimitivité (3),  $E_1^i, E_2^i, \dots, E_{n_i+1}^i$ , du groupe  $G_i$ , et en appelant  $G_{i+1}$  le premier groupe associé à  $G_i$  relatif aux systèmes d'imprimitivité (3).  $n_i$  est le degré de  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . — La suite (2) est appelée une suite complète associée au groupe  $G_1$ , relative aux systèmes d'imprimitivité (3) de  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-1$ , et le nombre  $m \geq 2$  est la longueur de cette suite. Quel que soit  $i$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  $G_i$  est  $n_i/n_{i+1}$  fois isomorphe à  $G_{i+1}$ . Soit  $I_{i,i-1}$  cet isomorphisme méridien et soit  $I_{i,j}$  le produit des isomorphismes  $I_{i,i+1}, I_{i+1,i+2}, \dots, I_{j-1,j}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ . Le groupe  $G_i$  est  $n_i/n_j$  fois isomorphe à  $G_j$  et  $I_{i,j}$  est l'isomorphisme de  $G_i$  à  $G_j$ . — Soit  $S_1$  une substitution quelconque de  $G_1$  et soit  $S^{(i)}$  la substitution du groupe  $G_i$  qui correspond à  $S^{(1)}$  dans  $I_{1,i}$ . Quels que soient les entiers  $t$  et  $i_1, i_2, \dots, i_t$ ,  $1 \leq t \leq m$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq m$ , et quelle que soit la substitution  $S^{(1)}$  de  $G_1$ , nous dirons que  $S^{(1)}$  est de classe  $C_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(1)}(C_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(i)})$  si le nombre total de substitutions impaires dans la suite  $S^{(i_1)}, S^{(i_2)}, \dots, S^{(i_t)}$  est pair (impair). On définit ainsi  $2(2^m - 1)$  classes de substitution du groupe  $G_1$ . Le produit de deux substitutions de la classe  $C_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(1)}$  ou de la classe  $C_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(i)}$  est une substitution de la classe  $C_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(1)}$ , alors que le produit de deux substitutions de deux classes différentes est une substitution de la classe  $C_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(i)}$ . Il s'ensuit que, si le groupe  $G_1$  possède au moins une substitution de la classe  $C_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(i)}$ , la moitié des substitutions de  $G_1$  est de la classe  $C_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(i)}$ , l'autre moitié est de la classe  $C_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(1)}$ , et les substitutions de cette dernière classe forment un sous-groupe distingué de  $G_1$ . — Quel que soit l'entier  $m \geq 2$ , il existe un groupe imprimitif  $G_1$  auquel on peut associer une suite complète de longueur  $m$  et qui possède effectivement  $2(2^m - 1)$  classes de substitutions non vides, distinctes deux à deux. Un exemple d'un tel groupe est donné à la p. 301. Un tel groupe ne saurait être engendré par moins de  $m$  éléments générateurs.

*S. Bays.*

**Brauer, Richard:** On the algebraic structure of group rings. J. math. Soc. Japan 3, 237—251 (1951).

Das Ziel der vorliegenden und einer späteren Arbeit ist es, eine Methode zu entwickeln, um die Schurschen Indizes der Charaktere einer endlichen Gruppe  $\mathcal{G}$  der Ordnung  $g$  in bezug auf einen Körper  $K$  der Charakteristik 0 zu bestimmen. Die Grundlage bildet folgender Satz, der sich leicht im Rahmen der Schurschen Theorie herleiten läßt: Sei  $\chi$  ein irreduzibler Charakter von  $\mathcal{G}$  und  $p$  eine beliebige Primzahl mit  $p \nmid g$ . Ferner sei  $K(\chi)$  der durch Adjunktion der Werte von  $\chi$  aus  $K$  entstehende



Körper und  $\varepsilon$  eine primitive  $g$ -te Einheitswurzel. Unter  $K^*$  verstehe man einen maximalen Körper zwischen  $K(\chi)$  und  $K(\chi, \varepsilon)$  derart, daß  $[K^*:K(\chi)]$  nicht durch  $p$  teilbar ist. Ist dann  $\xi$  ein irreduzibler Charakter einer Untergruppe  $\mathfrak{G}^*$  von  $\mathfrak{G}$  derart, daß  $\xi$  in  $K^*$  liegt und  $\xi$  in  $\chi(\mathfrak{G}^*)$  mit einer zu  $p$  primen Vielfachheit enthalten ist, dann ist der Index von  $\xi$  bezüglich  $K(\chi)$  durch die gleiche Potenz von  $p$  teilbar wie der Index von  $\chi$  bezüglich  $K$ . Das tiefliegende Resultat des Verf. ist nun, daß es immer eine Gruppe  $\mathfrak{G}^*$ , und zwar von einem sehr speziellen Typ [Typ (E)], und einen Charakter  $\xi$  gibt, für die die Voraussetzungen des genannten Satzes erfüllt sind. Eine Gruppe  $\mathfrak{H}$  heißt dabei vom Typ (E) für  $p$ , wenn  $\mathfrak{H}$  einen zyklischen Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von zu  $p$  primer Ordnung besitzt und  $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$  eine  $p$ -Gruppe ist. Haupt Hilfsmittel beim Beweis ist eine eingehende Untersuchung gewisser Teildeterminanten der Charaktermatrix von  $\mathfrak{G}$  bezüglich ihrer Teilbarkeit durch Primidealteiler von  $p$  im Körper der  $g$ -ten Einheitswurzeln. Durch die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung der Indizes also vom allgemeinen Fall auf den Fall reduziert, daß eine Gruppe vom Typ (E) vorliegt. Dieser letztere Fall soll in einer späteren Arbeit behandelt werden.

*Rudolf Kochendörffer.*

**Hamill, C. M.:** On a finite group of order 6531840. Proc. London math. Soc., II. Ser. 52, 401—454 (1951).

Die hier sehr eingehend untersuchte Gruppe  $G$  von  $6531840 = 2^8 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$  Kollineationen des projektiven 5-dimensionalen Raumes ist schon von Mitchell [Amer. J. Math. 36, 1—12 (1914)] behandelt worden. Unter anderm fand Mitchell, daß 126 „Projektionen“, d. h. Kollineationen der Ordnung 2 mit Fixpunkt in  $G$  enthalten sind. Mit von J. A. Todd (dies. Zbl. 29, 4) in einem einfacheren Falle angewandten geometrischen und gruppentheoretischen Methoden werden die mit  $G$  zusammenhängenden Konfigurationen untersucht. Bezüglich der 126 Scheitel der Projektionen ist  $G$  transitiv. Jedes Element läßt sich als Produkt von nicht mehr als 6 Projektionen darstellen. Als Ordnungen treten die Werte 1 bis 10, 12 und 18 auf. Es gibt 31 Typen von Elementen. Drei Typen zerfallen in je 2 Klassen konjugierter Elemente, die übrigen sind einklassig. Die 17 Typen, deren Elemente als Produkte einer geraden Anzahl von Projektionen dargestellt sind, bilden einen einfachen Normalteiler  $G^*$  vom Index 2. Zwei in  $G$  einklassige Typen zerfallen in  $G^*$  in je zwei Klassen konjugierter Elemente.

*Friedrich Wilhelm Levi.*

**Brahana, H. R.:** Finite metabelian groups and the lines of a projective four-space. Amer. J. Math. 73, 539—555 (1951).

Gruppen mit folgenden Eigenschaften werden untersucht: Das Zentrum ist zugleich Kommutatorgruppe; die  $p$ -Potenz ( $p$  Primzahl) jedes Elements ist 1; die Erzeugendenzahl ist 5. Diese Gruppen sind alle homomorph zu einer bestimmten Gruppe  $G$  der Ordnung  $p^{15}$  mit einer Abelschen Kommutatorgruppe  $C$  der Ordnung  $p^{10}$ . Es handelt sich darum, die wesentlich verschiedenen (d. h. nicht unter Automorphismen von  $G$  äquivalenten) Untergruppen von  $C$  zu bestimmen. Hierzu wendet Verf. ein geometrisches Verfahren an, mit dem er früher [Amer. J. Math. 62, 365—379 (1940)] die entsprechende Aufgabe für 3 Erzeugende behandelt hat. Sind  $U_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) die Erzeugenden, so wird jedes Element von  $G/C$  durch  $U_1^{x_1} \dots U_5^{x_5}$  und daher jede Untergruppe der Ordnung  $p$  durch einen Punkt  $(x_1, \dots, x_5)$  des 4-dimensionalen projektiven Raumes  $X$  über  $GF(p)$  dargestellt. Die Geraden in  $X$  entsprechen den Kommutatoren; sie werden durch ihre Plückerkoordinaten auf eine Punktmenge  $V$  in einem 9-dimensionalen projektiven Raume  $S$  abgebildet. Bezeichnet man zwei lineare Unterräume von  $S$  als äquivalent, wenn sie durch eine  $V$  invariant lassende Kollineation ineinander übergeführt werden können, so entsprechen die Äquivalenzklassen den wesentlich verschiedenen Untergruppen von  $C$ . So ergeben sich für die Ordnungen  $p^a$  ( $a = 15, 14, 13, 12, 11$ ) jeweils 1, 2, 6, 22, 54 Typen von Gruppen der verlangten Art. Da z. B. alle Punkte von  $V$  und ebenso alle von  $S - V$  untereinander äquivalent sind, kann es höchstens

zwei verschiedenartige solche Gruppen der Ordnung  $p^{14}$  geben. Ihr Nichtisomorphismus ergibt sich daraus, daß nur die  $V$  entsprechende Gruppe eine Abelsche Untergruppe der Ordnung  $p^{11}$  enthält.

*Friedrich Wilhelm Levi.*

**Yamabe, Hidehiko:** A condition for an abelian group to be a free abelian group with a finite basis. Proc. Japan Acad. 27, 205—207 (1951).

$G$  is a countable abelian group,  $G_n$  the subgroup of  $n$ -th multiples for every integer  $n$ .  $G$  is a free abelian group of infinite rank if it satisfies the following two conditions: (1) There exists an integer-valued function  $f(x, y)$  defined on  $G \times G$ , which is zero if and only if  $x = y = 0$ , and which is bilinear, i. e.,  $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \sum_{i,j=1,2} f(x_i, y_j)$ . (2)  $G_n$  is finite for some  $n$ . — (1) implies that  $G$  has no elements of finite order, and that any element of  $G$  has only a finite number of divisors — a condition which by itself is not sufficient to ensure that  $G$  is free abelian [cf. L. Pontrjagin, Ann. of Math., II. Ser. 35, 361—388 (1934), Appendix I. this Zbl. 9, 156]. The existence of the function  $f(x, y)$  enables the author to construct successive bases  $\xi_1, \dots, \xi_m$  for free subgroups of  $G$ , reducing in each step the absolute value of the determinant  $|f(\xi_i, \xi_j)|$ . The author states that without the condition (2)  $G$  can still be shown to be free abelian, though of infinite rank.

*Hanna Neumann.*

**Kertész, A.:** On groups every subgroup of which is a direct summand. Publ. math., Debrecen 2, 74—75 (1951).

Verf. bemerkt, daß jede Untergruppe einer abelschen Gruppe  $G$ , deren Elemente von quadratfreier Ordnung sind, ein direkter Faktor von  $G$  ist und umgekehrt.

*Georg Reichel.*

**Szele, T.:** On direct sums of cyclic groups. Publ. math., Debrecen 2, 76—78 (1951).

Zwei Systeme von Elementen einer Gruppe  $G$  heißen äquivalent, wenn die von ihnen erzeugten Untergruppen identisch sind. Sei  $O(a)$  die Ordnung von  $a \in G$ , so heißt ein System  $S$  aus  $G$ , das das Einheitselement von  $G$  nicht enthält, ein extremes System von  $G$ , wenn  $S$  kein endliches Untersystem  $a_1, \dots, a_n$  enthält, das zu einem System  $b_1, \dots, b_n$  aus  $G$  äquivalent ist und für das  $\text{Min } O(b_i) < \text{Min } O(a_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) gilt. Verf. zeigt: Besitzt eine abelsche Gruppe  $G$  ein extremes Erzeugendensystem  $S$ , so ist  $G$  direktes Produkt von zyklischen Gruppen, die durch die Elemente von  $S$  erzeugt werden.

*Georg Reichel.*

**Beaumont, Ross A. and H. S. Zuckerman:** A characterization of the subgroups of the additive rationals. Pacific J. Math. 1, 169—177 (1951).

Explizite Angabe der sämtlichen Untergruppen der Additionsgruppe der rationalen Zahlen und der Arten, aus diesen Untergruppen Ringe zu machen. Die Resultate finden sich im wesentlichen in der älteren Literatur; siehe R. Baer, dies. Zbl. 16, 203, L. Redei-T. Szele, dies. Zbl. 40, 13, T. Szele, dies. Zbl. 42, 255.

*Reinhold Baer.*

**Ritt, J. F.:** Subgroups of differential groups. Ann. of Math., II. Ser. 54, 110—146 (1951).

Die eingehenden Untersuchungen des Verf. über „differential groups“ (d. g.) (vgl. dies. Zbl. 37, 185; 38, 168; 42, 258) werden in der vorliegenden Arbeit fortgesetzt. Während die vorangehenden Abhandlungen die d. g. als Ganzes behandelten, befaßt sich Verf. jetzt mit der Frage nach den Untergruppen einer gegebenen d. g. Dabei ergeben sich auch hier Verallgemeinerungen der Lieschen Theorie; insbesondere sind es Resultate, die den beiden ersten Hauptsätzen der Lieschen Theorie korrespondieren. Die Untersuchung weiterer gruppentheoretischer Begriffe wie Durchschnitt zweier Untergruppen, Normalteiler, Faktorgruppe usw. bildet im wesentlichen den Inhalt der Arbeit, die daneben jedoch noch umfangreiche Hilfsbetrachtungen über lineare Differentialpolynome enthält, die ein durchaus selbständiges Interesse verdienen. Grundlegend für alle Untersuchungen ist eine neue Fassung des Begriffes „differential group“. Bisher wurde eine d. g. durch ein System von formalen Reihen in differenzierbaren Unbestimmten und ihren Ableitungen repräsentiert. Demgegenüber wird jetzt ein Raum eingeführt, zwischen



dessen Punkten die erwähnten Reihen eine Verknüpfung definieren. In diesem Sinne kann dann der Raum als d. g. aufgefaßt werden. Hiermit und mit der Definition der Untergruppen, mit verschiedenen damit im Zusammenhang stehenden Begriffen und Strukturbeziehungen befaßt sich das erste der vier Kapitel dieser Arbeit. —  $F$  sei der den Betrachtungen zugrunde liegende differenzierbare Grundkörper, der nicht-konstante Elemente enthalten soll.  $h$  sei eine Trans-

zendenten über  $F$  mit verschwindender Ableitung. Für formale Potenzreihen  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i h^i$  ( $a_i \in F$ )

erklärt man die Ableitung als  $\sum a'_i h^i$ , wobei  $a'$  die Ableitung von  $a$  bedeutet. Die geordneten  $n$ -Tupel aus solchen Potenzreihen bilden dann die Punkte eines Raumes  $S_n$ . Ist nun im bisherigen Sinne eine d. g. gegeben durch  $z_i = \mathcal{U}_i(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), so vermitteln diese Beziehungen eine Verknüpfung zweier Punkte  $u, v \in S_n$ , wenn man die Unbestimmten  $u_v, v_v$  in den  $\mathcal{U}_i$  formal durch die entsprechenden Koordinaten der Punkte ersetzt. Man erhält so einen Punkt  $z \in S_n$ , der als das Produkt  $z = uv$  der Punkte  $u$  und  $v$  aufgefaßt werden kann. Unter diesem Gesichtspunkt kann  $S_n$  als d. g.  $\mathcal{G}_n$  angesehen werden. Der Begriff der Untergruppe ergibt sich nun so: Für den Raum  $S_n$  werden zunächst in bestimmter Weise Unterräume definiert. Ist dann  $s_m \subset S_n$  ein Unterraum von  $S_n$ , der gegenüber der Gruppenverknüpfung abgeschlossen ist, so bestimmt  $s_m$  eine Untergruppe  $g$  von  $\mathcal{G}_n$ . Die  $m$ -dimensionalen Unterräume von  $S_n$  ( $m \leq n$ ) werden gewonnen mittels gewisser (univalenter) Transformationen von  $S_m$  in  $S_n$ . Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Unterraum  $s_m$  eine Untergruppe bestimmt, drückt sich in gewissen Eigenschaften aus, die die  $s_m$  bestimmenden Transformationen erfüllen müssen. Diese Eigenschaften werden in dem Begriff der „closed transformation family“ (c. t. f.) zusammengefaßt. Es folgt die Definition der infinitesimalen Transformation (i. t.). Jeder c. t. f. lassen sich in bestimmter Weise gewisse i. t. s. die „principal i. t.“ der c. t. f., zuordnen. Für zwei infinitesimale Transformationen  $A$  und  $B$  wird ein Kommutator  $[A, B]$  erklärt, und es folgt die bekannte Beziehung:  $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ . Eine c. t. f., deren i. t. s. linear unabhängig sind, heißt eine „differential transformation group“. Zwei weitere Sätze vermitteln einen Überblick über die Zusammenhänge zwischen univalenten Transformationen und Untergruppen. — Die folgenden Untersuchungen werden in Kapitel II durch verschiedene Sätze über lineare Differentialpolynome vorbereitet. Über den Grundkörper  $F$  werden dabei folgende zusätzliche Voraussetzungen gemacht: 1. Jede homogene lineare Differentialgleichung über  $F$  soll in  $F$  eine nichttriviale Lösung besitzen. 2. Jedes Element von  $F$  ist Ableitung eines Elements von  $F$ .  $G_i(u_1, \dots, u_p)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sei ein System homogener, linearer Differentialpolynome (l. d. p.), und  $Q_i(v_1, \dots, v_q)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sei ein System von homogenen Differentialpolynomen, die alle denselben Grad in den  $v_j$  besitzen. Wenn es dann ein System  $\sigma_i(v_1, \dots, v_q)$  ( $i = 1, \dots, p$ ) von homogenen Differentialpolynomen vom selben Grad wie die  $Q_i$  gibt derart, daß die  $G_i$  in die  $Q_i$  übergehen, wenn man die  $u_j$  durch die  $\sigma_j$  ersetzt, so wird dieser Sachverhalt gekennzeichnet durch die Redeweise „die  $G_i$  bedecken die  $Q_i$ “. Das System der  $G_i$  heißt „univalent“, wenn die Transformation  $z_i = G_i$  es ist. Es sei wiederum  $L_i(y_1, \dots, y_n)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) ein System von l. d. p. s. Ein System  $Q_1, \dots, Q_n$  homogener Differentialpolynome gleichen Grades in allen Unbestimmten heißt ein Nullsystem der  $L_i$ , wenn bei Ersetzung der  $y_j$  durch die  $Q_j$  die  $L_i$  sämtlich verschwinden. Ist das System  $G_i(u_1, \dots, u_p)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) von l. d. p. s. ein Nullsystem der  $L_i$ , sind ferner die  $G_i$  „univalent“ und bedecken sie jedes Nullsystem der  $L_i$ , so heißen die  $G_i$  ein Hauptnullsystem. Bedecken andererseits die  $G_i$  die  $L_i$ , sind sie univalent und haben sie die Eigenschaft, von jedem System „univalent“ l. d. p. s. bedeckt zu werden, das die  $L_i$  bedeckt, so heißen die  $G_i$  ein Hauptbedeckungssystem (principal covering set). Es gelten folgende Sätze: Jedes System von l. d. p. s., das ein nichttriviales Nullsystem besitzt, besitzt auch ein Hauptnullsystem. Jedes System von nicht sämtlich verschwindenden l. d. p. s. besitzt ein Hauptbedeckungssystem. Ein System von l. d. p. s. in  $n$  Unbestimmten mit einer Mannigfaltigkeit positiver Dimension  $< n$  besitzt ein Hauptnullsystem und ein Hauptüberdeckungssystem; die Summe ihrer Ordnungen ist  $n$ . — Kapitel III befaßt sich im wesentlichen mit dem Durchschnitt zweier Untergruppen einer gegebenen d. g. Über den Grundkörper  $F$  werden dabei dieselben Voraussetzungen wie in II gemacht. Sind  $g_1$  und  $g_2$  Untergruppen von  $\mathcal{G}_n$ , so heißt eine Untergruppe  $g'$  Durchschnitt von  $g_1$  und  $g_2$ , wenn  $g'$  gemeinsame Untergruppe von  $g_1$  und  $g_2$  ist und jede gemeinsame Untergruppe umfaßt. Der Durchschnitt zweier Untergruppen kann eine echte Teilmenge des mengentheoretischen Durchschnitts sein. Der Hauptsatz dieses Kapitels besagt, daß je zwei Untergruppen stets einen Durchschnitt besitzen. — In Kapitel IV werden schließlich in üblicher Weise Normalteiler und Faktorgruppe definiert. Der Durchschnitt zweier Normalteiler ist wieder ein Normalteiler. Sind  $g_1$  und  $g_2$  Untergruppen von  $\mathcal{G}_n$ , so gibt es eine kleinste Untergruppe  $g'$ , die  $g_1$  und  $g_2$  umfaßt.  $g'$  heißt das Produkt von  $g_1$  und  $g_2$ . Sind  $g_1$  und  $g_2$  Normalteiler mit den Ordnungen  $p$  und  $q$ , ist  $g'$  ihr Produkt und  $g''$  ihr Durchschnitt, so ist  $g'$  ein Normalteiler, und die Summe der Ordnungen von  $g'$  und  $g''$  ist gleich  $p + q$ .

Hans Joachim Kowalsky.

Mautner, F. I.: On the decomposition of unitary representations of Lie groups. Proc. Amer. math. Soc. 2, 490—496 (1951).

Let  $G$  be a connected Lie group and  $g \rightarrow U(g)$  a continuous representation of  $G$  as unitary operators on a separable Hilbert space  $H$ , and suppose that  $H$  can be written as a direct integral  $\int_{\otimes} H_t$  in the sense of von Neumann and that  $U(g)$  de-

composes into an operatorvalued function  $U(g, t)$  of  $t$  whose value is a unitary operator on  $H_t$  except for values of  $t$  on a nullset (with respect to the measure defining the direct integral). It is shown that it is possible to change  $U(g, t)$  on a nullset to  $\tilde{U}(g, t)$  such that  $g \rightarrow \tilde{U}(g, t)$  is a continuous unitary representation of  $G$  for all  $t$ . The proof depends upon the representation of  $G$  in terms of its Lie algebra and a similar result for the Lie algebra is also proved. The result obtained is a strengthening (for Lie groups) of a previous result by the author (this Zbl. 39, 22) and has consequences (to be brought out elsewhere) as to the non-existence of factors of types II and III in the decompositions of unitary representations of certain Lie groups.

Lars Gårding.

Gotô, Morikuni: On local Lie groups in a locally compact group. Ann. of Math., II. Ser. 54, 94—95 (1951).

A l'aide du théorème de K. Iwasawa sur les extensions de groupes de Lie et d'un théorème de lui-même (Gotô et Yamabe, ce Zbl. 38, 20), l'A. établit que dans tout groupe localement compact tout noyau fermé de groupe de Lie engendre un sous-groupe fermé qui est un  $(L)$ -groupe de K. Iwasawa.

Jean Riss.

Kawada, Yukiyo: On the group ring of a topological group. Math. Japon. 1, 1—5 (1948).

Soit  $L(G)$  l'algèbre des fonctions réelles sommables (pour la mesure de Haar, à droite) sur un groupe séparable localement compact. Ayant caractérisé les translations à gauche  $f(x) \rightarrow f(ax)$  comme étant (à un facteur positif constant près) les seuls opérateurs linéaires  $U$  de  $L(G)$  qui sont positifs (c. à. d. transformant toute fonction positive presque partout en une telle fonction) et vérifiant  $U(f * g) = (Uf) * g$ , l'A. en déduit que deux groupes séparables localement compacts  $G$  et  $G'$  sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme positif de  $L(G)$  sur  $L(G')$ . (Remarque de l'A.: la séparabilité n'est pas essentielle.)

Jean Riss.

Wendel, J. G.: On isometric isomorphism of group algebras. Pacific J. Math. 1, 305—311 (1951).

Soit  $G$  un groupe localement compact;  $L(G)$  et  $l(g)$  désigneront les algèbres complexes et réelles (pour le produit de composition) des fonctions sommables sur  $G$  pour la mesure de Haar (à droite). L'A. montre que si  $T$  est un isomorphisme isométrique de  $L(G)$  sur  $L(I)$  il existe un isomorphisme  $\tau$  de  $G$  sur  $I$  et un caractère  $\chi$  sur  $G$  tel que  $Tx(\tau g) = c\chi(g)x(g)$  [ $g \in G$ ,  $x \in L(G)$ ,  $c$  ne dépendant que du choix de la mesure de Haar et de  $\tau$ ]; résultat semblable si  $T$  est un isomorphisme de  $l(G)$  sur  $l(I)$  mais alors  $\chi$  est réel. La démonstration s'appuie sur un théorème de Kawada caractérisant les isomorphismes positifs de  $L(G)$  sur  $l(I)$  (v. rapport précéd.) et sur le résultat suivant: si  $T$  est un isomorphisme isométrique de  $L(G)$  sur  $L(I)$  il existe alors un caractère  $\chi$  sur  $I$  tel que  $x \rightarrow \chi \cdot Tx$  (produit de multiplication) soit un isomorphisme positif de  $l(G)$  sur  $l(I)$ .

Jean Riss.

Iseki, Kiyoshi: On simply ordered groups. Portugaliae Math. 10, 85—88 (1951).

Eine angeordnete Gruppe — dabei sei die aus einem Element bestehende Gruppe ausgeschlossen — ist bez. der Intervalltopologie eine nichtkompakte topologische Gruppe, welche lokal kompakt ist, sobald jeder Dedekindsche Schnitt ein Schnittelement besitzt, d. h. die Gruppe bez. der Intervalltopologie zusammenhängend ist. Nach einem Satz von D. Montgomery (dies. Zbl. 30, 10) ist daher eine angeordnete, bez. der Intervalltopologie zusammenhängende Gruppe isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen.

Günter Pickert.



**Yood, Bertram:** On fixed points for semi-groups of linear operators. Proc. Amer. math. Soc. 2, 225—233 (1951).

Partant du théorème suivant de Dunford: „Si  $G$  est un semigroupe d'opérateurs linéaires bornés sur un espace vectoriel normé  $X$  sur lequel (a)  $G$  est borné, (b)  $G$  est abélien, (c) les éléments de  $G$  ont un point fixe commun non nul, alors le semi-groupe  $G^*$  des transposés des éléments de  $G$  ont un point fixe non nul en  $X^*$ “ l'A. en donne une généralisation en remplaçant (a) par la condition suivante (relaxed boundedness condition, r. b. c.): si  $G_1$  est le semi-groupe constitué des moyennes des éléments de  $G$ , il existe un nombre  $K$  tel que si  $T \in G_1$ , on peut trouver  $U \in G_1$  avec  $\|U\| \leq K$  et  $\|UT\| \leq K$  et en remplaçant (c) par (c) qui est nécessaire: l'ensemble  $D(G_1) = \{x \in X \mid \inf_{T \in G_1} \|T(x)\| > 0\}$  n'est pas vide. Dans le cas

où  $G$  est un groupe, on peut s'affranchir de (b) et le résultat relatif au point fixe de  $G^*$  demeure vrai si 1)  $G$  est un groupe résoluble qui satisfait à (c) et dont tous les groupes dérivés satisfont à r. b. c. ou si 2) tout sous-ensemble fini de  $G$  est inclus dans un sous-groupe fini de  $G$  et si  $D(G_1)$  est ouvert. Applications: 1° à un problème de mesure (existence d'une mesure pour toutes les parties d'un ensemble  $S$ , finiment additive et invariante par des transformations biunivoques de  $S$  sur lui-même formant un groupe) 2° aux semi-groupes des algèbres de Banach:  $X$  est alors une algèbre de Banach commutative avec élément unité,  $M$  est un idéal maximal de  $X$  et  $x(M)$  l'homomorphisme de  $X$  sur le système de nombres complexes défini par  $M$  (cf. Gelfand, ce Zbl. 24, 320),  $S(M) = \{x \in X \mid x(M) = 1\}$  est un sous-groupe et un hyperplan. L'A. énonce alors: Si  $G$  est un semi-groupe inclus en  $X$ , satisfaisant r. b. c. (c'est-à-dire ici, il existe  $K$  tel que pour tout  $a \in G_1$ , il y ait  $b \in G_1$  avec  $\|b\| \leq K$  et  $\|ab\| \leq K$ ), alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un idéal maximal  $M$  de  $X$  tel que  $G \subset S(M)$  est que  $\inf \|a\| > 0$ ,  $a \in G_1$ . André Revuz.

**Yamabe, Hidehiko:** Note on locally compact groups. Osaka math. J. 3, 77—82 (1951).

A l'aide de résultats de Kuranishi (ce Zbl. 37, 305) l'A. montre que tout groupe localement euclidien, qui ne possède pas de sous-groupes arbitrairement petits, contient un voisinage  $V$  de l'élément neutre par chaque point duquel passe un et un seul sous-groupe à un paramètre. Si de plus pour tout entier  $n$   $V$  contient tout produit  $x_1 x_2 \dots x_n$  des qu'il contient chacun des  $x_i^n$  alors  $G$  est un groupe de Lie.

Jean Riss.

**Chevalley, C.:** On a theorem of Gleason. Proc. Amer. math. Soc. 2, 122—125 (1951).

L'objet de cette Note est de démontrer qu'un groupe  $G$  localement euclidien sans sous-groupes arbitrairement petits possède un voisinage  $V$  de l'élément neutre  $e$  tel que tout  $t \in V$  soit relié à  $e$  par un seul sous-groupe à un paramètre  $s_t(x)$ , [ $x$  réel,  $|x| \leq 1$ ,  $s_t(1) = t$ ], contenu dans  $V$ ,  $s_t(x)$  dépendant continûment de la paire  $(t, x)$ . L'A. s'appuie sur l'unicité (mais non sur l'existence) de la racine carrée établie par A. M. Gleason (voir ce Zbl. 41, 160), et remarque tout d'abord que la démonstration de ce dernier prouve plus généralement l'existence dans tout groupe localement compact sans sous-groupes arbitrairement petits d'un voisinage  $N$  de  $e$  tel que  $x, y \in N$  et  $x \neq y$  impliquent  $x^2 \neq y^2$ . Dans un tel groupe, il construit une suite décroissante  $Q_n$  de voisinages compacts de  $e$  tels que l'application  $x \rightarrow x^{2^n}$  soit un homéomorphisme de  $Q_n$  sur un sous-espace  $P_n$ , et établit le théorème pour  $V = P = \bigcap P_n$ . L'hypothèse  $G$  localement euclidien lui permet finalement de prouver que  $P$  est un voisinage de  $e$ . — Pour ce théorème voir aussi Gotô et Yamabe (ce Zbl. 42, 259).

Armand Borel.

**Godement, Roger:** Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 30, 1—110 (1951).

Soient  $G$  un groupe localement compact unimodulaire,  $e$  son élément neutre,  $ds$  la mesure

de Haar sur  $G$ . Une double représentation unitaire (d. r. u.) de  $G$  est l'objet  $(H, U_s, V_s, S)$  formé par: a) un espace hilbertien  $H$ . b) deux représentations unitaires fortement continues  $s \rightarrow U_s$  et  $s \rightarrow V_s$  de  $G$  dans  $H$  vérifiant  $U_x V_y = V_y U_x$  pour  $x, y \in G$ . c) une involution  $S$  de  $H$  telle que  $V_x = S U_x S$  pour  $x \in G$ . Soit  $L$  l'\*-algèbre des fonctions continues complexes à support compact sur  $G$  (on notera  $f \rightarrow f^\sim$  l'involution de  $L$ ). Pour  $f \in L$ , on pose  $U_f = \int U_s f(s) ds$ ,  $V_f = \int V_s f(s^{-1}) ds$ . Les applications  $f \rightarrow U_f$ ,  $f \rightarrow V_f$  sont des représentations d'\*-algèbres telles que  $U_f V_g = V_g U_f$ ,  $S U_f S = V_f^*$ . L'anneau d'opérateurs  $R^s$  (resp.  $R^d$ ) engendré par les  $U_s$  (resp.  $V_s$ ) est identique à l'anneau d'opérateurs engendré par les  $U_f$  (resp.  $V_f$ ). On a:  $R^s \subset (R^d)'$ ,  $R^d \subset (R^s)'$ . — Un exemple important de d. r. u. est le suivant. Soit  $\mu$  une mesure de Radon centrale  $\geq 0$  (de type positif) sur  $G$  [i. e.  $\mu(f * g) = \mu(g * f)$  et  $\mu(f * f^\sim) \geq 0$  pour  $f, g \in L$ ]. Alors, l'ensemble  $n$  des  $f \in L$  telles que  $\mu(f * f^\sim) = 0$  est un idéal bilatère de  $L$ , et  $L/n = L'$  est muni par passage au quotient d'une structure d'\*-algèbre (on notera  $x y$  le produit de  $x, y \in L'$ ); en outre,  $\mu(g * f)$  fournit par passage au quotient un produit scalaire sur  $L'$ , qu'on complète en un espace hilbertien  $H$ . Les translations à gauche et à droite dans  $L$  passent au quotient et on obtient dans  $H$  une d. r. u.  $U_s, V_s$ . Les opérateurs  $U_f, V_f$  correspondants ne sont autres que les opérateurs de multiplication à gauche et à droite dans l'algèbre  $L'$ ,

prolongés par continuité à  $H$ . Dans ce cas, on a  $R^s = (R^d)'$ ,  $R^d = (R^s)'$ , donc  $R^s \cap R^d = R^h$  est le centre commun de  $R^s$  et de  $R^d$ . La démonstration de ce théorème est quasi-algébrique et susceptible de généralisations faciles (cf. la théorie, à paraître ultérieurement, des algèbres unitaires de l'A.); une définition essentielle est la suivante:  $x \in H$  est dit borné s'il existe des opérateurs continus  $U_x, V_x$  tels que  $U_x f = V_f x$ ,  $V_x f = U_f x$  pour  $f \in L'$ . Les  $U_x$  (resp.  $V_x$ ) pour  $x$  borné forment un idéal bilatère de  $R^s$  (resp.  $R^d$ ). Pour un projecteur  $E \in R^s$ , posons  $\Delta(E) = \|x\|^2$  si  $E = U_x$  pour un  $x$  borné,  $\Delta(E) = +\infty$  dans le cas contraire; alors,  $\Delta(E)$  est une weight-fonction non purement infinie. — Soit  $H^\natural$  le sous-espace vectoriel fermé des éléments centraux de  $H$ , c'est-à-dire tels que  $U_s V_s x = x$  pour tout  $s \in G$ , et soit  $x^\natural$  la projection, orthogonale de  $x \in H$  sur  $H^\natural$ , qui est aussi l'unique point d'intersection de  $H^\natural$  et de l'ensemble convexe fermé de  $H$  engendré par les  $U_s V_s x$ . Si  $x \in L'$  et  $y \in L'$ , on a  $(x y)^\natural = (y x)^\natural$ . Si  $x \in H$  est borné,  $x^\natural$  est borné, et le plus petit ensemble convexe faiblement fermé de  $R^s$  contenant les  $U_s U_x U_s^{-1}$  rencontre  $R^\natural$  au point unique  $U_x^\natural$ . — Après avoir donné d'intéressantes propriétés des anneaux d'opérateurs de classe finie, l'A. pose diverses définitions. On dit que  $\mu$  est de classe finie si  $R^s$  (ou  $R^d$ ) est de classe finie; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les  $U_s(H^\natural)$ ,  $s \in G$ , engendrent  $H$ ; on a alors  $U_x^\natural = U_x$  pour  $x \in H$ ,  $x$  borné. Le groupe  $G$  est dit de classe finie si toute mesure centrale  $\geq 0$  sur  $G$  est de classe finie; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe dans  $G$  un système fondamental de voisinages de  $e$  invariants par les automorphismes intérieurs. — Le point central de ce Mémoire est la définition suivante: on appelle caractère de  $G$  toute mesure centrale  $\geq 0$  définissant une d. r. u. irréductible de  $G$  (i. e. telle que  $R^s$  et  $R^d$  soient des facteurs). Une introduction détaillée explique, en partant du cas des groupes compacts, et tenant compte de l'expérience acquise dans le cas du groupe de Lorentz par exemple, pourquoi une telle définition semble à peu près satisfaisante pour une théorie générale des caractères (en fait, l'A. a développé depuis une théorie plus vaste, qui permet de résoudre la plupart des problèmes posés dans cette introduction). Définissant la classe d'un caractère par la classe de  $R^s$  et  $R^d$ , on a les résultats suivants: le cas  $(III_\infty)$  ne se présente jamais; il existe des caractères de classe  $(I_n)$  ( $n \leq +\infty$ ),  $(II_1)$ ,  $(II_\infty)$ ; un caractère est de classe finie si et seulement si il est de la forme  $\chi(s) ds$ ,  $\chi$  étant une fonction continue. — Soit  $K$  l'ensemble convexe et faiblement compact formé par les fonctions continues centrales  $\geq 0$  prenant en  $e$  une valeur  $\leq 1$ ; alors, les points extrémaux non nuls de  $K$  sont les caractères de classe finie  $\chi$  de  $G$  tels que  $\chi(e) = 1$ . Si  $G$  est de classe finie, le théorème de Krein-Milman montre donc que, pour tout  $s \neq e$ , il existe un caractère  $\chi$  de  $G$  vérifiant  $\chi(s) \neq \chi(e)$ . L'équation fonctionnelle des caractères des groupes compacts, la transformation de Fourier des groupes abéliens, admettent des généralisations dans le cas des caractères de classe finie (pour le cas général, cf. un mémoire ultérieur de l'A.). — Si  $s \rightarrow T_s$  est une représentation unitaire irréductible de dimension finie  $n$  de  $G$ , la fonction  $\text{Sp}(T_s)$  est un caractère de  $G$  définissant une d. r. u. de dimension  $n^2$ . Réciproquement, si  $\chi(s)$  est un caractère de  $G$  définissant une d. r. u. de dimension  $n^2$ , il existe une représentation unitaire irréductible  $T_\chi$  et une seule à une équivalence près telle que  $\chi(s) = \text{Sp}(T_\chi)$ . La topologie faible des caractères définit donc une topologie sur l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de dimension  $n$  de  $G$ ; l'A. montre que cette topologie est localement compacte. — Pour qu'une mesure centrale  $\geq 0$   $\mu$  sur  $G$  soit un caractère de classe  $(I_\infty)$  de  $G$ , il faut et il suffit qu'on puisse trouver une représentation unitaire irréductible  $T_\mu$  de  $G$  de dimension infinie possédant les propriétés suivantes: a) pour toute  $f \in L$ , l'opérateur



$T_f = \int T_x f(x) dx$  est du type d'Hilbert-Schmidt; b) pour  $f, g \in L$ , on a  $\int \tilde{g} * f(x) d\mu(x) = \text{Tr}(T_g^* T_f)$ . Dans ces conditions, la représentation  $T_x$  est entièrement déterminée à une équivalence près. L'A. détermine explicitement des caractères de classe ( $I_\infty$ ) d'un sous-groupe particulier du groupe linéaire; ces caractères, d'ailleurs, ne sont pas absolument continus par rapport à la mesure de Haar; la nécessité de ne pas considérer les caractères comme des fonctions est donc établie. — Dans un appendice, l'A. considère un groupe de Lie connexe semi-simple réel  $G$ ; soient  $D_1$  la complexification de l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $D$  l'algèbre enveloppante de  $D_1$ ,  $D^h$  le centre de  $D$ ,  $D^0$  le sous-espace de  $D$  engendré par les  $[X, Y]$ ,  $X \in D$ ,  $Y \in D$ . Alors,  $D$  est la somme directe de  $D^h$  et  $D^0$ . Soit  $X \mapsto X^h$  le projecteur de  $D$  sur  $D^h$  ainsi défini. On a:  $(XY)^h = (YX)^h$ , et  $(XY)^h = XY^h$  si  $X \in D^h$ ; une forme linéaire  $f$  sur  $D$  est centrale si et seulement si  $f(X) = f(X^h)$ ; elle se réduit sur  $D^h$  à un caractère de  $D^h$  si et seulement si  $f(X^h Y) = f(X) f(Y)$ , auquel cas l'A. dit que  $f$  est un caractère de  $D$ . (Cette définition a été donnée en même temps par Harish-Chandra, ce. Zbl. 42, 127.) Soit  $s \rightarrow T_s$  une représentation linéaire irréductible continue de dimension finie de  $G$ ; soit  $X \rightarrow T_x$  la représentation linéaire associée de  $D$ . Alors,  $\text{Sp}(T_x)$  est un caractère de  $D$ , qui détermine  $T_s$  à une équivalence près.

Jacques Dixmier.

### Verbände. Ringe. Körper:

Ellis, David: Autometrized boolean algebras. II.: The group of motions of  $B$ . Canadian J. Math 3, 145—147 (1951).

(Teil I s. dies. Zbl. 42, 27.)

Haimo, Franklin: Some limits of Boolean algebras. Proc. Amer. math. Soc. 2, 566—576 (1951).

The definition of inverse and direct systems of groups can be generalized, in an obvious way, to the case of other abstract algebras. In the reviewed paper the author examines inverse and direct systems of Boolean algebras. The inverse (direct) limit  $B^i(B^d)$  of an inverse (direct) system  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$  of Boolean algebra is also a Boolean algebra. If all  $B_\alpha$  are  $m$ -complete, and if all homomorphisms  $\Pi_{\alpha\beta}$  defining the inverse system  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$  are  $m$ -additive, then the inverse limit  $B^i$  is also  $m$ -additive. Every infinite Boolean algebra is isomorphic to the inverse limit of an inverse system  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$  where the directed set  $A$  has no final element. In the direct case, ideals in the limit algebra  $B^d$  will turn out to be direct limits of like objects. Ideals in the inverse limit are also examined. — Let  $S(B)$  denote the Stone bicomact space of all prime ideals in a Boolean algebra  $B$ . Each homomorphism of a Boolean algebra  $B$  into another  $B'$  determines a continuous mapping of  $S(B')$  into  $S(B)$ . Consequently each inverse (direct) system  $\{B_\alpha\}$  of Boolean algebras determines a direct (inverse) system  $\{S(B_\alpha)\}$  of Stone spaces. If  $\{B_\alpha\}$  is an inverse system with the limit algebra  $B^i$ , and if  $T$  is the direct limit space of the corresponding direct system  $\{S(B_\alpha)\}$ , then there is a natural one-to-one map of  $T$  onto a closed subset of  $S(B^i)$ ; consequently  $T$  can be topologized in a natural way. If  $\{B_\alpha\}$  is a direct system, with the limit algebra  $B^d$ , and if  $T$  is the limit space of the corresponding inverse system  $\{S(B_\alpha)\}$ , then  $T$  is homeomorphic to  $S(B^d)$ .

Roman Sikorski.

Hostinsky, L. Aileen: Endomorphisms of lattices. Duke math. J. 18, 331—342 (1951).

Oberflächliche Betrachtung der Verbandstheorie scheint es nahe zu legen, als Verbandshomomorphismen eindeutige Abbildungen zu definieren, die Summe und Durchschnitt erhalten. Doch haben z. B. die von Gruppenhomomorphismen im Untergruppenverbände induzierten Abbildungen nur in extremen Fällen diese Eigenschaft; man vergleiche etwa Zappas Untersuchungen dieses Phänomens (dies. Zbl. 34, 14, 43, 25). In der vorliegenden Untersuchung hat Verf. infolgedessen Homomorphismen von Verbänden derart definiert, daß die von Gruppenhomomorphismen im Untergruppenverbände induzierten Abbildungen unter diesen Begriff fallen, und daß man die Homomorphismensätze der Gruppentheorie übertragen kann. — Das Hauptziel dieser Untersuchung ist aber die Über-

tragung der Zerfällungssätze für Endomorphismen; dies sind Verallgemeinerungen des Fittingschen Lemmas (R. Baer, dies. Zbl. 34, 13). Ist  $\sigma$  ein Verbandsendomorphismus [im Hostinskyschen Sinne], dann bilden die Kerne der Endomorphismen  $\sigma^i$  eine aufsteigende Kette, deren Summe das Radikal  $r(\sigma)$  ist.  $\sigma$  induziert einen Endomorphismus im Radikal und einen Isomorphismus modulo  $r(\sigma)$ . In Verallgemeinerung des Fittingschen Lemmas zeigt Verf. unter Annahme einer recht schwachen Kettenbedingung die Existenz eines Komplements von  $\sigma$ , d. h. eines unter  $\sigma$  invarianten Komplements von  $r(\sigma)$ ; und sie zeigt weiter, daß derartige Komplemente eindeutig bestimmt sind, wenn sie nur gewisse Universalitätseigenschaften haben.

*Reinhold Baer.*

Iseki, Kiyoshi: On closure operation in lattice theory. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 318—320, Indagationes math. 13, 318—320 (1951).

$\mathfrak{R}$  sei eine teilweise geordnete Menge mit den Hüllenaxiomen  $A \subset \bar{A}$ ,  $A \subset B \rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$  und  $\bar{\bar{A}} = A$ . Ist  $\mathfrak{R}$  ein Halbverband, in dem zu je zwei Elementen stets die Vereinigung existiert, so zeigt Verf., daß die Hüllenaxiome gleichwertig durch eines der folgenden Axiome ersetzt werden können:  $A \cup \bar{B} \subset A \cup B$  bzw.  $\bar{A} \cup B \subset A \cup B$ . Eine entsprechende Äquivalenz ergibt sich für die Kerne, wenn  $\mathfrak{R}$  ein Halbverband ist, in dem zu zwei Elementen stets der Durchschnitt existiert. Wegen des Dualitätsprinzips hätte sich ein neuer Beweis erübrigt. Es folgt eine triviale Bemerkung für den Fall, daß  $\mathfrak{R}$  ein Boolescher Verband mit Einselement ist.

*Hans-Joachim Kowalsky.*

Takeuchi, Kensuke: On maximal proper sublattices. J. math. Soc. Japan 2, 228—230 (1951).

Verf. beantwortet das Problem 18 von Birkhoff (Lattice theory, 2. Aufl. 1948, S. 46; dies. Zbl. 33, 101): In einem Booleschen Verband läßt sich jeder echte Teilverband zu einem maximalen echten Teilverband erweitern. In einem distributiven Verband ist das nicht immer der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt: Der Verband bestehe aus den beiden unendlichen Ketten  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ ,  $b_0 < b_1 < b_2 < \dots$  und es sei  $b_i < a_i$ ; dann läßt sich der aus den  $a_i$  allein bestehende Teilverband nicht zu einem maximalen erweitern.

*Helmuth Gericke.*

Kuroš, A. G.: Der gegenwärtige Stand der Theorie der Ringe und Algebren. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 2, 3—15 (1951) [Russisch].

Ein Vortrag vor der Moskauer mathematischen Gesellschaft über neuere Ergebnisse und Tendenzen in der Theorie der Algebren und Ringe. — Nach einer kurzen Übersicht über die Entwicklungsgeschichte der Algebrentheorie weist Verf. darauf hin, daß in den letzten Jahren 3 Verallgemeinerungen der klassischen Theorie assoziativer endlicher Algebren im Vordergrund stehen: a) Nicht-assoziative Algebren, b) unendliche Algebren, c) assoziative Ringe mit Operatoren. — In der Theorie nicht-assoziativer Algebren hat Verf. freie nicht-assoziative Algebren und freie Zerlegungen von Algebren untersucht [Mat. Sbornik, n. Ser. 20, 239—262 (1947)]. Er hat u. a. den grundlegenden Satz bewiesen, daß jede Unteralgebra einer freien nicht-assoziativen Algebra selbst frei ist. Es läßt sich zeigen, daß jede freie nicht-assoziative Algebra mit höchstens abzählbar vielen Erzeugenden in eine solche mit einer Erzeugenden eingebettet werden kann. Jede nicht-assoziative Algebra läßt sich als eine Faktoralgebra einer freien nicht-assoziativen Algebra darstellen. Für Algebren, die dabei durch endlich viele Relationen definiert werden, hat A. I. Žukov (dies. Zbl. 38, 22) das Identitätsproblem (d. h. die Frage nach der Entscheidung, wann zwei formale Ausdrücke auf Grund der definierenden Relationen einander gleich sind) gelöst, indem er einen allgemeinen Algorithmus zur Beantwortung dieser Frage angab. (Für assoziative Algebren ist das analoge Problem in diesem Sinne nicht entscheidbar, wie man aus einem Resultat von A. A. Markov über die Unentscheidbarkeit des Identitätsproblems in Halbgruppen entnehmen kann.) — In der Theorie nicht-assoziativer Algebren sind besonders die Lieschen Algebren näher untersucht worden. I. D. Ado hat gezeigt [Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. Ser. 7, 1—43 (1934/35); dies. Zbl. 14, 347; Uspechi mat. Nauk 2, Nr. 6, 159—173 (1947)], daß jede Liesche Algebra endlichen Ranges über dem komplexen Körper eine treue Darstellung in einer assoziativen Algebra  $\mathfrak{A}$  endlichen Ranges über demselben Körper gestattet. ( $\mathfrak{A}$  wird durch die Einführung einer neuen Multiplikation  $[a, b] = ab - ba$  zu einer Lieschen Algebra.) Der Satz von I. D. Ado wurde von Harish-Chandra (dies. Zbl. 32, 252) für beliebige Grundkörper der Charakteristik 0 verallgemeinert. G. Birkhoff [Ann. of Math.



II. Ser. 38, 526—532 (1937); dies. Zbl. 16, 244] und E. Witt [J. reine angew. Math. 177, 152—160 (1937); dies. Zbl. 16, 244] haben eine treue Darstellbarkeit einer Lieschen Algebra  $\mathfrak{L}$  über einem beliebigen Körper in einer assoziativen Algebra  $\mathfrak{A}$  über demselben Körper gezeigt; doch folgt aus ihren Beweisen im Falle einer  $\mathfrak{L}$  vom endlichen Range nicht, daß auch  $\mathfrak{A}$  vom endlichen Range gewählt werden kann. Das Ergebnis von Birkhoff-Witt wurde von Kuročkin (dies. Zbl. 42, 32) folgendermaßen verallgemeinert: Jeder Liesche Ring mit einem Operatorbereich läßt sich treu in einem assoziativen Ring mit demselben Operatorbereich darstellen. — Es folgt eine kurze Übersicht über die Ergebnisse in der Theorie der Jordan-Algebren. Ihre Struktur wurde von A. Albert (dies. Zbl. 29, 10) untersucht. — In der Theorie der Alternativringe und Alternativkörper [das sind solche Ringe, in denen das Assoziativgesetz nur für Elementetripel mit zwei gleichen Elementen gilt, also:  $a(ab) = (aa)b$ ;  $(ba)a = b(aa)$ ;  $a(ba) = (ab)a$ ] sind in den letzten Jahren interessante Ergebnisse erzielt worden. R. Schafer hat gezeigt [Bull. Amer. math. Soc. 49, 549—555 (1943)], daß, falls ein nicht-assoziativer Alternativkörper  $K$  von endlichem Range über seinem Zentrum  $P$  ist, dieser Rang gleich 8 und  $K$  eine sogenannte Cayley-Dickson-Algebra über  $P$  ist. L. A. Skornjakov bewies [Ukrain. Mat. Žurn. 2, 70—85, 94—99 (1950)], daß ein nicht-assoziativer Alternativkörper notwendig von endlichem Range über seinem Zentrum sein muß. — Eine assoziative Algebra heißt lokal-endlich, wenn jede endliche Untermenge in einer Unteralgebra endlichen Ranges enthalten ist; eine assoziative Algebra heißt algebraisch, wenn jedes Element einer algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus dem Grundkörper genügt. Verf. hat 1941 [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 5, 233—247 (1941)] die Frage aufgeworfen, ob jede algebraische Algebra lokal-endlich ist. Das weitgehendste Ergebnis in dieser Richtung stammt von I. Kaplansky (dies. Zbl. 35, 303): Erfüllen die Elemente einer algebraischen Algebra identisch eine nicht-triviale Relation, (d. h. eine solche, die nicht aus dem Assoziativgesetz folgt), so ist die Algebra lokal-endlich. *Leo Kaloujnine.*

Smiley, M. F.: On the ideals and automorphisms of non-associative rings. Proc. Amer. math. Soc. 2, 138—143 (1951).

$A$  sei im folgenden ein nichtassoziativer Ring.  $M_r$  sei die Menge aller Rechtsmultiplikationen  $R_a (x R_a = xa, x \in A, a \in A)$ ,  $M_r^*$  der dadurch erzeugte Ring. Ebenso sind  $M_l$  und  $M_l^*$  durch die Linksmultiplikationen  $L_a$  erklärt.  $M$  sei der durch  $M_r \cup M_l$  erzeugte Multiplikationsring von  $A$ . Die Elemente der Form  $R_{xy} - R_x R_y$  erzeugen in  $M_r^*$  ein Rechtsideal  $N_r$ , schließlich sei  $N$  das durch die  $R_{xy} - R_x R_y$ ,  $L_{xy} - L_y L_x$ ,  $R_x - L_x$  erzeugte Rechtsideal von  $M$  (der Annihilator von 1, falls  $A$  ein Einselement enthält).  $A$  erfüllt die Bedingung  $U_1$  bzw.  $U$ , wenn aus  $R_x = 0$  stets  $x = 0$  und  $M_r \cap N_r = 0$  bzw.  $M_r \cap N = 0$  folgt. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn  $A$  eine Linkseinheit bzw. Einheit besitzt. Erfüllt nun  $A$  die Bedingung  $U$ , so wird durch die Zuordnung, die dem Ideal  $I$  aus  $A$  das Rechtsideal  $I^* \supset N$  aller  $R_a + v$  mit  $a \in I$ ,  $v \in N$ , zuordnet, eine Verbandsisomorphie des Verbandes aller  $I \subset A$  auf den Verband aller  $I^* \supset N$  aus  $M$  erzeugt. Erfüllt  $A$  die Bedingung  $U_1$ , so erhält man analog eine Verbandsisomorphie aller Rechtsideale  $I \subset A$  auf alle Rechtsideale  $I^* \supset N_r$  aus  $M_r^*$ . Erfüllt  $A$  wieder  $U$  und ist  $H$  die Gruppe aller Automorphismen von  $M$ , die jede der Mengen  $N$ ,  $M_r$  und  $M_l$  auf sich abbildet, so ist die Gruppe  $G$  der Automorphismen von  $A$  isomorph  $H$ . Zu jedem  $S \in G$  gibt es dann und nur dann ein nichtsinguläres Element  $\mu_0 \in M$  mit  $S^{-1} \mu S = \mu_0^{-1} \mu \mu_0$  für alle  $\mu \in M$ , wenn  $S$  in  $M$  liegt.

*Gottfried Köthe.*

Neumann, B. H.: Embedding non-associative rings in division rings. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 241—256 (1951).

Unter einem Ring wird hier ein System  $R$  mit zwei Kompositionen, Addition und Multiplikation, verstanden, die den folgenden Bedingungen genügen: Hinsichtlich der Addition ist  $R$  eine kommutative Gruppe; die Multiplikation ist eindeutig und mit der Addition durch die beiden Distributivgesetze verknüpft. Dagegen wird auf die Gültigkeit des Assoziativgesetzes der Multiplikation verzichtet. Ein derartiger Ring  $R$  läßt sich dann und nur dann in einen Ring  $S$  einbetten, in dem die Gleichungen  $ax = b$  und  $ya = b$  mit  $a \neq 0$  stets wenigstens eine Lösung haben, wenn alle von Null verschiedenen Elemente in  $R$  dieselbe Ordnung als Elemente der Additionsgruppe von  $R$  haben. Weiter läßt sich  $R$  dann und nur dann in einen Ring  $T$  einbetten, in dem die Gleichungen  $ax = b$  und  $ya = b$

mit  $a \neq 0$  sich auf eine und nur eine Art lösen lassen, wenn es in  $R$  keine Nullteiler gibt. Diese und einige ähnliche in der vorliegenden Abhandlung bewiesenen Sätze sind um so bemerkenswerter, als die entsprechenden Sätze für assoziative Ringe bekanntlich falsch sind.

Reinhold Baer.

**Kaplansky, Irving:** A theorem on division rings. Canadian J. Math. 3, 290—292 (1951).

The author proves the following theorem: Let  $A$  be a division ring with center  $Z$  and suppose that for every  $x \in A$ , some power of  $x$  is in  $Z$ , then  $A$  is commutative. It contains Wedderburn-Jacobson, Noether-Jacobson and Hua's theorems as special cases. As his proof depends deeply on a number of preliminary results, it would be desirable to review the paper in an independent spirit. 1) Suppose that  $A$  is of characteristic  $p \neq 0$ , if for each  $x \in A$ , there is an integer  $s$  such that  $x^{p^s} \in Z$ , then  $A$  is commutative. In fact, suppose that  $x \notin Z$ . Let  $v = x^{p^{s-1}} \notin Z$  but  $v^p \in Z$ . We define  $u' = [u, v]$ ,  $u^{(i)} = [u^{(i-1)}, v]$ . Let  $u$  be an element such that  $u' \neq 0$ . Then  $u^{(p)} = 0$ . Let  $k$  be the integer such that  $u^{(k-1)} \neq 0$ ,  $u^{(k)} = 0$ . Define  $z = v u^{(k-2)} (u^{(k-1)})^{-1}$ . Then  $z' = v$ , i. e.  $v^{-1} z v = z + 1$ . Suppose  $z^{p^m} \in Z$ , then  $z^{p^m} = z^{p^m} + 1$ , which is impossible. 2) Let  $\Pi$  be the primefield of  $A$  which characteristic  $p \neq 0$ . An element  $x$  which is algebraic to  $\Pi$  belongs to  $Z$ . Since  $x$  and  $x^p$  satisfy the same equation in  $\Pi$  by a well-known theorem we have an element  $y$  such that  $x^p = y x y^{-1}$ . Then  $\Pi(x, y)$  is a finite field which is commutative and it contradicts  $x^p = y x y^{-1}$ . 3. Let  $l$  be the least integer such that  $x^{p^l} = \alpha \in Z$ . Then  $A$  is of characteristic  $p \neq 0$  and  $l$  is a power of  $p$ . Let  $g(y)$  be the irreducible polynomial in  $Z$  and  $g(x) = 0$ . Suppose that  $g(y) = 0$  has at least two roots in an extended field, let them be  $x$  and  $z$ . From  $x^l = z^l$ ,  $(x+1)^m = (z+1)^m$  we have  $x = \rho z$ ,  $z+1 = y(x+1)$  where  $\rho^l = 1$ ,  $y^m = 1$ , consequently  $(\rho - \eta)x = \eta - 1$  and  $x$  is algebraic with respect to  $\Pi$ . If  $\Pi$  is of finite characteristic,  $x$  belongs to the center by 2). If  $\Pi$  is of characteristic 0, we let  $z + n = \eta_n(x + n)$ , where  $\eta_n$  is a root of unity, we deduce  $x = n(\eta_n - 1)(\rho - \eta_n)^{-1}$ . That is, the field  $\Pi(x, \rho)$  contains infinitely many distinct roots of unity which is impossible. Therefore  $g(y)$  has only one root in any extended field. Thus to each element  $x$  there is an integer  $s$  such that  $x^{p^s} \in Z$ , the theorem follows from 1).

Loo-Keng Hua.

**Amitsur, A. S. and J. Levitzki:** Remarks on minimal identities for algebras. Proc. Amer. math. Soc. 2, 320—327 (1951).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 40, 11) haben Verf. die Minimalidentitäten untersucht, aus denen man die in einem Ringe  $R$  geltenden Identitäten  $f(x_1, \dots, x_m) = 0$  aufbauen kann. Vorliegende Arbeit ergänzt die frühere. Für  $R = A_n$  (voller Ring der  $n$ -reihigen Matrizen) waren die Sonderfälle mit dem Grundkörper  $GF(2)$  und  $n = 1, 2$  übrig geblieben. Es wird gezeigt, daß dann für  $n = 1$  nur Minimalpolynome  $\sum \lambda_i (x_i^2 + x_i)$  auftreten. Ist  $n = 2$ , so setzen sich alle Minimalpolynome linear zusammen aus: Standardpolynome von je 4 Argumenten,  $H_1, H_2, H_3$  mit je 3 Argumenten und  $Q_1, Q_2$  mit je zwei Argumenten. Dabei ist  $H_j = G_i + G_k$  (also  $H_1 + H_2 + H_3 = 0$ ).  $G_i = x_j x_i x_k + x_k x_i x_j + p_i$ , wobei  $p_i$  die Summe der 12 Monome ist, die in  $x_i$  quadratisch und in  $x_j, x_k$  linear sind; die Polynome  $Q$  sind vom Typus  $x y^3 + y x y^2 + y^2 x y + y^3 x + x y^2 + y^2 x$ . Ferner sei  $B$  eine Algebra mit einem Radikal vom Index  $r$  und  $n^2$  sei das Maximum der Ordnungen der einfachen Ringe, in die der Restklassenring von  $B$  nach seinem Radikal zerfällt. Es wird gezeigt, daß der Grad  $m$  eines Minimalpolynoms über  $B$  der Ungleichung  $2n \leq m \leq 2nr$  genügen muß und daß es Algebren  $B$  gibt, für die sich die Ungleichung nicht verschärfen läßt.

Friedrich Wilhelm Levi.

**Smiley, M. F.:** Some questions concerning alternative rings. Bull. Amer. math. Soc. 57, 36—43 (1951).

An Hand eines Literaturverzeichnisses von 55 Arbeiten, die bis Ende 1950 erschienen sind, gibt Verf. eine gedrängte, inhaltsreiche Übersicht über die wichtigsten bis dahin bekannten Sätze über alternative Ringe und sich anschließende offene Fragen, die nach geometrischen, algebraischen und topologischen Gesichtspunkten gegliedert ist; hier können wir nur einige erwähnen. Durch die neuere Arbeit von R. H. Bruck und E. Kleinfeld [Proc. Amer. math. Soc. 2, 878—890 (1951); vgl. auch dies. Zbl. 42, 32], in der bewiesen wird, daß die Cayley-Zahlen der einzige nicht-assoziative alternative Divisionsring mit von 2 verschiedener Charakteristik sind, werden einige der offenen Fragen, insbesondere der geometrischen und topologischen, beantwortet. Der Satz von A. A. Albert, daß jede alternative nichtassoziative Divisionsalgebra mit von 2 verschiedener Charakteristik, in der jedes Element über dem Zentrum einer quadratischen



Gleichung genügt, eine Cayley-Algebra ist, wurde vom Verf. von der Einschränkung hinsichtlich der Charakteristik befreit. Der Zusammenhang zwischen dem Bestehen einer Polynomidentität und der Endlichkeit der Dimension ist für alternative Ringe noch der Aufhellung bedürftig, ebenso, von speziellen Resultaten abgesehen, die Rolle des kommutativen Gesetzes der Multiplikation. — Die algebraischen Probleme beziehen sich auf die Frage, wieweit sich die Struktursätze assoziativer Ringe — Idealtheorie, Zerlegung in direkte bzw. subdirekte Summanden — auf alternative Ringe übertragen; dabei spielt der Begriff des Perlis-Jacobson Radicals eine grundlegende Rolle. Die Frage nach der Natur primitiver alternativer Ringe und nach einer allgemeinen Darstellungstheorie in Analogie zum assoziativen Fall ist im wesentlichen noch ungelöst. — Die topologischen Probleme beziehen sich auf eine topologische Charakterisierung der Cayley-Zahlen, die bei Heranziehung des Satzes von Bruck und Kleinfeld durch die topologische Charakterisierung des Grundkörpers geleistet wird, als Körper reeller Zahlen oder als  $p$ -adischer Körper.

Ruth Moufang.

**Ballieu, Robert et Marie-Jeanne Schuind:** Anneaux à module de type  $(p^m, p^{m+n})$ . Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I 65, 33—40 (1951).

Verf. klassifizieren die Ringe, deren additive Gruppe vom Typus  $(p^m, p^{m+n})$  ( $m > 0, n \geq 0$ ) ist, und stellen die Anzahlen der voneinander verschiedenen Ringe fest.

Georg Reichel.

**Krull, Wolfgang:** Jacobson'sche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie. Math. Z. 54, 354—387 (1951).

Soient  $R$  un anneau commutatif avec élément unité,  $\alpha$  un idéal de  $R$ ; l'A. dit que  $R$  est un anneau de Jacobson lorsque l'intersection  $\cap_j \alpha_j$  des idéaux maximaux contenant  $\alpha$  est identique au radical  $\mathfrak{r}(\alpha)$  (intersection des idéaux premiers contenant  $\alpha$ ) pour tout  $\alpha$ . L'A. a d'abord obtenu pour ces anneaux le résultat suivant, publié indépendamment par O. Goldman (ce Zbl. 42, 264): toute extension  $S = R[a_1, \dots, a_n]$  de type fini de  $R$  est un anneau de Jacobson, et pour tout homomorphisme de  $S$  sur un corps  $K$ , l'image  $K_0$  de  $R$  est telle que  $K$  soit algébrique sur  $K_0$  („Nullstellensatz“ de Hilbert, généralisé). L'A. montre ensuite que si  $P_\omega$  est l'anneau des polynômes à une infinité dénombrable d'indéterminées sur un corps  $K$ ,  $P_\omega$  n'est pas un anneau de Jacobson lorsque  $K$  est fini ou dénombrable; au contraire, si  $K$  n'est pas dénombrable,  $P_\omega$  est un anneau de Jacobson pour lequel le „Nullstellensatz“ de Hilbert est valable. Dans les paragraphes suivants sont étudiées les relations entre anneaux noethériens et anneaux de Jacobson, notamment lorsqu'il s'agit d'anneaux noethériens normaux, c'est-à-dire où tout idéal premier a une dimension déterminée. Il s'y rattache l'étude des relations entre idéaux premiers de  $R$  et idéaux premiers de l'anneau de polynômes  $R[x]$ ; nous devons renvoyer au mémoire pour l'énoncé des profonds et importants résultats qu'obtient l'A. dans cette théorie. Enfin le travail se termine par une discussion de la question suivante, qui reste ouverte et se rattache à des problèmes difficiles de la théorie des anneaux locaux: si  $R$  est un anneau noethérien normal, et en même temps un anneau de Jacobson, est-il vrai que l'anneau de polynômes  $R[x]$  soit normal?

Jean Dieudonné.

**Buck, R. Creighton:** A factoring theorem for homomorphisms. Proc. Amer. math. Soc. 2, 135—137 (1951).

Verf. beweist den folgenden Satz, der eine bekannte Tatsache über Faktorisierung von Homomorphismen verallgemeinert. Es seien  $A, B_1, B_2, \dots, B_n$  und  $C$  Algebren, wo die  $B_i$  einfach sind, ferner bezeichne man mit  $\varphi_i$  und  $\psi$  Homomorphismen von  $A$  auf  $B_i$  bzw. in  $C$  mit den Kernen  $K_i$  bzw.  $K$ . Dann ist  $K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_n \subset K$  die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Homomorphismen  $\theta_i$  von  $B_i$  in  $C$  mit der Eigenschaft  $\psi = \sum \theta_i \varphi_i$ . Als eine Anwendung dieses Satzes gibt Verf. einen Beweis für Chevalley-Jacobson's „density theorem“ über irreduzible Endomorphismenringe.

Ladislav Fuchs.

**Schafer, R. D.:** A theorem on the derivations of Jordan algebras. Proc. Amer. math. Soc. 2, 290—294 (1951).

Nach Hochschild [Amer. J. Math. 64, 677 (1942)] ist für eine assoziative Liesche Algebra  $A$  der Charakteristik 0 die abgeleitete Algebra dann und nur dann

halbeinfach (oder die Nullalgebra), wenn  $A$  selbst halbeinfach ist. Verf. zeigt, daß entsprechend für eine Jordansche Algebra  $A$  der Charakteristik 0 die abgeleitete Algebra dann und nur dann halbeinfach (oder die Nullalgebra) ist, wenn  $A$  selbst halbeinfach mit lauter einfachen Komponenten von 3 verschiedener Dimension über dem Zentrum ist.

Helmut Hasse.

Penico, A. J.: The Wedderburn principal theorem for Jordan algebras. Trans. Amer. math. Soc. 70, 404—420 (1951).

Let  $\mathfrak{A}$  be a Jordan algebra, i. e., a commutative and non-associative algebra of finite dimension over a field  $\mathfrak{F}$ , such that  $a(a^2b) = a^2(ab)$  holds for all  $a, b \in \mathfrak{A}$ . From an associative algebra  $\mathfrak{A}^*$  over a field  $\mathfrak{F}$  not of characteristic 2 one may derive a Jordan algebra  $\mathfrak{A}$ , called special Jordan algebra, by replacing the multiplication  $a \cdot b$  in  $\mathfrak{A}^*$  by  $ab = \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a)$ . Special Jordan algebras were studied by A. A. Albert (this Zbl. 29, 10), while in the present paper the general Jordan algebras are considered. For Jordan algebras  $\mathfrak{A}$  over a field of characteristic 0 the author proves the analogue of the well-known Wedderburn principal theorem for associative algebras: Denoting by  $\mathfrak{N}$  the radical of  $\mathfrak{A}$ , there exists a subalgebra  $\mathfrak{S}$  of  $\mathfrak{A}$  such that  $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} = 0$  and  $\mathfrak{S} \cong \mathfrak{A} - \mathfrak{N}$ . In the proof first the problem is reduced to the case  $\mathfrak{N}^2 = 0$  and then this case is solved by discussing the split Jordan algebras.

Ladislaus Fuchs.

Kähler, Erich: Über rein algebraische Körper. Math. Nachr. 5, 69—92 (1951).

Verf. stellt ein Programm zur einheitlichen Behandlung auf arithmetischer Grundlage aller der Körper  $K$  auf, die durch  $n$ -fach transzendente und darauffolgende endlich algebraische Erweiterung aus ihrem Primkörper entstehen (rein algebraische Körper). Dieses ist vor allem dadurch ausgezeichnet, daß beispielsweise im Falle eines algebraischen Funktionenkörpers im Gegensatz zu den bisher üblichen Ansätzen der Konstantenkörper nicht mehr eine von vorn herein ausgezeichnete Rolle spielt. — Von den zahlreichen neuen Begriffen können hier nur die wichtigsten hervorgehoben werden. Ein Bereich  $S$  in  $K$  ist ein die 1 enthaltender Unterring mit Teilerkettensatz, in welchem alle Nicht-Einheiten ein Ideal  $\mathfrak{P}$  bilden;  $\mathfrak{P}$  ist stets ein Primideal.  $S$  heißt abgeschlossen, wenn es keinen Erweiterungsbereich von  $S$  mit dem gleichen Quotientenkörper gibt. Alle Ideale eines abgeschlossenen Bereichs sind Hauptideale.  $S$  heißt rein algebraisch, wenn seine Elemente als Quotienten von Elementen eines Ringes dargestellt werden können, der ein endliches Erzeugendensystem besitzt. Ein Divisor  $\alpha$  ist eine Gesamtheit von  $S$ -Moduln  $\alpha(S) = a(S) \cdot S$  für alle rein algebraischen und abgeschlossenen Bereiche  $S$  von  $K$ . Die übliche Forderung, daß nur endlich viele  $\alpha(S) \neq S$  seien, darf erst nach gewissen Vorsichtsmaßregeln gestellt werden, damit der Begriff nicht zu eng wird. Hierzu gehört die Einführung der Begriffe der algebraischen geschlossenen Mannigfaltigkeiten in  $K$  sowie der algebraischen Gebilde auf solchen. Erstere sind Gesamtheiten von Bereichen bestimmter Art, letztere im wesentlichen Äquivalente der ganzen Divisoren für eine Mannigfaltigkeit mit einer gewissen Endlichkeitsbedingung. In einer Mannigfaltigkeit läßt sich eine Topologie erklären. Spezielle Mannigfaltigkeiten sind die Riemannschen Flächen mit ihrer natürlichen Topologie. — Zahlreiche Invarianten von Körpern und von Divisorenklassen fließen aus dem Begriff des Differentials. Eine Differentiation in einem Ring  $R$  ist eine formale Abbildung von  $R$  auf einen  $R$ -Modul  $RdR$ , den Differentialmodul, der durch die erzeugenden Relationen  $d(a+b) = da + db$ ,  $d(a \cdot b) = b \cdot da + a \cdot db$  definiert wird. Hat der Differentialmodul eines Bereichs  $S$  eine endliche  $S$ -Basis  $s \, dS = S \, dx_1 + \dots + S \, dx_n$  (bei rein algebraischem

$S$  trifft dies stets zu), und bilden  $\sum_{j=1}^n a_{ij} dx_j = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) eine Basis aller identisch

erfüllten Relationen in  $S \, dS$ , so erzeugen die  $(n-i)$ -reihigen Unterdeterminanten der Matrix  $(a_{ij})$  die  $(i+1)$ -te Differentie  $d_i(S)$  von  $S$ , die sind invariant nach H. Fitting [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 46, 195—228 (1936); dies. Zbl. 16, 50]. Die  $d_i(S)$  werden (ohne Beweis) angegeben, dabei spielen die Dimension (= Transzendenzgrad) und die Charakteristik von  $K$  sowie des Restklassenringes von  $S$  nach seinem Primideal eine Rolle. In naheliegender Weise werden gleichzeitig Relativedifferenten bez. eines Unterkörpers eingeführt; die Differenten sind die Relativedifferenten nach dem Primkörper. Hierauf werden Differentialformen

$$\theta = \sum_{(iv)} a_{i_1 \dots i_n} d_{i_1} x_{i_1} \dots d_{i_n} x_{i_n}$$

eingeführt, wobei man noch Symmetrieforderungen stellen kann. Besonders wichtig sind die alternierenden Differentialformen  $n$ -ten Grades, wo  $n$  den Transzendenzgrad bezeichnet. Diese lassen sich mittels  $n$  beliebiger Elemente  $x_i$ , deren Differentiale linear unabhängig sind, in der Form  $\theta = z \cdot \det(d_i x_j)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) schreiben. Es sei jetzt  $S$  ein rein algebraischer



abgeschlossener Bereich von  $K$ . Für diejenigen  $\theta$ , welche dem Modul  $S d_1 S \cdots S d_n S$  angehören, erzeugen die zugehörigen Elemente  $z$  ein Ideal  $c^{-1}(S) = c^{-1}(S) \cdot S$ . Die Gesamtheit aller  $c(S)$  definiert also einen Divisor  $c$ , dessen Klasse eine Invariante von  $K$  ist. Sie heißt die kanonische Klasse. Die Dimensionen der Divisoren  $c^i$  sind die geometrischen Geschlechter von  $K$  in Sinne von Castelnuovo und Enriques. — Die Moduln der Differentialformen von gegebenem Grade  $l$  und Symmetrietypus, für welche bei vorgegebenem Divisor  $a$  die Gleichungen  $a(S) \theta \in S d_1 S \cdots S d_l S$  bestehen, sind bis auf Isomorphie Invarianten der Divisorenklasse von  $a$ . — Eine hier nicht wiederzugebende Vermutung über die Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes in Funktionenkörpern vom Transzendenzgrad  $n$  schließt sich an. — Die Arbeit endet mit dem Hinweis auf zwei Dirichletsche Reihen, die einem algebraischen Funktionenkörper in einer Unbestimmten über einem algebraischen Zahlkörper in invarianter Weise zugeordnet werden können. Die erstere kommt im Zusammenhang mit Siegels Theorie der Modul-funktionen höheren Grades vor.

Martin Eichler.

### Zahlkörper:

Ankeny, N. C., E. Artin and S. Chowla: The class-number of real quadratic fields. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 524—525 (1951).

Für die Klassenzahl  $h$  eines reell-quadratischen Zahlkörpers  $\Omega$  der Diskriminante  $d$  mit der Grundeinheit  $\varepsilon = (t + u\sqrt{d})/2 > 1$  wird ohne Beweis in folgenden vier Fällen der Kongruenzwert von  $2 \frac{u}{t} h$  nach einem ungeraden Primteiler  $p$  von  $d = pm$  durch explizite Formeln angegeben. Dabei bedeutet  $\chi(x) = \left(\frac{d}{x}\right)$  den  $\Omega$  zugeordneten Charakter vom Führer  $d$  und  $\chi(x) = \left(\frac{x}{p}\right) \chi_0(x)$  seine Zerlegung in Komponenten von den Führern  $p, m$ . — 1. Für  $m > 1$  ist

$$2 \frac{u}{t} h \equiv - \sum_{0 < x < d} \frac{\chi(x)}{m x} \left[ \frac{x}{p} \right] \pmod{p} \quad (p > 3),$$

wo  $[\dots]$  das größte Ganze bezeichnet; im Falle  $p = 3$  tritt links noch der Faktor  $m + 1$  hinzu (wodurch für  $m \equiv -1 \pmod{3}$  das Ergebnis illusorisch wird).

2. Für  $p > m, p > 3$  ist

$$2 \frac{u}{t} h \equiv - C_{(p-3)/2} \pmod{p}, \text{ wo } \frac{\left( \sum_{x \pmod{m}} \chi_0(x) e^{x^2} \right)}{(e^{m^2} - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{2^n}{n!}.$$

3. Für  $m = 1$  und  $p \equiv 5 \pmod{8}$  ist  $2 \frac{u}{t} h \equiv - \frac{1}{2} \sum_{0 < x < p/4} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{p}\right) \pmod{p}$ . 4. Für

$m = 1$  und  $p \equiv 1 \pmod{4}$  ist  $2 \frac{u}{t} h \equiv \frac{A+B}{p} \pmod{p}$ , wo  $A, B$  die Produkte der quadratischen Reste, Nichtreste im kleinsten positiven Restsystem  $\pmod{p}$  bedeuten. — Diese Formeln entbehren noch der Systematik; es sei in dieser Hinsicht auf die expliziten elementar-arithmetischen Formeln von Teege (Diss. Kiel 1900) und Ref. (dies. Zbl. 23, 201) für den exakten Wert von  $\varepsilon^h$  im Falle  $d = p \equiv 1 \pmod{4}$  hingewiesen, die Bergström [J. reine angew. Math. 186, 91 (1944)] auf beliebige reell-quadratische Körperdiskriminanten  $d$  verallgemeinert hat.

Helmut Hasse.

Hasse, Helmut: Zur Geschlechtertheorie in quadratischen Zahlkörpern. J. math. Soc. Japan 3, 45—51 (1951).

Die von Gauß begründete Theorie der Geschlechter in quadratischen Zahlkörpern  $\Omega = k(\sqrt{d})$  sowie ihre Verallgemeinerung für beliebige relativ-zyklische algebraische Zahlkörper kommt in der Klassenkörpertheorie nur implizit in Form einer Ungleichung vor. Verf. leitet den Hauptsatz der Geschlechtertheorie des quadratischen Zahlkörpers, nach dem das Hauptgeschlecht mit der Gruppe der Quadrate der Idealklassen übereinstimmt, aus der Klassenkörpertheorie her. Der

„Geschlechterkörper“ ist der größte in bezug auf  $k$  abelsche Unterkörper des absoluten Klassenkörpers von  $\Omega$ , er entsteht durch Adjunktion der Quadratwurzeln aus allen Teilern der Diskriminante  $d$  von  $\Omega$ , welche ihrerseits als Diskriminanten von quadratischen Zahlkörpern auftreten und keine echten Teiler derselben Beschaffenheit mehr haben (Primdiskriminanten).

Martin Eichler.

Dénes, Péter: Über relativ zyklische Körper vom Primzahlgrade. Publ. math., Debrecen 2, 64—65 (1951).

Let  $k$  be an algebraic number field of finite degree over the field of rationals and  $K/k$  a relative cyclic extension of prime degree  $p$ . Let  $\sigma$  be a generator of the Galois group of  $K/k$ . Call an absolute ideal class of  $K$ , ambiguous if its symbolic  $(1-\sigma)$ -th power is the principal class. Let  $h$  and  $H$  denote the class numbers of  $k$  and  $K$  respectively. The author proves that if  $p \nmid h$  and  $K$  has no ambiguous classes then  $p \nmid H$ .

K. G. Ramanathan.

Dénes, Peter: Über eine rekurrente Serie von relativ-zyklischen algebraischen Zahlkörpern. Monatsh. Math 55, 229—232 (1951).

Sei  $K_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) ein Turm relativ-zyklischer Körper vom Primzahlgrad  $l \neq 2$  über dem Körper  $K_0$  der  $l$ -ten Einheitswurzeln. Sei ferner vorausgesetzt, daß die Klassenzahl  $h_0$  von  $K_0$  prim zu  $l$  ist (also  $l$  reguläre Primzahl im Sinne von Kummer), und daß  $K_{i+1} = K_i(\sqrt[l]{\varepsilon_i})$  mit einer nicht-primären Einheit  $\varepsilon_i$  aus  $K_i$  ist (also  $K_{i+1}/K_i$  für  $l$  aber für keine andere Primzahl verzweigt). In Verallgemeinerung eines Satzes von Pollaczek [Math. Z. 21, 1 (1924); Spezialfall  $K_1/K_0$ ] beweist Verf., daß unter diesen Voraussetzungen auch die Klassenzahlen  $h_i$  der  $K_i$  prim zu  $l$  sind. Nach einem Satz von Vandiver (dies. Zbl. 10, 291) folgt daraus, daß unter den angegebenen Voraussetzungen in  $K_i$  jede primäre Einheit  $\eta_i \equiv 1$  ist.

Helmuth Hasse.

Iyanaga, S. et T. Tamagawa: Sur la théorie du corps de classes sur le corps des nombres rationnels. J. math. Soc. Japan 3, 220—227 (1951).

Verf. setzt auseinander, wie sich die Chevalleysche ideltheoretische Klassenkörpertheorie für den Spezialfall des rationalen Zahlkörpers  $\mathbb{P}$  als Grundkörper darstellt. Sei  $\mathbf{A}$  die maximal-abelsche Erweiterung von  $\mathbb{P}$  (Körper aller Einheitswurzeln). Dann stellt sich die Galoisgruppe  $\mathcal{G}$  von  $\mathbf{A}/\mathbb{P}$  in leicht ersichtlicher Weise isomorph als das direkte Produkt  $E_0 = \prod_p' E_p$  der  $p$ -adischen Einheitengruppen  $E_p$  für die endlichen Primstellen  $p$  von  $\mathbb{P}$  dar. Erweitert man  $E_0$  zum direkten Produkt  $E = \prod_p E_p$  durch Hinzunahme der Gruppe  $E_p$  aller positiv-reellen Zahlen

für die unendliche Primstelle  $p$  von  $\mathbb{P}$ , so entsteht eine Untergruppe  $E$  der Idelgruppe  $J$  von  $\mathbb{P}$  (unitäre Idelgruppe), und zwar ist genauer  $J = E \times \mathbb{P}^\times$ , wo  $\mathbb{P}^\times$  die Multiplikationsgruppe (Hauptidelgruppe) von  $\mathbb{P}$  bezeichnet. Demnach hat man durch Hervorhebung der  $E_0$ -Komponente in  $J$  einen explizit, in invarianter Weise festgelegten Homomorphismus  $\varphi$  von  $J/\mathbb{P}^\times$  auf  $\mathcal{G}$ . Verf. beweist, daß dieser Homomorphismus  $\varphi$  gerade das Chevalley-Symbol für  $\mathbf{A}/\mathbb{P}$  ist, daß also  $\varphi(a) = \prod_p \left( \frac{a_p, \mathbf{A}/\mathbb{P}}{p} \right)$

für jedes Idel  $a = \prod_p a_p$  von  $\mathbb{P}$  gilt. — Verf. entwickelt ferner die Geschlechtertheorie für einen zyklischen Körper  $\mathbb{Z}/\mathbb{P}$  vom Grade  $n$  mit dem erzeugenden Automorphismus  $\sigma$ . Seien  $J_{\mathbb{Z}}$ ,  $E_{\mathbb{Z}}$  in  $\mathbb{Z}$  entsprechend erklärt, wie vorher  $J$ ,  $E$  in  $\mathbb{P}$ . Die Gruppe  $H_{\mathbb{Z}}$  derjenigen Ideale  $\alpha$  aus  $J_{\mathbb{Z}}$ , deren Normen in  $\mathbb{P}$  zu Normen aus  $E_{\mathbb{Z}}$  äquivalent sind, für die also  $N(\alpha)$  in  $N(E_{\mathbb{Z}}) \mathbb{P}^\times$  liegt, heißt das Hauptgeschlecht von  $\mathbb{Z}$ ; seine Ideale  $\alpha$  sind auch durch  $\alpha = \varepsilon \zeta \alpha_0^{1-\sigma}$  gekennzeichnet, wo  $\varepsilon$  in  $E_{\mathbb{Z}}$ ,  $\zeta$  in  $\mathbb{Z}^\times$ ,  $\alpha_0$  in  $J_{\mathbb{Z}}$ . Es gilt  $J_{\mathbb{Z}} \geq H_{\mathbb{Z}} \geq E_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^\times$  und  $J_{\mathbb{Z}}/H_{\mathbb{Z}} \cong N(J_{\mathbb{Z}})\mathbb{Z}^\times/N(E_{\mathbb{Z}})\mathbb{Z}^\times$ . Für die Geschlechteranzahl  $g = [J_{\mathbb{Z}}:H_{\mathbb{Z}}]$  beweist Verf. die Formel  $ng = \prod_p' e_p$ , wo  $e_p$  die Verzweigungsordnungen in  $\mathbb{Z}$  der endlichen Primstellen  $p$  von  $\mathbb{P}$  durch-



läuft. Schließlich bestimmt er noch die Geschlechtscharaktere von  $Z$  durch die Chevalleyschen Differentiale, was auf die Bildung der Normsymbole für die  $p$  mit  $e'_p \neq 1$  hinausläuft. Helmut Hasse.

**Kawada, Yukiyo:** On the class field theory on algebraic number fields with infinite degree. J. math. Soc. Japan 3, 104—115 (1951).

Moriya (dies. Zbl. 16, 345; 18, 343) hatte die Hauptsätze der Takagischen Klassenkörpertheorie auf unendliche algebraische Zahlkörper als Grundkörper übertragen. Verf. behandelt diese Moriyasche Theorie mittels der inzwischen entwickelten Chevalleyschen ideltheoretischen Methode. Helmut Hasse.

**Moriya, Mikao:** Zur Theorie der Klassenkörper im Kleinen. J. math. Soc. Japan 3, 195—203 (1951).

Verf. bringt zwei vom axiomatischen Standpunkt aus interessierende Ergänzungen zu der von ihm [Proc. Imp. Acad. Tokyo 18 (1942)], teils gemeinsam mit Nakayama [ebenda 19 (1943)], gegebenen axiomatischen Begründung der lokalen Klassenkörpertheorie. — I. Sei  $k$  ein diskret bewerteter perfekter Körper,  $\mathfrak{f}$  sein Restklassenkörper. A. a. O. wird vorausgesetzt: (1)  $\mathfrak{f}$  ist vollkommen, (2)  $\mathfrak{f}$  besitzt für jedes natürliche  $n$  genau eine Erweiterung  $n$ -ten Grades. Es handelt sich um die Unabhängigkeit dieser Axiome (1), (2). Daß aus (1) nicht notwendig (2) folgt, ist bekannt. Verf. zeigt, daß auch aus (2) nicht notwendig (1) folgt. Gegenbeispiel liefert die maximal- $p$ -separable Erweiterung  $k$  des Potenzreihenkörpers einer Unbestimmten mit algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper. — II. Sei wieder  $k$  ein Körper mit den obigen Eigenschaften (1), (2). Wie a. a. O. gezeigt, existiert zu einer Untergruppe  $H$  von endlichem Index in der Multiplikationsgruppe  $k^\times$  dann und nur dann ein Klassenkörper, wenn  $H$  (im Sinne der dort zugrunde gelegten allgemeinen Topologie) abgeschlossen ist. Verf. konstruiert mittels des Zornschen Lemmas (in einem speziellen Körper  $k$ ) eine nicht-abgeschlossene Untergruppe  $H$  von endlichem Index in  $k^\times$ . Helmut Hasse.

**Gut, Max:** Kubische Klassenkörper über quadratisch-imaginären Grundkörpern. Nieuw Arch. Wiskunde, II. R. 23, 185—189 (1951).

Verf. gewinnt aus dem Huddeschen Verfahren zur Auflösung einer kubischen Gleichung eine Methode zur Konstruktion unendlich vieler imaginär-quadratischer Zahlkörper, die eine durch 3 teilbare Klassenzahl haben. Außerdem kann noch eine kubische Irrationalität angegeben werden, deren Adjunktion zum Grundkörper einen in bezug auf den Grundkörper relativ kubischen Unterkörper des Klassenkörpers liefert. Harald Bergström.

**Whaples, George:** Local theory of residues. Duke math. J. 18, 683—688 (1951).

Der Beweis des globalen Residuensatzes für einen algebraischen Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über einem vollkommenen Konstantenkörper beruht wesentlich auf der folgenden lokalen Residuenformel. Sei  $K$  ein diskret und charakteristikkgleich bewerteter perfekter Körper mit dem Konstantenkörper  $k$  und  $K$  eine endlich-algebraische Erweiterung mit dem Konstantenkörper  $\bar{k}$ . Bezeichne  $\text{Sp}$  die Spur für  $\bar{K}/K$  und  $\text{sp}$  die Spur für  $\bar{k}/k$ . Für  $x$  aus  $k$  und  $\bar{y}$  aus  $\bar{K}$  gilt dann die Residuenformel  $\text{Res}_K(\text{Sp}(\bar{y}) dx) = \text{sp}(\text{Res}_{\bar{K}}(\bar{y} dx))$ . Beim Beweis dieser Formel verwandte Ref. (vgl. dies. Zbl. 10, 6) im Falle von Primzahlcharakteristik eine etwas umwegige Schlußweise (Einführung von Unbestimmten, Rückgang zu Charakteristik 0). Verf. gibt einen rein-lokalen Beweis, der allerdings nicht wesentlich kürzer ist, und bemerkt, daß man einen kürzeren Beweisgang wählen kann, wenn es nur auf den Beweis des globalen Residuensatzes ankommt. Helmut Hasse.

### Zahlentheorie:

**Straus, Ernst G.:** On the polynomials whose derivatives have integral values at the integers. Proc. Amer. math. Soc. 2, 24—27 (1951).

Es wird gezeigt: Ist  $f(x)$  ein solches Polynom, daß  $f(x)$  und alle seine Ableitungen für alle ganzen  $x$  ganze Werte haben, dann läßt sich  $f(x)$  als Linearkombination (mit ganzen Koeffizienten) der Polynome  $f_n(x) = \frac{1}{n!} x(x-1) \cdots (x-n+1)$   $\prod p^{[n/p]}$  darstellen (das Produkt ist über alle Primzahlen  $p$  zu erstrecken). Ohne Beweis wird auch eine solche Basis für die Polynome gegeben, die samt ihren Ableitungen für  $x = 0, 1, 2, \dots, m-1$  ganze Werte haben. *Gustav Lochs.*

**Bruijn, N. G. de, Ca. van Ebbenhorst Tengbergen and D. Kruyswijk:** On the set of divisors of a number. *Nieuw Arch. Wiskunde*, II. R. **23**, 191–193 (1951).

If  $k$  is a natural number and if  $k = p_1^{\lambda_1} \cdots p_v^{\lambda_v}$  is its canonical factorization, put  $\Omega(k) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_v$ . A sequence  $d_1, \dots, d_h$  of divisors of a natural number  $m$  is called a symmetrical chain if and only if  $d_i | d_{i+1}$  for  $1 \leq i \leq h-1$ ,  $\Omega(d_{i+1}) = 1 + \Omega(d_i)$  for  $1 \leq i \leq h-1$ , and  $\Omega(d_1) = \Omega(m/d_h)$ . The authors prove that the set of divisors of any natural number  $m$  is the set-theoretic union of a certain number of disjoint symmetrical chains. They give two applications of this theorem, one of which is a generalization of a result of Sperner [*Math. Z.* **27**, 544–548 (1928)] and the other a generalization of a result of Erdős (this *Zbl.* **36**, 23). *Paul T. Baleman.*

**Morrow, D. C.:** Some properties of  $D$  numbers. *Amer. math. Monthly* **58**, 329–330 (1951).

Ausgehend von der Tatsache, daß es auch zusammengesetzte (ganzrationale) Zahlen  $N$  (sogenannte  $F$ -Zahlen) gibt, so daß für alle zu  $N$  primen  $a$  eine Fermatkongruenz  $a^{N-1} \equiv 1 (N)$  gilt, untersucht Verf. die entsprechende Frage bez.  $a^{N-3} \equiv 1 (N)$ ,  $N > 3$ ; solche  $N$  nennt Verf.  $D$ -Zahlen. *Z. B.* sind 195, 399, 1023  $D$ -Zahlen. Verf. beweist: Damit  $N$  eine  $D$ -Zahl ist, muß  $N$  notwendig eine der Formen  $p_1 p_2 \cdots p_t$  ( $t \geq 3$ ),  $3^\alpha p_1 p_2 \cdots p_s$ , ( $s \geq 1$ ;  $\alpha = 1, 2$ ) ( $p_i > 3$  prim,  $p_i \neq p_j$ ) besitzen. Zum Beweis werden zunächst leicht die Fälle  $N$  prim und  $N = 2^\alpha$  ausgeschlossen. Im verbleibenden Fall  $N = r p^k$ , ( $r, p$ ) = 1,  $p > 2$  prim, wird eine beliebige Primzahl  $x > N$  aus der Restklasse  $x \equiv w (p^k)$  ( $w$  primitive Kongruenzwurzel mod  $p^k$ ) gewählt.  $x^{N-3} \equiv w^{N-3} (p^k)$  zieht sofort  $\varphi(p^k) | N-3$  nach sich, woraus leicht die Behauptung folgt. — Bezeichnet ferner  $\lambda(N)$  den kleinsten gemeinsamen Exponenten mod  $N$ , so ergibt sich ganz einfach „eine Zahl  $N$ , die obigen Bedingungen genügt, ist dann und nur dann  $D$ -Zahl, wenn  $\lambda(N) | N-3$  ist“; und hieraus folgt leicht „alle  $N = 3 p$ ,  $p > 3$  prim, sind  $D$ -Zahlen, hingegen  $9 p$  dann und nur dann, wenn  $p = 7$  ist“. Schließlich werden noch notwendige Bedingungen für die Fälle  $s = 2$  und  $t = 3$  angegeben. *Hans Heinrich Ostmann.*

**Thébault, Victor:** A propos de carrés curieux. *Mathesis* **60**, 5–8 (1951).

**Thébault, Victor:** Sur les chiffres des carrés parfaits. *Mathesis* **60**, 182–184 (1951).

**Venkatachalam Iyer, R.:** Reversible number sets with equal sums of like powers. *Math. Student* **18**, 123–127 (1951).

**Kaprekar, D. R.:** Reversible number sets with equal sums of powers. *Math. Student* **18**, 127–129 (1951).

**Cassels, J. W. S.:** The rational solution of the diophantine equation  $Y^2 = X^3 - D$ . *Acta math.* **84**, 299 (1951).

Bemerkungen und Berichtigungen zu der in dies. *Zbl.* **37**, 27 referierten Arbeit.

**Whitlock, jr., W. P.:** The diophantine equation  $A^2 + 2B^2 = C^2 + D^2$ . *Scripta math.* **17**, 84–89 (1951).

This paper gives two solutions of this diophantine equation; the values of  $A, B, C$  and  $D$  can be written as quadratic forms in four parameters.

*W. Verdenius.*

**Erdős, P.:** On a diophantine equation. *J. London math. Soc.* **26**, 176–178 (1951).



nach Multiplikation mit  $a_v$  über  $v$  summiert wird) hergeleitet

$$(2) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{25/2} \left( \Gamma \left( \frac{25}{2} \right) \right)^{-1} \int_0^{\infty} (T(u^2) + H u^{23/2}) e^{-\sigma u} P(u) du \\ = (2\pi\sqrt{2})^{-1} \sum_{i=1}^N \tau(q_i) q_i^{-25/4} \cos\left(\theta_i - \frac{1}{4}\pi\right) + H.$$

Falls es eine Konstante  $H$  gäbe, derart daß  $T(x) + H x^{23/4} \geq 0$  für  $x \geq 0$ , so wäre die rechte Seite in (2) für jedes  $N$  und beliebige  $\theta_i$  nicht-negativ, was sich nicht mit der Divergenz der Reihe  $\sum |\tau(q)| q^{-25/4}$  (wo  $q$  die quadratfreien positiven ganzen Zahlen durchläuft) vertragen würde. *Hendrik Douwe Kloosterman.*

**Vijayaraghavan, T.:** On a problem in elementary number theory. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 51–56 (1951).

Für positive ganze  $A$  sei  $\varphi(x, A)$  die Anzahl der zu  $A$  teilerfremden positiven ganzen Zahlen  $\leq x$  und  $\varphi(A) = \varphi(A, A)$ . Es seien  $l(A)$  bzw.  $m(A)$  die kleinste bzw. größte unter den Zahlen  $e_n = \varphi(n, A) - n\varphi(A)/A$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) (für die  $e_{n+A} = e_n$  ist). Verf. beweist: Falls  $k$  eine vorgegebene positive ganze Zahl und  $\delta$  eine vorgegebene positive Zahl ist, so gibt es eine positive ganze Zahl  $A$  mit den folgenden Eigenschaften: 1)  $A$  ist durch genau  $k$  verschiedene Primzahlen teilbar; 2)  $\varphi(A)/A > 1 - \delta$ ; 3)  $l(A) < 1 - 2^{k-1} + \delta$ ; 4)  $m(A) > 2^{k-1} - \delta$ . Verf. gibt zwei Beweise. Der zweite beruht auf dem folgenden Hilfssatz: Es seien  $(a_r, b_r)$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) Teilintervalle des Intervalls  $(0, 1)$  und  $c_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) solche positive ganze Zahlen, daß  $\min(c_1/c_1, c_2/c_2, \dots, c_n/c_{n-1}) > 2/\varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  die kleinste unter den Zahlen  $b_r - a_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) ist. Dann gibt es eine ganze Zahl  $x$ , derart, daß  $a_r \leq \{x/c_r\} \leq b_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ). Hier ist  $\{z\} = z - [z]$  und  $[z]$  die größte in  $z$  enthaltene ganze Zahl. *Hendrik Douwe Kloosterman.*

**Chowla, S. and P. Erdős:** A theorem on the distribution of the values of  $L$ -functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 11–18 (1951).

Es sei  $(d/n)$  (wo  $d \equiv 0$  oder  $\equiv 1 \pmod{4}$  und  $d$  kein Quadrat ist) das Symbol von Kronecker und für  $s > 0$  sei  $L_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s}$ . Es sei  $g(a, x)$  die Anzahl derjenigen positiven  $d \leq x$ , für die  $L_d(s) < a$  ist. Die Verff. beweisen, daß für  $s > \frac{3}{4}$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(a, x)}{x/2} = g(a)$  existiert, es ist  $g(0) = 0$ ,  $g(\infty) = 1$  und  $g(a)$  ist eine stetige und wachsende Funktion von  $a$ . Speziell folgt: die Anzahl der positiven  $d \leq x$ , für die nicht  $L_d(s) > 0$  ist, ist  $o(x)$ , falls  $s > \frac{3}{4}$ . *Hendrik Douwe Kloosterman.*

**Bateman, Paul T.:** On the representations of a number as the sum of three squares. Trans. Amer. math. Soc. 71, 70–101 (1951).

Es sei  $r(n)$  die Anzahl der Darstellungen der positiven ganzen Zahl  $n$  als eine Summe von  $s$  Quadratenganzen Zahlen, also  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) e^{\pi i \tau n} = \vartheta^s(\tau)$ , wo  $\vartheta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2}$  [ $\Im(\tau) > 0$ ]. Für  $s = 5, 6, 7, 8$  bewies Hardy [Proc. nat. Acad. Sci. USA. 4, 189–193 (1918) und Trans. Amer. math. Soc. 21, 255–284 (1920)], daß  $\vartheta^s(\tau)$  identisch ist mit

$$(1) \quad \mathcal{P}(\tau) = 1 + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s/2-1} \mathfrak{S}(n) e^{\pi i \tau n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(h, k)^s}{(hi - ki\tau)^{s/2}},$$

wo  $\mathfrak{S}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s/2} \sum_{h \bmod 2k} \eta(h, k)^s e^{-\pi i h n/k}$  die singuläre Reihe ist und wo  $\eta(h, k) = 0$ ,

falls  $(h, k) > 1$  und  $\eta(h, k) = \frac{1}{2} k^{-1/2} \sum_{j \bmod 2k} e^{\pi i h j^2/k}$ , falls  $(h, k) = 1$ . Verf. dehnt die Hardy'sche Beweismethode auf die Fälle  $s = 4$  und  $s = 3$  aus. Für  $s = 3$  wendet er dazu einen Hecke'schen Kunstgriff an und betrachtet für  $\sigma > 0$  die Funktion

$$(2) \quad \mathcal{P}_{\sigma}(\tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \eta(h, k)^3 (hi - ki\tau)^{-3/2} |hi - ki\tau|^{-\sigma}.$$

Er beweist, daß die singuläre Reihe für  $s = 3$  noch konvergiert, daß der erste Ausdruck für  $\Psi(\tau)$  in (1) noch sinnvoll ist und daß  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Psi_{\sigma}(\tau) = \Psi(\tau)$ . Diese Limesgleichung wird dann benutzt, um das Verhalten von  $\Psi(\tau)$  unter Modulsstitutionen festzustellen, sowie das Verhalten von  $\Psi(\tau)$  in der Spitze  $\tau = 1$  des Fundamentalbereichs der zugehörigen  $\theta$ -Gruppe  $\Gamma_3$ . Weil die Reihe für  $\Psi_{\sigma}(\tau)$  zwar konvergiert, aber für  $\sigma \leq \frac{1}{2}$  nicht absolut konvergiert, sind dabei erhebliche Schwierigkeiten zu überwinden. — Bemerkung des Ref.: Diese Schwierigkeiten entstehen zum größten Teil dadurch, daß Verf. den Heckeschen Kunstgriff nicht voll ausnutzt. Letzterer besteht darin, die Funktion  $\Psi_{\sigma}(\tau)$  für komplexe  $\sigma$  mit  $\Re(\sigma) > \frac{1}{2}$  durch die dann absolut konvergente Doppelreihe (2) zu definieren und die entstehende analytische Funktion von  $\sigma$  bis in eine volle Umgebung von  $\sigma = 0$  analytisch fortzusetzen. Es wird dann  $\Psi(\tau)$  als Wert dieser analytischen Funktion für  $\sigma = 0$  definiert. In dieser Weise wurde schon 1937 die Hardyse Beweismethode von H. Maaß [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 12, 133—162 (1937)]; auf den Fall  $s = 3$  ausgedehnt. Vgl. auch die Dissertation von H. Streefkerk [Over het aantal oplossingen der diophantische vergelijking  $u = \sum_{i=1}^k (A x_i^2 + B x_i - C)$ . Amsterdam 1943].

Hendrik Douwe Kloosterman.

**Ramaswami, V.:** Number of integers in an assigned  $A, P \leq x$  and prime to primes greater than  $x^c$ . Proc. Amer. math. Soc. 2, 318—319 (1951).

Es sei  $A(m, v, k)$  [wo  $m, v, k$  ganz;  $m > 0$ ;  $0 < v \leq k$ ;  $(v, k) = 1$ ] die Menge der Zahlen  $m(v + nk)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Bei  $\frac{1}{2} \leq c \leq 1$  beweist Verf. für die Anzahl  $f(m, v, k, x, c)$  der Zahlen in  $A(m, v, k)$ , die  $\leq x$  sind und keine Primzahlen  $> x^c$  enthalten, die Formel

$$f(m, v, k, x, c) = x(1 + \log c)mk + b(m, k)x/\log x + O(x^c/\log x) + O(x \log^2 x),$$

wo  $b(m, k) = [m\psi(k, k)]^{-1} \int_1^{\infty} [t\psi(k, k)k^{-1} - \psi(t, k)]t^{-2}dt$  und  $\psi(x, k)$  die Anzahl der positiven ganzen Zahlen  $\leq x$  ist, welche zu  $k$  teilerfremd sind. Die im  $O$ -Symbol enthaltenen Konstanten sind dabei nur von  $v$  und  $k$  abhängig. Er gibt auch ähnliche Formeln für  $c < \frac{1}{2}$  und  $c \geq 1$ .

Hendrik Douwe Kloosterman.

**Dirac, G. A.:** Note on a problem in additive number theory. J. London math. Soc. 26, 312—313 (1951).

Let  $f(n)$  denote the number of representation of  $n$  as  $a_i + a_j$  when the  $a$ 's are an arbitrary sequence of positive integers. Is it then possible to construct a sequence  $\{a_i\}$  for which  $f(n)$  is constant for all sufficiently large  $n$ ? Erdős and Turan [J. London math. Soc. 16, 212—215 (1941)] proved that this is impossible if a representation  $a_i + a_j$  is counted twice in the case  $i \neq j$  and once in the case  $i = j$ . The Author shows that the problem in this case is almost trivial and then he gives a proof for the case in which a representation  $a_i + a_j$  is counted twice also when  $i = j$ . The proof depends on the same idea as used in the paper of Erdős-Turan.

Sigmund Selberg.

**Webber, G. Cuthbert:** Non-existence of odd perfect numbers of the form  $3^{2\beta} p^{\alpha} s_1^{2\beta_1} s_2^{2\beta_2} s_3^{2\beta_3}$ . Duke math. J. 18, 741—749 (1951).

The author proves the mentioned theorem where  $p, s_1, s_2$  and  $s_3$  are distinct odd primes  $\neq 3, p \equiv 1 \pmod{4}$ . [This result in a somewhat stronger form is proved independently by U. Kühnel, this Zbl. 35, 311, who proves that an odd perfect number is divisible by 6 or more different primes.]

Sigmund Selberg.

**Haselgrove, C. B.:** Some theorems in the analytic theory of numbers. J. London math. Soc. 26, 273—277 (1951).

The paper gives a brief summary of some results in the analytic theory of numbers which the Author has obtained recently, and a full proof will be published later. — The first theorem (A) is an extension of Vinogradoff's theorem which states that all sufficiently large odd numbers are representable as the sum of three prime numbers. The Author states that any odd number  $n$  sufficiently large is representable as the sum of three prime numbers  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) which satisfy



nach Multiplikation mit  $a_v$  über  $v$  summiert wird) hergeleitet

$$(2) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{25/2} \left( \Gamma \left( \frac{25}{2} \right) \right)^{-1} \int_0^{\infty} (T(u^2) + H u^{23/2}) e^{-\sigma u} P(u) du \\ = (2\pi \sqrt{2})^{-1} \sum_{i=1}^N \tau(q_i) q_i^{-25/4} \cos \left( \theta_i - \frac{1}{4} \pi \right) + H.$$

Falls es eine Konstante  $H$  gäbe, derart daß  $T(x) + H x^{23/4} \geq 0$  für  $x \geq 0$ , so wäre die rechte Seite in (2) für jedes  $N$  und beliebige  $\theta_i$  nicht-negativ, was sich nicht mit der Divergenz der Reihe  $\sum |\tau(q)| q^{-25/4}$  (wo  $q$  die quadratfreien positiven ganzen Zahlen durchläuft) vertragen würde. *Hendrik Douwe Kloosterman.*

**Vijayaraghavan, T.:** On a problem in elementary number theory. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 51—56 (1951).

Für positive ganze  $A$  sei  $\varphi(x, A)$  die Anzahl der zu  $A$  teilerfremden positiven ganzen Zahlen  $\leq x$  und  $\varphi(A) = \varphi(A, A)$ . Es seien  $l(A)$  bzw.  $m(A)$  die kleinste bzw. größte unter den Zahlen  $e_n = \varphi(n, A) - n \varphi(A)/A$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) (für die  $e_{n+A} = e_n$  ist). Verf. beweist: Falls  $k$  eine vorgegebene positive ganze Zahl und  $\delta$  eine vorgegebene positive Zahl ist, so gibt es eine positive ganze Zahl  $A$  mit den folgenden Eigenschaften: 1)  $A$  ist durch genau  $k$  verschiedene Primzahlen teilbar; 2)  $\varphi(A)/A > 1 - \delta$ ; 3)  $l(A) < 1 - 2^{k-1} + \delta$ ; 4)  $m(A) > 2^{k-1} - \delta$ . Verf. gibt zwei Beweise. Der zweite beruht auf dem folgenden Hilfssatz: Es seien  $(a_r, b_r)$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) Teilintervalle des Intervalls  $(0, 1)$  und  $c_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) solche positive ganze Zahlen, daß  $\text{Min}(c_1/c_2, c_2/c_3, \dots, c_n/c_{n-1}) > 2/\varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  die kleinste unter den Zahlen  $b_r - a_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) ist. Dann gibt es eine ganze Zahl  $x$ , derart, daß  $a_r \leq \{x/c_r\} \leq b_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ). Hier ist  $\{z\} = z - [z]$  und  $[z]$  die größte in  $z$  enthaltene ganze Zahl. *Hendrik Douwe Kloosterman.*

**Chowla, S. and P. Erdős:** A theorem on the distribution of the values of  $L$ -functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 11—18 (1951).

Es sei  $(d/n)$  (wo  $d \equiv 0$  oder  $\equiv 1 \pmod{4}$  und  $d$  kein Quadrat ist) das Symbol von Kronecker und für  $s > 0$  sei  $L_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d}{n} \right) n^{-s}$ . Es sei  $g(a, x)$  die Anzahl derjenigen positiven  $d \leq x$ , für die  $L_d(s) < a$  ist. Die Verff. beweisen, daß für  $s > \frac{3}{4}$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(a, x)}{x^{1/2}} = g(a)$  existiert, es ist  $g(0) = 0$ ,  $g(\infty) = 1$  und  $g(a)$  ist eine stetige und wachsende Funktion von  $a$ . Speziell folgt: die Anzahl der positiven  $d \leq x$ , für die nicht  $L_d(s) > 0$  ist, ist  $o(x)$ , falls  $s > \frac{3}{4}$ .

*Hendrik Douwe Kloosterman.*

**Bateman, Paul T.:** On the representations of a number as the sum of three squares. Trans. Amer. math. Soc. 71, 70—101 (1951).

Es sei  $r(n)$  die Anzahl der Darstellungen der positiven ganzen Zahl  $n$  als eine Summe von  $s$  Quadratenganzen Zahlen, also  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) e^{\pi i \tau n} = \vartheta^s(\tau)$ , wo  $\vartheta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2}$  [ $\Im(\tau) > 0$ ]. Für  $s = 5, 6, 7, 8$  bewies Hardy [Proc. nat. Acad. Sci. USA. 4, 189—193 (1918) und Trans. Amer. math. Soc. 21, 255—284 (1920)], daß  $\vartheta^s(\tau)$  identisch ist mit

$$(1) \quad \Psi(\tau) = 1 + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s/2-1} \mathfrak{S}(n) e^{\pi i \tau n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(h, k)^s}{(hi - ki\tau)^{s/2}},$$

wo  $\mathfrak{S}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s/2} \sum_{h \bmod 2k} \eta(h, k)^s e^{-\pi i h n/k}$  die singuläre Reihe ist und wo  $\eta(h, k) = 0$ ,

falls  $(h, k) > 1$  und  $\eta(h, k) = \frac{1}{2} k^{-1/2} \sum_{j \bmod 2k} e^{\pi i h j^2/k}$ , falls  $(h, k) = 1$ . Verf. dehnt die Hardy'sche Beweismethode auf die Fälle  $s = 4$  und  $s = 3$  aus. Für  $s = 3$  wendet er dazu einen Hecke'schen Kunstgriff an und betrachtet für  $\sigma > 0$  die Funktion

$$(2) \quad \Psi_{\sigma}(\tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \eta(h, k)^3 (hi - ki\tau)^{-3/2} |hi - ki\tau|^{-\sigma}.$$

Er beweist, daß die singuläre Reihe für  $s = 3$  noch konvergiert, daß der erste Ausdruck für  $\Psi(\tau)$  in (1) noch sinnvoll ist und daß  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Psi_{\sigma}(\tau) = \Psi(\tau)$ . Diese Limesgleichung wird dann

benutzt, um das Verhalten von  $\Psi(\tau)$  unter Modulusubstitutionen festzustellen, sowie das Verhalten von  $\Psi(\tau)$  in der Spitze  $\tau = 1$  des Fundamentalbereichs der zugehörigen  $\vartheta$ -Gruppe  $\Gamma_3$ . Weil die Reihe für  $\Psi_{\sigma}(\tau)$  zwar konvergiert, aber für  $\sigma \leq \frac{1}{2}$  nicht absolut konvergiert, sind dabei erhebliche Schwierigkeiten zu überwinden. — Bemerkung des Ref.: Diese Schwierigkeiten entstehen zum größten Teil dadurch, daß Verf. den Heckschen Kunstgriff nicht voll ausnutzt. Letzterer besteht darin, die Funktion  $\Psi_{\sigma}(\tau)$  für komplexe  $\sigma$  mit  $\Re(\sigma) > \frac{1}{2}$  durch die dann absolut konvergente Doppelreihe (2) zu definieren und die entstehende analytische Funktion von  $\sigma$  bis in eine volle Umgebung von  $\sigma = 0$  analytisch fortzusetzen. Es wird dann  $\Psi(\tau)$  als Wert dieser analytischen Funktion für  $\sigma = 0$  definiert. In dieser Weise wurde schon 1937 die Hardysche Beweismethode von H. Maaß [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 12, 133—162 (1937)]; auf den Fall  $s = 3$  ausgedehnt. Vgl. auch die Dissertation von H. Streefkerk [Over

het aantal oplossingen der diophantische vergelijking  $u = \sum_{i=1}^s (A x_i^2 + B x_i + C)$ , Amsterdam 1943].

Hendrik Douwe Kloosterman.

Ramaswami, V.: Number of integers in an assigned  $A$ ,  $P \leq x$  and prime to primes greater than  $x^c$ . Proc. Amer. math. Soc. 2, 318—319 (1951).

Es sei  $A(m, v, k)$  [wo  $m, v, k$  ganz;  $m > 0$ ;  $0 < v \leq k$ ;  $(v, k) = 1$ ] die Menge der Zahlen  $m(v + nk)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Bei  $\frac{1}{2} \leq c \leq 1$  beweist Verf. für die Anzahl  $f(m, v, k, x, c)$  der Zahlen in  $A(m, v, k)$ , die  $\leq x$  sind und keine Primzahlen  $> x^c$  enthalten, die Formel

$$f(m, v, k, x, c) = x(1 + \log c)/mk + b(m, k)x/\log x + O(x^c/\log x) + O(x/\log^2 x),$$

wo  $b(m, k) = [m\psi(k, k)]^{-1} \int_1^{\infty} [t\psi(k, k)k^{-1} - \psi(t, k)]t^{-2}dt$  und  $\psi(x, k)$  die Anzahl der positiven ganzen Zahlen  $\leq x$  ist, welche zu  $k$  teilerfremd sind. Die im  $O$ -Symbol enthaltenen Konstanten sind dabei nur von  $v$  und  $k$  abhängig. Er gibt auch ähnliche Formeln für  $c < \frac{1}{2}$  und  $c \geq 1$ .

Hendrik Douwe Kloosterman.

Dirac, G. A.: Note on a problem in additive number theory. J. London math. Soc. 26, 312—313 (1951).

Let  $f(n)$  denote the number of representation of  $n$  as  $a_i + a_j$  when the  $a$ 's are an arbitrary sequence of positive integers. Is it then possible to construct a sequence  $\{a\}$  for which  $f(n)$  is constant for all sufficiently large  $n$ ? Erdős and Turan [J. London math. Soc. 16, 212—215 (1941)] proved that this is impossible if a representation  $a_i + a_j$  is counted twice in the case  $i \neq j$  and once in the case  $i = j$ . The Author shows that the problem in this case is almost trivial and then he gives a proof for the case in which a representation  $a_i + a_j$  is counted twice also when  $i = j$ . The proof depends on the same idea as used in the paper of Erdős-Turan.

Sigmund Selberg.

Webber, G. Cuthbert: Non-existence of odd perfect numbers of the form  $3^{2\beta} p^{\alpha} s_1^{2\beta_1} s_2^{2\beta_2} s_3^{2\beta_3}$ . Duke math. J. 18, 741—749 (1951).

The author proves the mentioned theorem where  $p, s_1, s_2$  and  $s_3$  are distinct odd primes  $\neq 3$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . [This result in a somewhat stronger form is proved independently by U. Kühnel, this Zbl. 35, 311, who proves that an odd perfect number is divisible by 6 or more different primes.] Sigmund Selberg.

Haselgrove, C. B.: Some theorems in the analytic theory of numbers. J. London math. Soc. 26, 273—277 (1951).

The paper gives a brief summary of some results in the analytic theory of numbers which the Author has obtained recently, and a full proof will be published later. — The first theorem (A) is an extension of Vinogradoff's theorem which states that all sufficiently large odd numbers are representable as the sum of three prime numbers. The Author states that any odd number  $n$  sufficiently large is representable as the sum of three prime numbers  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) which satisfy



$|p_i - \frac{1}{3}n| < n^\theta$ , where  $\theta$  is any fixed number  $\frac{63}{64} < \theta < 1$ . — Theorem B is the generalization of a theorem on the difference between consecutive numbers, to the Gaussian number field, and theorem C states, roughly speaking, that almost all arithmetic progressions contain about the number of primes as should be expected. — In the last part of the paper the Author states some new results on the zeros of the Dirichlets  $L$ -functions which he needs in the proofs. These new results are generalizations of some theorems of Ingham on the zeros of  $\zeta(s)$ .

Sigmund Selberg.

**Brewer, B. W.:** Tests for primality. Duke math J. 18, 757—763 (1951).

The author gives primality tests for certain integers of the form  $A2^n - 1$ , basing the development on the theory of Galois fields and properties of the Lucas functions. He obtains a new proof of Lucas' test for the primality of the Mersenne numbers and develops a test for  $A2^n - 1$ , similar to those given by Lehmer [Ann. of Math., II. Ser. 31, 419—448 (1930)]. In addition he obtains tests for the primality for  $2p - 1$ ,  $4p - 1$ ,  $8p - 1$ ,  $2p^2 - 1$ ,  $8p^2 - 1$ , and  $p^2 \pm p - 1$  for certain odd primes  $p$ . — In conclusion as an application of some of the theorems he shows that  $N = (2^{16} + 1) 2^{16} - 1 = 4\,295\,032\,831$  and  $N' = n^2 + n - 1 = 3\,059\,525\,71$  where  $n = 4(3^7 \cdot 2 - 1) - 1$  are primes.

Sigmund Selberg.

**Roth, K. F.:** On the gaps between squarefree numbers. J. London math. Soc. 26, 263—268 (1951).

Es sei  $q_n$  die  $n$ -te quadratfreie Zahl, dann soll  $q_{n+1} - q_n$  für  $n \rightarrow \infty$  abgeschätzt werden. Trivial ist die Abschätzung  $O(n^{1/2})$ . Es wurde von E. Fogels (dies. Zbl. 28, 110) die Abschätzung  $O(n^{2/5+\epsilon})$  gezeigt, vom Verf. verschärft zu  $O(n^{1/3})$  (nicht publiziert). Für diese Abschätzung gibt Verf. einen einfachen Beweis von Estermann und eine Abschätzung von Davenport zu  $O(n^{1/3}(\log n)^{-2/3})$ . Verf. zeigt nun eine bedeutende Verbesserung, nämlich (1)  $q_{n+1} - q_n = O(n^{1/4+\epsilon})$  und sogar (2)  $q_{n+1} - q_n = O(n^{3/13}(\log n)^{4/13})$ . Verf. führt den Beweis von (1) und (2) zurück auf die Abschätzung von  $Q(x+h) - Q(x)$ , wo  $Q(x)$  die Anzahl der  $q_n \leq x$  ist. Es ist  $Q(x+h) - Q(x) = \sum_{x < l^2 m \leq x+h} \mu(l)$  kurz  $\sum^* \mu(l)$  [ $\mu(l)$  Möbiusfunktion]. Nun ist für jede natürliche Zahl  $t$ :

$$\begin{aligned} \sum^* \mu(l) &= \sum_{1 \leq l \leq t} \mu(l) + O\left(\sum_{l > t} \mu(l)\right) = \sum_{1 \leq l \leq t} \mu(l) \left(\left[\frac{x+h}{l^2}\right] - \left[\frac{x}{l^2}\right]\right) \\ &+ O\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r-1}} \sum_{t < l \leq 2^r t} \mu(l)\right) = \frac{6}{\pi^2} h + O(t) + O(ht^{-1}) + O\left(\sum_{r=1}^{\infty} M(x, h; 2^{r-1}t)\right). \end{aligned}$$

Dabei ist allgemein für  $0 < x_1 < x$   $M(x, x_1; X) = \sum_{\substack{l, m \\ x < l^2 m \leq x + x_1 \\ X < l \leq 2X}} 1$ . Um (1) bzw.

(2) zu erhalten, muß  $M$  möglichst gut abgeschätzt werden. Bei der ersten Abschätzung wird das Intervall  $[x, x + x_1]$  in  $[8x_1 X^{-1}] + 1$  Intervalle  $I_r$  mit einer Länge  $|I_r| \leq \frac{1}{8} X$  und  $[X, 2X]$  in  $[10x^{1/3} X^{-1/3}] + 1$  Intervalle  $J_s$  mit  $|J_s| \leq \frac{1}{10} X^{4/3} x^{-1/3}$  zerlegt und  $N(I, J) = \sum_{l \in I, m \in J} 1$  mit Hilfe des Lemmas: „Ist

$|u^2 v - u_0^2 v_0| \leq \frac{1}{8} u_0$ ,  $(u - u_0)^2 |v - v_0| \leq \frac{1}{2} u_0$ , so ist  $(3u - u_0)(3v + v_0) = 8u_0 v_0$  ( $u, v, u_0, v_0$  natürliche Zahlen) zu  $O(x^\epsilon)$  abgeschätzt. Daraus folgt für  $M$  die Abschätzung  $O(x^{1/3+\epsilon} X^{-1/3}(x, X^{-1} + 1))$ , also erhält man für  $Q(x+h) - Q(x)$  noch den weiteren Fehlerterm  $O(x^{1/3+\epsilon}(ht^{-4/3} + t^{-1/3}))$ . Setzt man noch  $h = x^{1/4+\delta}$  ( $\delta > 0$ ),  $t = x^{1/4+1/2\delta}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{7}\delta$ , so sind die Fehlerterme  $o(h)$  und dies ist (1). Bei (2) wird  $M$  mit Hilfe des Satzes von van der Corput [Math. Z. 28, 301—310 (1928) Satz 3] zu  $O(x^{1/3} X^{-1/3} + x_1 X^{-1})$  für  $X \leq x^{5/11}$  abgeschätzt und liefert mit  $h = \alpha t$ ,  $1 < \alpha < \log x$ ,  $t = x^{3/13}(\log x)^{4/13}$  die Abschätzung (2).

Edmund Hlawka.

**Halberstam, H. and K. F. Roth:** On the gaps between consecutive  $k$ -free integers. J. London math. Soc. 26, 268—273 (1951).

Verff. verallgemeinern die Abschätzung der Differenz aufeinanderfolgender quadratfreier Zahlen von K. F. Roth (siehe vorsteh. Referat) und betrachten jetzt  $q_k(n+1) - q_k(n)$ , wo  $q_k(n)$  die  $n$ -te  $k$ -freie Zahl ist ( $k$ -freie Zahlen sind jene, welche durch keine  $k$ -te Potenz außer 1 teilbar sind) und leiten die Verallgemeinerung von (1) des vorsteh. Referats her, nämlich

$$(1) \quad q_k(n+1) - q_k(n) = O(n^{1/2k+\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0 \text{ klein}).$$

Es handelt sich wieder um die Abschätzung von  $S_k(x+n) - S_k(x)$ , wo  $S_k(x)$  die Anzahl der  $q_k(n) \leq x$  ist und wir erhalten wie früher

$$\begin{aligned} S_k(x+h) - S_k(x) &= \sum_{1 \leq l \leq t} \mu(l) \left( \left[ \frac{x+h}{l^k} \right] - \left[ \frac{x}{l^k} \right] \right) + O \left( \sum_{r=1}^{\infty} M(x, h; 2^{r-1}t) \right) \\ &= \frac{h}{\varphi(k)} + O(t) + O(h t^{-k+1}) + O \left( \sum_r \right), \end{aligned}$$

wo jetzt  $M(x, h; X) = \sum_{\substack{l, m \\ x < l^k n \leq x+h \\ X < l \leq 2X}} 1$  ist. Die Abschätzung von  $M$  erfolgt

wie früher und zwar für  $0 < h < x$  zu  $O(x^{1/(2k-1)+\varepsilon} X^{-1/(2k-1)} (h X^{-1} + 1))$ , aber erfordert neue Überlegungen. Das im vorsteh. Referat zitierte Lemma muß jetzt durch die folgenden ersetzt werden: Lemma 1: Ist  $P(z) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{2k-1}{j} z^j$ ,  $Q(z) = z^{k-1} P(z^{-1})$  und ist (2)  $m |l - l_0|^{2k-1} \leq \frac{1}{2} l_0^k$ ,  $|l^k m - l_0^k m_0| \leq \eta l_0$  wo  $\eta$  als Funktion von  $k$  genügend klein ist, so ist  $m P(l/l_0) = m_0 Q(l/l_0)$  ( $l, l_0, m, m_0$  natürliche Zahlen). Lemma 2: Die Anzahl der  $l, m$  mit (2) ist bei gegebenen  $l_0, m_0$   $O((l_0 m_0)^\varepsilon)$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Nimmt man nun  $h = x^{1/(2k-1)+\delta}$  ( $\delta > 0$ ),  $t = x^{1/(4k-1)} h^{(2k-1)/(4k-1)}$ , so folgt (1).  
Edmund Hlawka.

**Davenport, H. and P. Erdős:** On sequences of positive integers. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 19—24 (1951).

Sind  $a_1, \dots, a_m$  verschiedene natürliche Zahlen und ist  $\{b_i\}$  die Folge der natürlichen Zahlen, welche durch irgendein  $a_i$  teilbar ist, so existiert die natürliche Dichte  $A(a_1, \dots, a_m)$  der Folge  $\{b_i\}$ . Ist nun  $\{a_i\}$  eine unendliche Folge (in wachsender Ordnung) von natürlichen Zahlen, so existiert  $\lim_{m \rightarrow \infty} A(a_1, \dots, a_m) = A$ ,

ist aber nicht immer, wie ein Beispiel von Besicovitch (dies. Zbl. 9, 395) zeigt, die Dichte der zugehörigen Folge  $\{b_i\}$  der Zahlen, welche durch eins der  $a_j$  teilbar ist, außer wenn  $\sum a_i^{-1}$  konvergiert. — Verff. zeigten (dies. Zbl. 15, 100), daß aber  $A$  stets die untere Dichte  $d$  der  $\{b_i\}$  ist ( $D$  sei die obere Dichte) und daß die log-

arithmische Dichte der  $\{b_i\}$ , d. h. daß  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta(x)}{\log x}$ , wo  $\beta(x) = \sum_{b_i \leq x} \frac{1}{b_i}$ , existiert

und gleich  $A$  ist. (Mit  $\delta$  und  $\Delta$  bezeichnen wir die untere und obere logarithmische Dichte.) Der damalige Beweis verwendete aber tiefe analytische Hilfsmittel. Verff. geben nun einen elementaren Beweis. Da  $A \leq d \leq \delta \leq \Delta \leq D$  ist, genügt es zu

zeigen  $\Delta \leq A$ , also daß  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta(x)}{\log x} \leq A$  ist. Beim Beweis verwenden Verff. den

Begriff der multiplikativen Dichte: Seien  $p_1, \dots, p_k$  die ersten  $k$  Primzahlen,  $\{n'\}$  die Menge aller Zahlen, welche nur durch  $p_1, \dots, p_k$  teilbar sind, ebenso seien die  $\{b'\}$  aus der Folge  $\{b_i\}$  definiert (dabei kann die Folge noch ganz beliebig sein), dann ist  $B_k = \sum b'^{-1} / \sum n'^{-1}$  vorhanden. Existiert nun  $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k$  so heißt sie die

multiplikative Dichte. Es ist leicht einzusehen, daß sie bei unserer Folge existiert, und mit Hilfe dieser Tatsache wird nun der Beweis geführt. Verff. bemerken noch, daß  $(x < 1) \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x) x^{\alpha-1} \sum_{b_i \leq x} b_i^{-\alpha}$  nicht zu existieren braucht.

Edmund Hlawka.



**Redheffer, R. M.:** Remarks on incompleteness of  $\{e^{i\lambda_n x}\}$ , non-averaging sets, and entire functions. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 365—369 (1951).

Ist  $\{\lambda_n\}$  eine Menge von reellen, verschiedenen Zahlen  $\lambda_n \geq 0$ , ist  $A(u)$  die Anzahl der  $\lambda_n < u$ , dann zeigt Verf. (Satz 1): Die Menge  $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$  ist nicht vollständig ( $L^2$ ) auf jedem Intervall von einer Länge  $> 2\pi d$ , wenn

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x+y) - A(x)}{(x+y) - x} \leq d,$$

während bekannt ist, daß  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  vollständig ist auf jedem Intervall der Länge  $2\pi d$ , wenn  $\overline{\lim}_{y \rightarrow +0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{A(xy) - A(x)}{xy - x} > d$ . (N. Levinson, Gap and density theorems, New York 1941, dies. Zbl. **26**, 216.) Im Zusammenhang damit betrachtet Verf.

die unendlichen Mengen  $\{\lambda_n\}$  von natürlichen Zahlen, für die kein  $\lambda_n$  die Gestalt  $\frac{1}{2}(\lambda_{n_1} + \lambda_{n_2})$  hat ( $n \neq n_1 \neq n_2$ ) [vgl. dazu R. Salem und D. C. Spencer, Proc. nat. Acad. Sci. USA **28**, 561—563 (1942), F. A. Behrend, ebenda **32**, 331—332 (1946)] und zeigt: Notwendig und hinreichend, daß eine solche Menge die Dichte 0 besitzt, ist, daß das System  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  auf jedem Intervall unvollständig ist. Diesen Satz leitet Verf. aus Satz 1 mit Hilfe des folgenden Lemma her. Es sei  $P$  eine Eigenschaft von Mengen ganzer, verschiedener Zahlen und es gelte, a) Besitzt die Menge  $\{a_1, \dots, a_n\}$  die Eigenschaft  $P$ , dann auch jede Menge  $\{a_i - k, a_{i+1} - k, \dots, a_j - k\}$  mit  $1 \leq i \leq j \leq n$  und alle  $k$ . b) Es gibt beliebig große Mengen der Eigenschaft  $P$  mit einer Dichte  $\geq d$ . Dann gibt es eine unendliche Menge  $\{b_\epsilon\}$ , für welche jede Teilmenge  $\{b_n, b_{n+1}, \dots, b_m\}$  die Eigenschaft  $P$  hat und die obere Dichte  $\geq d$  hat. Verf. gibt dann noch Beweise für zwei Sätze von Levinson. *Edmund Hlawka.*

**Ramanathan, K. G.:** The theory of units of quadratic and hermitian forms. Amer. J. Math. **73**, 233—255 (1951).

Es sei  $K$  ein totalreeller, endlicher algebraischer Zahlkörper vom Grad  $f$  über dem Körper der rationalen Zahlen und  $\mathfrak{S}$  die Matrix einer quadratischen Form in  $m$  Variablen mit ganzzahligen Elementen aus  $K$ . Verf. studiert die Gruppe  $\Gamma$  der Einheiten  $\mathfrak{U}$  von  $\mathfrak{S}$ , für die also  $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}] = \mathfrak{U}^t \mathfrak{S} \mathfrak{U} = \mathfrak{S}$ . Es wird gezeigt, daß  $\Gamma$  dann und nur dann endlich ist, wenn  $\mathfrak{S}$  eine totaldefinite symmetrische Matrix ist, d. h. wenn  $\varphi^t \mathfrak{S} \varphi$  und alle ihre Konjugierten definit sind. Weiter besitzt  $\Gamma$  stets ein endliches Erzeugendensystem. Dem Beweis dieses Satzes schickt Verf. einen Überblick über die Reduktionstheorie von P. Humbert (dies. Zbl. **23**, 199, **34**, 311) voraus. Sind  $n_r, m_r (= m - n_r)$  die Signaturen von  $\mathfrak{S}^{(r)}$  ( $\mathfrak{S}^{(r)}$  konjugiert zu  $\mathfrak{S}$ ;  $r = 1, \dots, f$ ) so besitzt  $\Gamma/C$  ( $C$  Zentrum von  $\Gamma$ ) eine treue diskontinuierliche Darstellung als nichteuklidische Bewegungsgruppe  $B$  im  $M = \sum n_r m_r$ -dimensionalen Raum der Variablen  $y_{kl}^{(r)}$  ( $1 \leq k \leq m_r, 1 \leq l \leq n_r, 1 \leq r \leq f$ ), welche den offenen Teilraum  $I: \mathfrak{S}^{(r)-1} \begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ y(r) \end{bmatrix} > 0$  ( $\mathfrak{E}$  Einheitsmatrix) invariant läßt. In  $I$  existiert ein gegenüber  $B$  invariantes Volumenelement, und Verf. zeigt nun, daß das Volumen jedes Fundamentaltbereichs  $F$  von  $B$  genau dann endlich ist, wenn  $\mathfrak{S}$  nicht die Matrix einer zerlegbaren binären quadratischen Form ist. Das Volumen von  $I$  ist stets unendlich. Verf. zeigt ähnliche Sätze für hermitesche Formen über  $K(d^{\frac{1}{2}})$ , wo  $d$  eine totalnegative Zahl von  $K$  ist. Hier ist aber das Volumen von  $F$  stets endlich. — Die Beweismethoden stützen sich auf die grundlegenden Untersuchungen von C. L. Siegel (dies. Zbl. **23**, 7, **13**, 249) und Ann. of Math., II. Ser. **45**, 577—622 (1944). *Edmund Hlawka.*

**Cassels, J. W. S.:** A remark on the class number of quadratic forms of given determinant. Proc. Cambridge philos. Soc. **47**, 820 (1951).

H. Blaney (dies. Zbl. **31**, 204) bewies mittels eines ganz kurzen Schlusses: jede quadratische Form in  $n$  Variablen mit der Determinante  $D$  und beliebigen reellen Koeffizienten stellt eine Zahl ganzzahlig dar, deren Betrag nicht größer als

$2^{n-1} |D|$  ist. Verf. weist darauf hin, daß dieses Ergebnis die Endlichkeit der Klassenzahl ganzzahliger Formen gegebener Determinante in kürzester Weise zu begründen gestattet.

— *Martin Eichler.*

**Mordell, L. J.: Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums.** J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 41—46 (1951).

Es sei  $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$ , wenn  $x$  keine ganze Zahl ist, sonst  $= 0$ .

$\sum_{x=1}^p \frac{x}{p} \left( \left( \frac{q}{p} \right) \right)$  heißt eine Dedekindsche Summe. Wie schon mehrfach gezeigt

wurde, ist  $\sum_{x=1}^p \frac{x}{p} \left( \left( \frac{q}{p} \right) \right) + \sum_{x=1}^q \frac{x}{q} \left( \left( \frac{p}{q} \right) \right)$  eine rationale Funktion von  $p$  und  $q$ .

Verf. definiert

$$S_3(p, q, r) = \sum_{x=1}^p \frac{x}{p} \left( \left( \frac{qrx}{p} \right) \right) + \sum_{x=1}^q \frac{x}{q} \left( \left( \frac{prx}{q} \right) \right) + \sum_{x=1}^r \frac{x}{r} \left( \left( \frac{pqx}{r} \right) \right)$$

und entsprechend  $S_4, S_5$  usw. Bezeichnen wir ferner mit  $N_3^\lambda$  ( $\lambda$  ganz) die Anzahl der Gitterpunkte  $(x, y, z)$  im Tetraeder  $0 \leq x < p, 0 \leq y < q, 0 \leq z < r, 0 \leq x/p + y/q + z/r < \lambda$  und die Anzahlen der Gitterpunkte in den entsprechenden höherdimensionalen Tetraedern mit  $N_4^\lambda, N_5^\lambda$  usw. Dann stellt Verf.  $S_3 + N_3^1$  als rationale Funktion von  $p, q, r$  dar. Dieselbe Methode führt zum Ergebnis:  $S_4 + 2N_4^1 + S_3(p, q, r) + S_3(q, r, s) + S_3(r, s, p) + S_3(s, p, q)$  ist eine rationale Funktion von  $p, q, r, s$ . Die Anwendung seiner Methode auf  $S_n$  mit  $n > 4$  würde Formeln ergeben, in denen außer  $N_n^\lambda$  auch noch einige Differenzen  $N_n^{\lambda+1} - N_n^\lambda, \lambda \leq n-1$  auftreten.

*Gustav Lochs.*

**Rogers, C. A.: The number of lattice points in a star body.** J. London math. Soc. 26, 307—310 (1951).

Ist  $K$  ein konvexer Körper im  $R_n$  mit Mittelpunkt in 0 und Volumen  $V(K)$ , ist  $m$  eine natürliche Zahl,  $A$  ein Gitter mit Determinante  $d(A)$  und ist  $V(K) > m^2 n d(A)$ , so liegen bekanntlich in  $K$   $m$  verschiedene Punktpaare  $\pm A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) aus  $A$  in  $K$ . Es sei nun allgemeiner  $S$  ein Sternkörper mit Mittelpunkt in 0,  $A(S)$  die Determinante von  $S$  [ $\inf d(A)$  für alle  $A$ , die keinen Gitterpunkt  $\neq 0$  in  $S$  haben], dann stellt Verf. folgendes Problem: Es sei  $A(S) > m d(A)$ . Liegen dann wieder  $m$  verschiedene Punktpaare  $A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) von  $A$  in  $S$ ? — Verf. löst das Problem für  $m = \text{Primzahl } p$  und zeigt schärfer: Ist  $A(S) > p d(A)$ , dann gibt es entweder einen primitiven Punkt  $A_1$  von  $A$ , so daß  $\pm i A_1$  ( $1 \leq i \leq p$ ) in  $S$  liegt oder es gibt  $p+1$  verschiedene Paare  $\pm A_i$  ( $1 \leq i \leq p+1$ ) aus  $A$  in  $S$ . Diesen Satz benutzt Verf. zu einem einfachen Beweis einer Vermutung von Minkowski, welche zuerst vom Ref. bewiesen wurde (dies. Zbl. 28, 206). Der vorliegende Beweis ist einem früheren Beweis des Verf. für diesen Satz (dies. Zbl. 36, 27) verwandt.

*Edmund Hlawka.*

**Mullineux, N.: Lattice points in the star body  $K: |x_1^2 + x_2^2 - x_3^2| \leq 1, |x_3| \leq \sqrt{2}$ .** Proc. London math. Soc., II. Ser. 54, 1—41 (1951).

The 3-dimensional star-bodies  $K: |x^2 + y^2 - z^2| \leq 1, |z| \leq \sqrt{2}$  and  $K_\infty: |x^2 + y^2 - z^2| \leq 1$  have the same critical determinant  $\sqrt{3/2}$ : All critical lattices are specified. There is a critical lattice with a point at any given point on the boundary of  $K$  and it is conjectured that  $K$  is irreducible. This generalizes a 2-dimensional result of Mahler [Proc. Cambridge math. Soc. 40, 107—116, (1944)]. The proof depends on the reduction of the problem to a number of 2-dimensional problems (with parameters). It is stated that there is a corresponding relation between  $K^*$ :  $-2 \leq x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, |z| \leq \sqrt{6}$  and  $K_\infty^*$ :  $-2 \leq x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$  with determinant  $3/\sqrt{2}$ . This is a 3-dimensional analogue of a theorem of the author (cf. Cassels, this Zbl. 30, 346, Corollary II).

*J. W. S. Cassels.*



Cohn, Harvey: On the finite determination of critical lattices. *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 547—549 (1951).

Let  $K$  be a symmetric convex body in  $d$ -dimensional space  $R_d$  containing in its interior the sphere  $|X| \leq r$  where  $0 < r < 1$ , and let  $\Lambda_0$  be the lattice of all points with integral coordinates. Put  $C_d = 2^{d-1} d \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \pi^{-(d-1)/2}$ . If the interior of  $K$  contains no lattice point  $X \neq 0$  satisfying  $|X| \leq C_d$ , then the body is  $\Lambda_0$ -admissible. The constant  $C_d$  may be improved. Kurt Mahler.

Cohn, Harvey: On finiteness conditions for a convex body. *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 544—546 (1951).

The result of the last note is used to derive a finite number of conditions for a lattice to be a critical lattice of  $K$ . Kurt Mahler.

Šnejdmjuller, V. I.: Zur Struktur der zweidimensionalen diophantischen Approximationen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **80**, 713—716 (1951) [Russisch].

The following is proved: let  $t$  distinct fractions  $(p_i + \alpha)/q_i$  be given,  $\alpha$  not an integer, and  $q_i > 0$ ,  $p_i$  integers, such that  $|\theta - (p_i + \alpha)/q_i| < c/q_i^2$  for some given  $\theta$ ,  $c$ . Then  $Q/q > \{(t-1)\mu/2c\}$  where  $Q = \max q_i$ ,  $q = \min q_i$ . Here  $\mu$  is the least of  $\alpha' = \alpha - [\alpha]$ ,  $1 - \alpha'$ , and  $Q_n + Q_{n+1}$ , where  $Q_n, Q_{n+1}$  are successive denominators of convergents to  $\alpha'$  and  $Q_n \leq Q - q < Q_{n+1}$ . (If  $\alpha'$  is a rational fraction of denominator less than  $Q - q$  then  $Q_n + Q_{n+1}$  is replaced by  $Q - q$ .) This is an inhomogeneous form of a lemma of Postnikov (this *Zbl.* **42**, 49). An inhomogeneous form of Postnikov's two-dimensional result is also given.

J. W. S. Cassels.

Yûjôbô, Zuiman: On a theorem of Minkowski and its proof of Perron. *Proc. Japan Acad.* **27**, 263—267 (1951).

Perrons Beweis (dies. *Zbl.* **19**, 7) für den Minkowskischen Satz, daß die Ungleichung  $|\alpha x + \beta y - \sigma| \cdot |\gamma x + \delta y - \tau| \leq \frac{1}{4}$  (wo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \tau$  reell,  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ) stets eine ganzzahlige Lösung  $x, y$  zuläßt, wird dahin verfeinert, daß er sogar unendlich viele Lösungen liefert unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß  $\gamma/\delta$  irrational ist und daß die Gleichung  $\gamma x + \delta y - \tau = 0$  keine ganzzahlige Lösung hat. (Ohne diese Voraussetzung wäre der Satz falsch. Ref.) Oskar Perron.

Cassels, J. W. S., W. Ledermann and K. Mahler: Farey section in  $k(i)$  and  $k(\rho)$ . *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A **243**, 585—628 (1951).

Den Verff. ist es in dieser Arbeit gelungen, eine brauchbare und vernünftige Verallgemeinerung der Fareybrüche ins Komplexe zu finden. Dazu war es notwendig, die klassische Theorie in eine andere Form zu bringen, welche zunächst skizziert werden soll: Ist  $N$  eine natürliche Zahl  $\geq 1$ , so sei  $\mathfrak{F}_N$  die Menge aller Brüche  $r = a/b$ , ( $|a|, |b| \leq N$ ,  $a, b$  ganze reelle Zahlen) und  $1/0 = \infty$ ,  $\mathfrak{Q}_N$  die Menge der Paare  $(a, b)$  ( $|a|, |b| \leq N$ ) mit dem g. g. T. 1,  $\mathfrak{G}_N$  die Menge der Paare  $(a, b)$  mit  $a/b$  in  $\mathfrak{F}_N$ . Zwei Paare von  $\mathfrak{Q}_N$  bzw.  $\mathfrak{G}_N$  sind äquivalent, wenn sie dem gleichen Bruch von  $\mathfrak{F}_N$  entsprechen. Dann ist  $R(a, b)$  [( $a, b$ ) aus  $\mathfrak{Q}_N$ ] die Menge der reellen Zahlen  $x$ , für die  $|bx - a| = \min_{(c, d) \in \mathfrak{Q}_N} |dx - c| = \min_{(c, d) \in \mathfrak{G}_N} |dx - c|$ . Nun kommt die grundlegende

Definition:  $(a, b)$  und  $(c, d)$  sind benachbart, wenn es ein  $x'$  gibt, so daß  $|bx' - a| = |dx' - c| = \min_{e, f \in \mathfrak{G}_N} |fx' - e|$ . Diese Paare aus  $\mathfrak{Q}_N$  sind genau dann benachbart, wenn

$|ad - bc| = 1$  und  $(a \pm c, b \pm d) \notin \mathfrak{G}_N$  für wenigstens ein Vorzeichen  $\pm$ . Ergänzt man die Zahlengeraden durch  $x = \infty$ , so sind die  $R(a, b)$  Intervalle. In der klassischen Theorie sind  $(a, b)$  und  $(c, d)$  benachbart, wenn  $a/b$  und  $c/d$  aufeinanderfolgende Glieder der nach der Größe geordneten Folge  $\mathfrak{F}_N$  ist und die obigen Tatsachen folgen dann daraus unmittelbar. Aber gerade die übliche Definition der benachbarten Paare kann nicht ins Komplexe übertragen werden. Die bekannte Konstruktion von  $\mathfrak{Q}_{N+1}$  aus  $\mathfrak{Q}_N$  lautet jetzt so: Ist  $(e, f) \in \mathfrak{Q}_{N+1}$ , aber  $(e, f) \notin \mathfrak{Q}_N$ , dann gibt es zwei benachbarte Paare  $(a, b), (c, d)$  aus  $\mathfrak{Q}_N$ , so daß  $(e, f) = (a + c, b + d)$ . Jetzt die Verallgemeinerung auf  $k(i)$  und  $k(\rho)$  [ $R, k, \Omega$  Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen bzw. Körper der rationalen Zahlen bzw. Körper aller komplexen Zahlen;  $\rho = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ]. Wir beschränken uns hier auf  $k(i)$ :  $\mathfrak{F}_N$  ist jetzt die Menge aller Brüche  $\alpha/\beta$  mit  $N(\alpha), N(\beta) \leq N$  [ $N(\alpha) = |\alpha|^2 = \text{Norm von } \alpha]$ ,  $\alpha, \beta$  aus  $R(i)$ , und  $1/0 = \infty$ . Die Gaußsche Zahlenebene wird

durch  $z = \infty$  abgeschlossen.  $\mathfrak{Q}_N$  und  $\mathfrak{G}_N$  werden wie oben definiert, ebenso  $R(\alpha, \beta)$  als Menge aller komplexen Zahlen  $z$  mit  $|\beta z - \alpha| = \min_{(\gamma, \delta) \in \mathfrak{Q}_N} |\delta z - \gamma|$ . Die Paare  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\gamma, \delta)$  heißen wieder benachbart, wenn  $R(\alpha, \beta)$  und  $R(\gamma, \delta)$  einen Punkt gemeinsam haben.  $R(\alpha, \beta)$  wird durch eine endliche Anzahl von Kreisbögen begrenzt und ist, was hier eine tiefliegende Tatsache ist, für  $\beta \neq 0$  und genügend großes  $N$  ein Sternbereich (es ist wahrscheinlich für jedes  $N$  ein Sternbereich).  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\gamma, \delta)$  sind genau dann benachbart, wenn  $|\alpha \delta - \beta \gamma| = 1$  oder  $\sqrt{2}$  und  $(\alpha + \varepsilon \gamma, \beta + \varepsilon \delta) \notin \mathfrak{G}_N$  für mindestens ein  $\varepsilon = \pm 1, \pm i$ . Die Punkte, wo mehrere  $R(\alpha, \beta)$  zusammentreffen, heißen Knoten. In einem Knoten können höchstens vier Bereiche  $R$  zusammentreffen und es gibt darunter wenigstens ein Paar  $R(\alpha, \beta)$ ,  $R(\gamma, \delta)$  so daß  $|\alpha \delta - \beta \gamma| = 1$ . Es gibt genau drei Typen von Knoten. Gehört  $(\xi, \eta)$  zu  $\mathfrak{Q}_{N+1}$ , aber  $(\xi, \eta)$  nicht zu  $\mathfrak{Q}_N$ , so gibt es benachbarte Paare  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\gamma, \delta)$  aus  $\mathfrak{Q}_N$ , so daß  $|\alpha \delta - \beta \gamma| = 1$ ,  $(\xi, \eta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$ . Verff. zeigen nun die Brauchbarkeit ihrer Theorie, indem sie mit Hilfe der Fareybrüche den Minkowskischen Linearformensatz in zwei Variablen für  $k(i)$  [bzw.  $k(q)$ ] (Diophantische Approximationen, Leipzig 1907) genau so beweisen, wie dies Hilbert für den reellen Linearformensatz getan hat. (Einen anderen Beweis für diesen Satz gab Ref., dies. Zbl. 24, 251.) Die Theorie der Verff. läßt sicher noch Vereinfachungen zu und läßt sich auf andere imaginärquadratische Zahlkörper erweitern. — Die Arbeit stellt einen bedeutenden Fortschritt in der Theorie der diophantischen Approximationen im Komplexen dar.

Edmund Hlawka.

**Mahler, K.: On the generating function of the integers with a missing digit.** J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 33—40 (1951).

Übersetzung einer Arbeit des Verf., welche zuerst in der Zeitschrift K'o Hsueh (Science) 29, 265—67 (1947) in chinesischer Sprache erschien. — Es sei  $q \geq 2$  eine feste natürliche Zahl, ebenso  $k$ , mit  $0 \leq k \leq q-1$ , und es sei  $N(k)$  die Menge aller natürlichen Zahlen  $n$ , deren sämtliche Ziffern im  $q$ -adischen Ziffernsystem von  $k$  verschieden sind. Verff. studiert nun die erzeugende Funktion  $f_k(z) = \sum_{n \in N(k)} z^n$  von  $N(k)$ . Diese Funktion konvergiert absolut für  $|z| < 1$  und genügt der Funktionalgleichung

$$(1) \quad f_k(z) = \left( \frac{1-z^q}{1-z} - z^k \right) (e_k + f_k(z^q)),$$

wo  $e_k = 1$  für  $k=0$  und  $=0$  sonst. Aus (1) kann leicht gefolgert werden:  $f_k(z)$  ist regulär in  $|z| < 1$  und besitzt  $|z| = 1$  als natürliche Grenze, ist also eine transzendente Funktion. Dabei ist der Fall  $q=2$ ,  $k=1$  ausgenommen. Aus einem Satz des Verf. [Math. Ann. 101, 332—366 (1929)] folgt nun: Ist  $z$  eine algebraische Zahl mit  $0 < |z| < 1$ , wenn  $k=0$ , und mit  $0 < |z| < 1$ ,

$$(1 - z^{q^v}) / (1 - z^{q^{v-1}}) - z^k q^{v-1} \neq 0 \quad (v = 1, 2, \dots) \text{ sonst,}$$

so ist  $f_k(z)$  eine transzendente, aber keine Liouvillesche Zahl. Nun leitet Verff. noch folgenden Satz über die Nullstellen von  $f_k(z)$  in  $|z| < 1$  her: Ist  $k=0$ , so besitzt die Funktion  $z=0$  als Nullstelle und alle weiteren Nullstellen (wenn vorhanden) sind transzendent. Ist  $k=q-1$  oder  $(q-1)/2$  so sind keine Nullstellen vorhanden. In allen anderen Fällen besitzt sie unendlich viele Nullstellen, welche alle algebraische Zahlen sind.

Edmund Hlawka.

## Analysis.

### Mengenlehre:

**Shepherdson, J. C.: Inner models for set theory. I.** J. symbolic Logic 16, 161—190 (1951).

Die klassische Methode, die Verträglichkeit von zusätzlichen Hypothesen mit den Grundaxiomen einer Theorie zu zeigen, besteht darin, innerhalb des Systems ein Modell zu konstruieren, das nicht nur den Grundaxiomen der Theorie, sondern auch den Zusatzaxiomen genügt. Die Erfolge, die mit dieser Methode innerhalb der Mengenlehre erzielt wurden (z. B. der Nachweis der Verträglichkeit der verallgemeinerten Kontinuumshypothese und des Auswahlaxioms mit den übrigen mengentheoretischen Axiomen) veranlassen den Verf., allgemeine Untersuchungen über ihre Tragweite anzustellen, von denen die vorliegende Arbeit den ersten vorbereitenden Teil enthalten soll. — Für die Ausführungen wird das Gödelsche Axiomensystem der Mengenlehre zugrunde gelegt. Die Ausführungen beziehen sich nicht auf alle inneren Modelle, sondern



auf solche bestimmter Art, die ungefähr dadurch beschrieben werden können, daß ihre Definition nicht eine zusätzliche Syntaxsprache verlangt, sondern mit den formalen Mitteln des mengentheoretischen Systems selbst gegeben werden kann. Besondere Modelle dieser Art sind die „vollständigen“ Modelle, bei denen die Beziehung „Element—Menge“ innerhalb des Modells die gleiche ist wie im Gesamtsystem und bei denen alle Elemente einer Klasse des Modells Mengen des Modells sind. Es wird gezeigt, daß das Studium einer großen Zahl von inneren Modellen sich auf das der vollständigen Modelle reduziert, da diese Modelle mit vollständigen isomorph sind. Weiter wird gezeigt, daß für die vollständigen Modelle eine Reihe von mengentheoretischen Begriffen absolut sind in dem Sinne, daß sie sich mit den entsprechenden Begriffen für das Gesamtsystem decken. Für verschiedene Begriffe, z. B. „Ordinalzahl“, „Kardinalzahl“, „unerreichbare Ordinalzahl“ muß allerdings der Begriff des vollständigen Systems weiter verengert werden, damit die Absolutheit gewährleistet ist.

Wilhelm Ackermann.

**Fraïssé, Roland:** Conséquence d'une hypothèse précédente, et nouvelle hypothèse permettant de nommer un bon ordre du continu. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 342—343 (1951).

Verf. baut seine Untersuchungen über die Polyrelationen weiter aus (dies. Zbl. 40, 164). Die in letzterem Referat erwähnte Hypothese (vom Verf. mit [A] bezeichnet) gestattet die Formulierung eines Gesetzes, welches jeder Ordnungszahl  $\alpha$  der zweiten Zahlenklasse eine Wohlordnung der Menge der natürlichen Zahlen zum Typus  $\alpha$  entsprechen läßt. Diese seinerzeit ohne Beweis ausgesprochene Behauptung wird nun bewiesen. — Ferner wird gezeigt, daß sich eine Wohlordnung des Kontinuums beschreiben läßt, wenn man folgende Annahme macht: [B] Jeder abzählbare Relationstyp mit zwei Argumenten ist durch mindestens eine abzählbare Ordnungszahl bestimmbar.

Walter Neumer.

**Utz, W. R.:** The distance set for the Cantor discontinuum. Amer. math. Monthly 58, 407—408 (1951).

L'A. établit le théorème suivant: Etant donnés deux nombres réels  $c$  et  $m$  tels que  $0 \leq c \leq 1$  et  $\frac{1}{3} \leq |m| \leq 3$ , il existe deux nombres  $x$  et  $y$  représentant des points de l'ensemble parfait discontinu triadique de Cantor sur  $(0, 1)$  tels que  $y - mx = c$ .

André Revuz.

**Gottschalk, W. H.:** Choice functions and Tychonoff's theorem. Proc. Amer. math. Soc. 2, 172 (1951).

R. Rado hat (dies. Zbl. 33, 253) das folgende Lemma bewiesen:  $X_\alpha$  ( $\alpha \in I$ ) sei eine Familie von endlichen, nicht leeren Mengen,  $\mathcal{A}$  die Klasse aller endlichen Teilmengen von  $I$  und  $\varphi_A$  für jedes  $A \in \mathcal{A}$  eine Auswahlfunktion für die  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ . Dann gibt es eine Auswahlfunktion  $\varphi$  der  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in I$ , von der Eigenschaft, daß zu jedem  $A \in \mathcal{A}$  eine  $A$  enthaltende Menge  $B \in \mathcal{A}$  existiert, deren Auswahlfunktion  $\varphi_B$  auf den  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , mit  $\varphi$  übereinstimmt. Dieses Lemma folgt, wie Verf. zeigt, aus Tychonovs Satz von der Kompaktheit des cartesischen Produktes einer Familie kompakter Räume.

Erika Pannwitz.

**Kondô, Motokiti:** Quelques principes dans la théorie descriptive des ensembles. J. math. Soc. Japan 3, 91—98 (1951).

L'A. considère quelques principes générales de la théorie descriptive des fonctions et des ensembles, en particulier à l'égard de la relativisation et d'abstraction, respectivement. On considère plusieurs nuances d'efficacité dénombrable d'un genre particulier (voir ci-après) relatives à des opérations analytiques de Kantorovitch-Livenson (v. ce Zbl. 4, 294); en se servant des fonctions caractéristiques de suites d'ensembles de Szpilrajn-Marczewski (v. ce Zbl. 19, 297) l'A. formule deux „principes d'abstractions“ et en donne quelques applications en connexion avec l'opération généralisée de Suslin (cf. Kunugui, ce Zbl. 14, 255), des familles  $F$  vérifiant  $F_c \subseteq F_A$  (dites de Kunugui) et des problèmes de séparation, respectivement. —  $R$  étant un ensemble et  $F$  une famille de sous-ensembles de  $R$ , l'A. dit qu'un  $E \subseteq R$  est „effectif dénombrablement (e. d.) par rapport à  $F$ “ s'il existe une opération analytique  $\Phi(X_n)$  au sens de Kantorovitch-Livenson et une suite  $E_n \in F$  telle que  $E = \Phi(E_n)$  (par exemple, tout  $X \in F_A$  est e. d. par rapport à  $F$ ). Si de plus l'union des éléments de  $F$  coïncide avec  $R$ ,  $R$  peut être topologisé en considérant pour tout  $x \in R$  comme voisinage de  $x$  chaque sur-ensemble de  $x$  représentable comme intersection d'un nombre fini d'ensembles extraits de  $F$ ; alors si  $E$  est e. d. par rapport à  $F$  pareille,  $E$  est dit e. d. par rapport à l'espace  $R$  lui-même. D'autres définitions (par ailleurs assez compliquées) se déduisent des définitions précédentes. L'article contient 9 théorèmes.

George Kurepa.

**Sodnomov, B. S.:** Über arithmetische Summen von Mengen. Doklady Akad. Nauk SSSR. n. Ser. 80, 173—175 (1951) [Russisch].

The author considers the smallest system  $T$  containing every linear closed interval and which is closed relatively to  $\sigma$ -operation, to complementation and to combinatorial addition:  $T_\sigma \subset T$ ,  $CT \subset T$ ,  $T + T \subset T$ ; in particular,  $T + T$  denotes the system of  $A + B$  ( $A, B \in T$ );  $A + B$  is the set of sums  $a + b$  ( $a \in A, b \in B$ ). Since for linear sets  $A, B$ , the set  $A + B$  is identical with the projection on  $x$ -axis of  $A \times B$  in the direction of  $x + y = \text{const}$ , one concludes that  $T$  is a subsystem of the system  $\Pi$  of linear projective sets; moreover,  $T$  contains at least one element of every class of  $\Pi$ ; the question, whether only  $T \subset \Pi$  or even  $T = \Pi$  remains open. In particular, there is a  $G_\delta$  set  $X$  and a perfect set  $P$  such that  $X + P$  is an analytic non Borelian set (cor. 1); there is a linear  $G_\delta$  set  $Y$  such that the set of mutual distances of pairs of points of  $Y$  is an analytic non Borelian set (cor. 2; answer to a question of Sierpiński's). The  $L$ -measurability of sets belonging to  $T$  remains an open problem (the problem of  $L$ -measurability of projective sets is extremely difficult!), but if  $\Pi$  contains a non  $L$ -measurable set, so  $T$  too (Th. 3). The author's main tool are „regular“ perfect sets. By a generalization of the triadic set, the author says that a perfect set  $P$  is regular, provided  $P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_1 \dots i_n}$  ( $i_k = 0, 1$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\mathbb{N}$  = set of natural numbers); for any  $n \in \mathbb{N}$ , the  $\delta_{i_1 \dots i_n}$  are  $2^n$  congruent closed intervals;  $\delta_{i_1 \dots i_n}$  contains both  $\delta_{i_1 \dots i_{n-1} 0}$  and  $\delta_{i_1 \dots i_{n-1} 1}$ , it has respectively the same left and right endpoint as have respectively  $\delta_{i_1 \dots i_{n-1} 0}$  and  $\delta_{i_1 \dots i_{n-1} 1}$ . Let  $\varepsilon_n = \varepsilon_n(P)$  be the ratio of the diameter of  $\delta_{i_1 \dots i_n}$  and the number  $\inf \delta_{i_1 \dots i_{n-1}} - \sup \delta_{i_1 \dots i_{n-1}}$ . The „characteristic“ sequence  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$  of  $P$  is considered too (cf. Th. 2). The projective classes  $A_\alpha, CA_\alpha$  ( $\alpha < \omega_1$ ) are defined by induction in the following manner:  $A_0$  is the class of  $F_\sigma$  sets;  $A_{\alpha+1}$  is the set of projections of the sets  $X \in CA_\alpha$ ; for any limit number  $\alpha < \omega_1$  one puts  $A_\alpha = \left( \bigcup_{\xi < \alpha} A_\xi \right)_\sigma$ . George Kurepa.

**Pettis, B. J.:** Remarks on a theorem of E. J. McShane. Proc. Amer. math. Soc. 2, 166—171 (1951).

L'A. reprend un raisonnement de E. J. McShane (ce Zbl. 36, 167) et en tire des conclusions un peu plus précises; exemple: soit  $X$  un groupe topologique,  $S \subset X$  un ensemble qui contient un ensemble de Baire non maigre,  $R \subset X$  un ensemble non maigre; alors  $[R \cap \Pi(R)] [S \cap \text{III}(S)]$  est un sous-ensemble ouvert non vide de  $RS$  [pour tout  $A \subset X$ , on pose:  $\text{I}(A) = \bigcup [G | G \text{ ouvert}, G \cap A \text{ maigre}]$ ,  $\text{II}(A) = X - \text{I}(A)$ ,  $\text{III}(A) = \text{Int } \Pi(A) \cap \text{I}(X - A)$ ]. Jacques Dixmier.

## Differentiation und Integration reeller Funktionen:

**Fort jr., M. K.:** A theorem concerning functions discontinuous on a dense set. Amer. math. Monthly 58, 408—419 (1951).

$f(x)$  étant une fonction réelle définie pour tout  $x$  réel, l'A. désigne par  $A$  l'ensemble des points où  $f(x)$  est discontinue,  $B$  celui des points où elle est dérivable,  $C$  celui des points où elle est continue mais non dérivable et il établit le théorème „Si  $A$  est partout dense,  $B$  est de première catégorie“ et le corollaire: „Si  $A$  et  $B$  sont tous deux partout denses,  $C$  est un résiduel“. André Revuz.

**Loud, W. S.:** Functions with prescribed Lipschitz condition. Proc. Amer. math. Soc. 2, 358—360 (1951).

L'A. montre que, si  $\alpha$  est un nombre réel compris entre 0 et 1,  $A$  un nombre entier tel que  $2^{2A(1-\alpha)} > 2$ ,  $g(t, h)$  une fonction périodique de période  $2h$  avec  $g(2ph, h) = 0$ ,  $g((2p+1)h, h) = 1$  et variant linéairement entre  $ph$  et  $(p+1)h$ , alors la fonction  $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2An} g(t, 2^{-2An})$  satisfait une condition de Lipschitz d'ordre  $\alpha$ , à savoir: il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que pour tout  $t$  et tout  $\Delta t$ ,  $|g(t + \Delta t) - g(t)| < K_1 |\Delta t|^\alpha$  et pour tout  $t$ , il existe des  $\Delta t$  arbitrairement petits tels que  $|g(t + \Delta t) - g(t)| > K_2 |\Delta t|^\alpha$ . La fonction obtenue est continue, mais non dérivable. André Revuz.

**Ellis, H. W.:** On the compatibility of the approximate Perron and the Cesàro-Perron integrals. Proc. Amer. math. Soc. 2, 396—397 (1951).



Die Überschrift erweckt eine falsche Vorstellung; denn es wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt, daß die beiden Integralbegriffe nicht kompatibel sind. Eine Funktion  $F(x)$  sei so definiert:  $F(x) = 0$  für  $x \leq 0$ ;  $F(x) \geq 0$  und stetig differenzierbar für  $x > 0$ , und zwar  $F(x) > 0$  nur in Intervallen  $I_n$  der Länge  $1/2^{n+1}$  im Innern von  $[1/(n+1), 1/n]$ , wobei  $\int_{1/(n+1)}^{1/n} F(x) dx = \frac{1}{n(n+1)}$  sein soll.

Wird dann eine Funktion  $f(x)$  durch  $f(x) = F'(x)$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$  definiert, so ist  $f(x)$  in jedem den Nullpunkt umschließenden Intervall  $[a, b]$  AP-integrierbar und es ist  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(b)$ . Außerdem existiert auch das CP-Integral, sein Wert ist aber gleich  $F(b) - 1$ . Oskar Perron.

**Weston, J. D.:** Inequalities for Riemann-Stieltjes integrals. Math. Z. 54, 272—274 (1951).

Verf. beweist elementar folgende Sätze: Sei  $S$  eine endliche Menge sich nicht überdeckender Intervalle,  $\alpha(x)$  eine in  $S$  nichtfallende beschränkte Funktion.  $f_n(x)$  sei eine Folge in  $S$  gleichmäßig beschränkter Funktionen; dann gelten für die bezüglich  $\alpha(x)$  zu bildenden oberen und unteren Integrale  $\bar{I}, \underline{I}$  die Ungleichungen  $\bar{I}(\liminf f_n) \leq \liminf \bar{I}(f_n)$ ;  $\underline{I}(\limsup f_n) \geq \limsup \underline{I}(f_n)$ . Daraus ergibt sich ein neuer einfacher Beweis für den Satz von der beschränkten Konvergenz, der zuerst 1885 von Arzela, dann 1927 elementar von Hausdorff bewiesen worden war:  $\lim \int f_n d\alpha(x) = \int \lim f_n d\alpha(x)$ , sobald die Konvergenz der gleichmäßig beschränkten Folge  $f_n$  und beschränkte Variation von  $\alpha(x)$  vorausgesetzt wird.

Uwe Timm Bödewadt.

**Agnew, Ralph Palmer:** Mean values and Frullani integrals. Proc. Amer. math. Soc. 2, 237—241 (1951).

In Ergänzung früherer Ansätze wird für  $0 < a, b, x$  aus der Existenz Lebesguescher Integrale in

$$(1) \quad \int_0^\infty \frac{dt}{t} [f(at) - f(bt)] = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x dt f(t) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x dt f(t) \right\}$$

auf die Existenz der Mittelwerte und Gültigkeit der Aussage (1) geschlossen.

Wilhelm Maier.

**Nikol'skij, S. M.:** Einige Ungleichungen für ganze Funktionen endlicher Ordnung von mehreren Veränderlichen und ihre Anwendung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 76, 785—788 (1951) [Russisch].

$L_p$  sei der Raum der Funktionen  $f$  von  $n$  reellen Variablen, für welche

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|^p dx_1 \cdots dx_n \right)^{1/p}$$

endlich ist. —  $(G_{v_1 \dots v_n}^{(p)})$  sei die Klasse der ganzen Funktionen  $g_{v_1 \dots v_n}(z_1, \dots, z_n)$ , die für  $j = 1, 2, \dots, n$  in der Variablen  $z_j$  die (Exponential-) Ordnung  $v_j$  haben und für die  $g_{v_1 \dots v_n}(x_1, \dots, x_n)$  ( $x_i$  reell) zu  $L_p$  gehört. — Verf. gibt folgende Abschätzung an:

$$\begin{aligned} \|g_{v_1 \dots v_n}\|_p &\leq \left( \prod_{i=1}^n h_i \max_t \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} |g_{v_1 \dots v_n}(x_{k_1}^{(1)} - t_1, \dots, x_{k_n}^{(n)} - t_n)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) \|g_{v_1 \dots v_n}\|_p. \end{aligned}$$

$\alpha_i$  sind beliebige positive Zahlen,  $h_i = \alpha_i / v_i$ ,  $x_k^{(i)} = k h_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 0, \pm 1, \dots$ ). Die Summation erstreckt sich über alle ganzen  $k_i$ . Das Zeichen  $\max_t$  bezieht sich auf alle reellen

$t_1, \dots, t_n$ . — Es sei für  $f \in L_p$ :  $A_{v_1 \dots v_n}(f)_p = \inf_{g \in (G_{v_1 \dots v_n}^{(p)})} \|f - g\|_p$ . Es sei  $H_{p, x_1}^{(r)}$  ( $r > 0, 1 \leq p \leq \infty$ )

die Klasse der Funktionen  $f \in L_p$ , die folgende Eigenschaften haben: 1. Es sei  $r$  nicht ganz;  $r = [r] + \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .  $f$  besitze für fast alle  $(x_2, \dots, x_n)$  eine partielle Ableitung  $\partial^{[r]} f / \partial x_1^{[r]}$ , die zu  $L_p$  gehöre und der Ungleichung:  $\|f_{x_1}^{[r]}(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f_{x_1}^{[r]}(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p \leq M |h|^\alpha$  genüge. 2. Wenn  $r$  ganz ist, so besitze  $f$  für fast alle  $(x_2, \dots, x_n)$  eine partielle Ableitung  $r-1$ . Ordnung nach  $x_1$ , die zu  $L_p$  gehöre und der Ungleichung:

$$\|f_{x_1}^{(r-1)}(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - 2 f_{x_1}^{(r-1)}(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_{x_1}^{(r-1)}(x_1 - h, x_2, \dots, x_n)\|_p \leq M |h|$$

genüge.  $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$  sei die Klasse der Funktionen, die bezüglich  $x_1$  zu  $H_{p x_1}^{(r_1)}$ , bezüglich  $x_2$  zu  $H_{p x_2}^{(r_2)}$  usw. ..., bezüglich  $x_n$  zu  $H_{p x_n}^{(r_n)}$  gehören. — Verf. behauptet folgende Sätze: 1. Eine Funktion  $f \in L_p$  gehört dann und nur dann zu  $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$  ( $r_i > 0$ ), wenn mit einer von  $v_1, \dots, v_n$  unabhängigen Konstanten  $c$  gilt:  $A_{v_1, \dots, v_n}(f)_p \leq c \sum_{v=1}^n v^{-r_i}$ . 2. Eine Funktion  $f \in L_p$  gehört dann und nur dann zu  $H_p^{(r)}$ , wenn es eine Folge von Funktionen  $g_\nu(x_1, \dots, x_n)$  gibt, so daß  $g_\nu$  als Funktion von  $x_1$  für fast alle  $(x_2, \dots, x_n)$  von der Ordnung  $\nu$  ist und daß gilt:  $\|f - g_\nu\|_p < c/\nu^r$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ),  $c$  unabhängig von  $\nu$ . 3. Wenn die Funktion  $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$  ist, wenn  $1 \leq p < p' \leq \infty$  gilt und  $\kappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} > 0$  ist, so gilt auch  $f \in H_p^{(\varrho_1, \dots, \varrho_n)}$  mit  $\varrho_i = r_i \kappa$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Wie ein Beispiel zeigt, kann der letzte Satz nicht verschärft werden. — Beweise fehlen.

Walter Thimm.

**Mickle, Earl J. and Tibor Radó:** On a theorem of Besicovitch in surface area theory. *Rivista Mat. Univ. Parma* 2, 19—45 (1951).

Let  $S: z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in Q \equiv (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ , be any non parametric continuous surface and let  $L(S)$  be the Lebesgue area of  $S$  and  $H_2(S)$  the two dimensional Hausdorff measure of the set of the points of  $S$ . H. Federer (this Zbl. 32, 149), in extending a previous result of A. S. Besicovitch [*Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 16, 86—102 (1945)] has proved the equality (1)  $H_2(S) = L(S)$ . This result was obtained by comparing various definitions of area and particularly one which is a modification of the Favard measure. In the present paper the authors give a remarkably simple proof of the equality (1) by utilizing only Hausdorff and Lebesgue measures. Under the same hypotheses for  $S$  the further equality is proved  $L(S) = A_B(S)$ , where  $A_B(S)$  is the so called Besicovitch area of  $S$ . The equality (1) is also extended to a large class of parametric surfaces. *Lamberto Cesari.*

**Silverman, Edward:** Definitions of Lebesgue area for surfaces in metric spaces. *Rivista Mat. Univ. Parma* 2, 47—76 (1951).

The present paper is a systematic treatment of Lebesgue area theory for surfaces imbedded in any metric space. — The author considers first a Banach space  $B$  of points  $x$ . Let  $\|x\|$  be the norm of  $x$  in  $B$ ,  $f$  any linear functional in  $B$  and  $\|f\|$  the norm of  $f$  in  $B$  (S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932). Thus a linear functional  $f$  is called normal if  $\|f\| = 1$ . Let  $\Sigma_B$  be the set of all normal linear functionals in  $B$ . If  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , are any three points of  $B$ , the area  $A_B(\Delta)$  of the triangle  $\Delta$  of vertices  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , is defined by  $A_B(\Delta) = \frac{1}{2} \sup \det(f(x_i), g(x_i), 1)$ , where the three lines of the matrix are obtained by taking  $i = 1, 2, 3$ , and where sup is taken for all  $f, g \in \Sigma_B$ . This definition of area of a triangle enables the author to define successively an elementary area for polygonal regions and for polyhedral surfaces  $P$  in  $B$ , and to prove that the area of any parallelogram of smallest area circumscribing the „unit“ circle in any plane  $\pi$  of  $B$  is four. Thus a Lebesgue area  $L_B(S)$  of any Frechet surface  $S$  in  $B$  can be defined by  $L_B(S) = \inf \lim A_B(P_n)$ , where  $[P_n]$  is any sequence of polyhedral surfaces approaching  $S$  in the sense of Frechet, where  $\lim$  is taken for  $n \rightarrow \infty$ , and  $\inf$  for all sequences  $[P_n]$  as above. All these definitions coincide with the ordinary ones when  $B$  is a Euclidean space and lead to a theory which is elegant and remarkably close to the ordinary one for Euclidean spaces. The so defined Lebesgue area satisfies the principle of semicontinuity. — A particularly important Banach space is the space  $m$  of the bounded sequences  $x = [x_n]$  of real numbers, where the norm  $\|x\|$  is defined by  $\|x\| = \sup |x_n|$ . The author proves that the Lebesgue area  $L_m(S)$  satisfies the principle of Kolmogoroff. As a corollary two isometric surfaces have the same Lebesgue area. The topological theory for Lebesgue area can be extended to any Banach space. In particular any representation of a Frechet surface admits of a monotone-light factorization and the additivity theorem holds, that is  $L_B(S) = \sum_n L_B(S_n)$ , where  $S_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  are the cyclic elements of  $S$ . — Now let  $E$  be any metric space and  $S$  any



Frechet surface in  $E$ . Then there exists a well known isometric mapping  $T$  from  $E$  into  $m$  [S. Banach, loc. cit., p. 187] and  $T$  maps  $S \subset E$  into a surface  $S' \subset m$ . The Lebesgue area  $L(S)$  of  $S$  in  $E$  is defined as the Lebesgue area of  $S'$  in  $m$ , i. e.  $L(S) = L_m(S')$ . In such a way a Lebesgue area  $L(S)$  is defined for all surfaces  $S$  in any metric space. Whenever  $E$  is a Banach space  $B$  the question arises whether this definition of  $L(S)$  agrees with the previous definition of  $L_B(S)$ . The deep-lying equality  $L(S) = L_B(S)$  is proved for all finite dimensional Banach spaces.

Lamberto Cesari.

**Helsel, R. G.:** Remarks on the isoperimetric inequality. Duke math. J. 18, 385—390 (1951).

Given a parametric continuous closed surface  $S$  in the Euclidean  $(x, y, z)$ -space  $E$ , the concept of enclosed volume can be defined in different ways. One definition is  $V_R(S) = \iiint_E |i(x, y, z; S)| dx dy dz$ , where  $i(x, y, z; S)$  is the topological index of  $(x, y, z)$  with respect to  $S$  [ $i = 0$  if  $(x, y, z) \in S$ ]. This definition has been utilized recently for the isoperimetric inequality (T. Radó, this Zbl. 35, 326). Another definition can be obtained by defining  $V_R(P)$  for polyhedral surfaces  $P$  and by putting, for any surface  $S$ ,  $V_a(S) = \inf \lim V_R(P_n)$ , where  $\lim$  is taken with respect to any sequence  $[P_n]$  of closed polyhedral surfaces  $P_n$  approaching  $S$  and then  $\inf$  is taken with respect to all such sequences  $[P_n]$ . The author proves first that  $V_a(S) = V_R(S)$  for all closed polyhedral surfaces as well as for all continuous closed surfaces  $S$  of finite Lebesgue area  $L(S)$  and  $|S| = 0$  (i. e. for those surfaces which occupy a point set in  $E$  of zero three dimensional measure). In general we have  $V_a(S) \geq V_R(S)$  and the author gives an example of a surface  $S$  such that  $L(S) < \infty$ ,  $|S| > 0$ , and  $V_a(S) > V_R(S)$ . The surface is obtained by a modification of a Besicovitch process [Quart. J. Math., Oxford Ser. 16, 86—102 (1945)].

Lamberto Cesari.

**Cecconi, Jaurès:** Sul teorema di Gauss-Green. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 194—218 (1951).

The author discusses the validity of the Gauss-Green theorem for parametric continuous closed surfaces  $S$  of finite Lebesgue area contained in the Euclidean  $(x, y, z)$ -space  $E$ . This theorem involves an equality between a surface integral and an integral relative to the enclosed volume. The author uses the Weierstrass integral over a surface defined by the reviewer for any surface of finite Lebesgue area (this Zbl. 29, 291), and expresses the integral relative to the enclosed volume by means of the same topological index used by T. Radó (this Zbl. 35, 326) for the isoperimetric inequality. Let us suppose  $L(S) < \infty$  and  $|S| = 0$  [i. e. the set of the points of  $S$  be of three dimensional measure zero in  $E$ ]. Let  $f(x, y, z)$  be a function continuous in  $E$  together with its partial derivative  $f_x$ . Let  $O(x, y, z; S)$  be the topological index of the points  $(x, y, z) \in E$  with respect to  $S$  [ $O = 0$  if  $(x, y, z) \in S$ ]. Let  $S: x = x(u), y = y(u), z = z(u), u \in C$ , be any representation of  $S$  on the unit sphere  $C$  and  $H_1(u), u \in C$ , be the generalized Jacobian of the mapping  $T_1: y = y(u), z = z(u), u \in C$ . Let finally  $\iint_S f dy dz$  be the Weierstrass integral of  $fH_1$  on  $S$ .

The author proves that under the above hypotheses the following relation holds  $\iiint_E f O dx dy dz = - \iint_S f dy dz$ , which constitutes the Gauss-Green relation.

As the author proves by examples the previous relation does not hold necessarily if  $|S| > 0$ .

Lamberto Cesari.

**Whitney, Hassler:** On totally differentiable and smooth functions. Pacific J. Math 1, 143—159 (1951).

In Verallgemeinerung von H. Federer [Trans. Amer. math. Soc. 15, 438—456 (1944)] wird bewiesen: Eine auf einer beschränkten Menge  $A$  im  $n$ -dimensionalen Raum  $E^n$  erklärte meßbare Funktion  $f|_A$  ist dann und nur dann fast überall approximativ total differenzierbar, wenn sie auf einer abgeschlossenen

Teilmenge  $F$  von  $A$  mit beliebig maßkleiner Differenz  $A - F$  glatt (= stetig differenzierbar) ist. Gleichwertig damit ist die Möglichkeit, eine glatte Funktion  $g|E^n$  zu bilden mit  $g|F = f|F$ . An diese Deutung anknüpfend, werden weitere Sätze abgeleitet, welche sich auf den Fall eines nicht beschränkten offenen Definitionsbereiches  $A$ , auf den Fall einer Funktion  $f|A$  mit einer Lipschitzbedingung und auf den Fall beziehen, daß  $f$  partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $m$  einschließlich besitzt und die  $m$ -ten Ableitungen fast überall total differenzierbar sind.

*Georg Aumann.*

**Siddiqi, Jamil Ahmad:** Sur un théorème de M. Mandelbrojt. C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 2070—2071 (1951).

Mandelbrojt [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. **63**, 351—378 (1947)] a donné un théorème où des inégalités (\*)  $|f^{(n)}(x)| < m_n$  ( $0 \leq x < \infty$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) et des relations  $f^{(n)}(0) = 0$ , on conclût à  $f(x) \equiv 0$ . — L'A. énonce une modification de ce théorème dans laquelle (\*) est remplacé par  $|f^{(n)}(x)| < m_n e^{-B(x)} [B(x) \geq 0]$ .

*János Horváth.*

**Court, L. M.:** A theorem on conditional extremes with an application to total differentials. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 423—428 (1951).

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange al problema di massimizzare o minimizzare una funzione  $\Phi(q_1, \dots, q_n)$  sotto  $m < n$  condizioni  ${}_a G(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = 0$ , ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) dipendenti da  $n$  parametri  $p_1, \dots, p_n$ , nell'ipotesi che  $\Phi$  divenga stazionaria sotto le dette condizioni in un punto  $Q \equiv (q_1, \dots, q_n)$  dipendente da  $P \equiv (p_1, \dots, p_n)$  in modo tale che la corrispondenza  $Q = Q(P)$  riesca univocamente invertibile, si trovano condizioni equivalenti rispettivamente a quelle, che si hanno nel problema di minimizzare, o massimizzare la  $\Psi(P) = \Phi(Q(P))$  sotto le stesse condizioni  ${}_a G = 0$ , ove si considerino ora le  $q_1, \dots, q_n$  come parametri. Segue una applicazione alla teoria della integrazione dei differenziali totali.

*Gianfranco Cimmino.*

**Videnskij, V. S.:** Über Abschätzungen der Ableitungen eines Polynoms. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **15**, 401—420 (1951) [Russisch].

Ist  $H(x)$  ein im Intervall  $-1 \leq x \leq +1$  positives Polynom  $m$ -ten Grades, so läßt es, wie Verf. zunächst mit Hilfe Tschebyscheffscher Methoden zeigt, die Darstellung  $M_s^2(x) + (1-x^2)N_{s-1}^2(x)$  ( $s \geq m/2$ ) zu; die Nullstellen der Polynome  $M$  und  $N$  liegen dabei sämtlich im Intervall  $-1 \leq x \leq +1$  und trennen sich gegenseitig. Das Hauptergebnis der Arbeit ist nun der folgende Satz: Genügt das Polynom  $n$ -ten Grades  $P_n(x)$  im abgeschlossenen Intervall  $-1 \leq x \leq +1$  der Ungleichung  $|P_n(x)| \leq M_n^2(x) + (1-x^2)N_{n-1}^2(x)^{1/2}$ , so gilt für die  $k$ -te Ableitung im offenen Intervall  $-1 < x < +1$  die Ungleichung  $|P_n^{(k)}(x)| \leq |M_n^{(k)}(x) + ((1-x^2)N_{n-1}^{(k)}(x))^{1/2}|$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Der Beweis benötigt eine Reihe von Betrachtungen über Zeichenwechsel von Polynomableitungen sowie einen an sich interessanten Hilfssatz, der etwa folgendes besagt: Es seien  $f(x)$  und  $g(x)$  stetig differenzierbar, die Ableitungen  $f'$  und  $g'$  haben höchstens  $n-1$  Nullstellen, jede reelle Linearform  $\mu f + r g$  habe höchstens  $n$  Nullstellen — alles in demselben Intervall  $a \leq x \leq b$ . Dann haben  $f$  und  $g$  in diesem Intervall je  $n$  verschiedene Nullstellen, die sich gegenseitig trennen; das Entsprechende gilt für die Ableitungen. — Verf. gibt noch ein Analogon des Hauptergebnisses für ein einseitig unendliches Intervall. — Wie Verf. bemerkt, sind seine Sätze meist Verallgemeinerungen bereits bekannter Ergebnisse; z. B. ist der Hauptsatz für  $k = 1$  von S. Bernštejn bewiesen worden.

*Wolfgang Hahn.*

**Mukherjee, B. N.:** A note on generalized mean value theorem. Math. Student **18**, 148—151 (1951).

Verf. gibt Beweise einer Variante des Cauchyschen Mittelwertsatzes: Bei differenzierbaren Funktionen  $F(x)$ ,  $G(x)$ ,  $H(x)$  gibt es für jedes Zahlenpaar  $(a, b)$



eine Zahl  $a < \xi < b$  derart, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & F(b) - F(a) & F'(\xi) \\ 1 & G(b) - G(a) & G'(\xi) \\ 1 & H(b) - H(a) & H'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

ist. — Durch Spezialisierung erhält er hieraus die Formeln

$$\left\| 1; \sum_{r=0}^n \left[ a_r f^{(n-r)}(b) - \sum_{k=n-r}^n a_k \frac{(b-a)^{k-n+r}}{(k-n+r)!} f^{(r)}(a) \right]; \sum_{k=0}^n a_k \frac{(b-\xi)^k}{k!} f^{(n+1)}(\xi) \right\| = 0,$$

$$\left\| 1; f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a); \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \right\| = 0,$$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a); \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \right\| = 0,$$

wobei  $\| \|$  dreireihige und  $\| \|$  zweireihige Determinanten bedeuten, in denen  $f$ ,  $n$  und evtl.  $a_r$  in den einzelnen Zeilen verschiedene Bedeutung haben. Vgl. G. S. Mahajani und V. R. Thiruvengkatachar, Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 31, 124—129 (1950), C. T. Rajagopal, Math. Student 14, 71—73 (1946), G. S. Mahajani, Mess. of Math. 52, 78—80 (1922). [Bem.: S. 150 in der dritten Zeile sollte  $n-1$ , bzw.  $p-1$  bzw.  $q-1$  anstatt  $n$ , bzw.  $p$ , bzw.  $q$  stehen.] János Aczel.

Bagchi, Hari Das and Kantish Chandra Maity: Statical note on certain algebraic inequalities. Math. Student 18, 143—145 (1951).

Kritikos, N.: Remarques sur la convergence ou la divergence de certaines suites. Bull. Soc. math. Grèce 25, 40—46 und französ. Zusammenfassg. 46—48 (1951) [Griechisch].

Soit (2)  $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$  une suite de points de l'espace euclidien à  $m$  dimensions. Pour qu'elle soit convergente, il faut qu'à tout  $\varepsilon > 0$  corresponde quelque indice  $\mu_\varepsilon$  tel que, en désignant par  $AB$  la distance de deux points  $A$  et  $B$ , l'on ait  $|A_\lambda A_{\mu_\varepsilon} - A_\lambda A_{\mu_\varepsilon}| < \varepsilon$  pour  $\lambda$  et  $\lambda > \mu_\varepsilon$ . Cette condition n'est pas suffisante pour la convergence de (2); toutefois on peut formuler le Théorème. Si une suite (2) satisfait à la condition énoncée, ou bien elle sera convergente ou elle contiendra un élément  $A_\xi$  tel que les points de la suite qui viennent après  $A_\xi$  soient équidistants de  $A_\xi$ :  $A_\xi A_{\xi+\mu} = \text{const} \neq 0$  pour  $\mu = 1, 2, 3, \dots$ , et possèdent au moins deux points limites différents. Le nombre de ces éléments  $A_\xi$  ne peut d'ailleurs excéder  $m$ .

(Aus der französ. Zusammenfassung.)

Carosella, Alberto: Dimostrazioni delle formule di addizione delle funzioni circolari. Periodico Math., IV. Ser. 29, 220—231 (1951).

### Allgemeine Reihenlehre:

Agnew, Ralph Palmer: Ratio tests for convergence of series. Pacific J. Math. 1, 1—3 (1951).

Für die Glieder zweier Reihen  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  möge gelten: (1)  $a_{n+1}/a_n = (b_{n+1}/b_n)(1 + c_n)$ . Jehle hat (dies. Zbl. 32, 404) gezeigt: dann ist die Konvergenz von  $\sum |c_n|$  hinreichend dafür, daß die Reihen stets entweder beide konvergieren oder beide divergieren. Verf. zeigt nun sehr einfach, daß diese Bedingung sogar notwendig und hinreichend ist. Als Hilfssätze dienen: es gelte (1); dann und nur dann, wenn  $\sum |(1 + c_0) \dots (1 + c_{n-1}) c_n|$  konvergiert, folgt aus der Konvergenz von  $\sum a_n$  stets die von  $\sum b_n$ , und: dann und nur dann, wenn  $\sum [(1 + c_0) \dots (1 + c_n)]^{-1} c_n|$  konvergiert, folgt aus der Konvergenz von  $\sum b_n$  stets die von  $\sum a_n$ .

Theodor Kaluza jr.

Hornich, Hans: Su alcune successioni di serie i cui termini generali convergono a zero. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 298—300 (1951).

In Verallgemeinerung eines früher von ihm gefundenen Satzes (dies. Zbl. 16, 355) beweist Verf.: Für jedes  $j = 1, 2, \dots$  sei eine unendliche Reihe  $\sum a_n^{(j)}$  vorgelegt, mit  $a_n^{(j)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\sum_n |a_n^{(j)}| = \infty$ .  $\sum_n a_n^{(j)} \leftrightarrow \sum_i \sum_k a_{ik}^{(j)}$  sei eine „Umordnung“ der  $j$ -ten Reihe, für welche  $\sum_{i \neq j} \sum_k |a_{ik}^{(j)}|$  konvergiert, während also  $\sum_k |a_{jk}^{(j)}| = \infty$  und  $a_{jk}^{(j)} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Seien weiter  $A_1, A_2, \dots$  beliebige komplexe Zahlen und  $\zeta$  eine  $l$ -te Einheitswurzel und  $l \geq 3$ . Dann gibt es eine Folge ganzer Zahlen  $l_{ik}$  mit  $\sum_i \sum_k a_{ik}^{(j)} \zeta^{l_{ik}} = A_j$  für alle  $j$ . Karl Prachar.

**Hamilton, Hugh J.:** Vector subseries of maximum modulus. Proc. Amer. math. Soc. 2, 87—92 (1951).

Verf. verallgemeinert fast wörtlich einige Sätze auf (reelle) Euklidische Räume beliebiger Dimension ( $E_n$ ;  $E_\infty = l_2$ ), die er früher (dies. Zbl. 18, 253) für  $E_2$  (d. h. im Komplexen) erhalten hat. U. a. wird gezeigt: Ist  $\sum c_k$  eine Reihe von Elementen eines  $B$ -Raumes mit  $\sum |c_k| = 1$ , so gibt es unter den Summen  $\sum' c_k$  (Summation über eine Teilfolge) eine von größtem Summenbetrag. In  $E_n$  ist dieser Betrag  $> \varrho_n$  (s. u.), wobei  $\varrho_n$  die beste Schranke ist, wenn alle Reihen der genannten Art zugelassen werden. Dabei ist  $\varrho_\infty = 0$  und  $\varrho_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) / 2 \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ . In ähnlicher Weise werden die endlichen Teilsummen von Reihen mit  $\sum |b_k| = \infty$  behandelt. — Der Wert von  $\varrho_n$  findet sich schon bei A. E. Mayer (für endliche Reihen; dies. Zbl. 19, 140) und H. Hadwiger (dies. Zbl. 28, 219). Jedoch erhielten diese Autoren nur die Abschätzung  $\geq \varrho_n$ . Karl Zeller.

**Tsuchikura, Tamotsu:** On the theory of series with function terms. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 104—113 (1951).

Sätze von J. D. Hill [Bull. Amer. math. Soc. 48, 103—108 (1942)] und R. P. Agnew (dies. Zbl. 37, 47) werden in komplizierter Weise auf Folgen und Reihen von Funktionen (unter gewissen Meßbarkeits- und Stetigkeitsvoraussetzungen) verallgemeinert. Die Beweise werden nach dem Muster von S. Saks (dies. Zbl. 16, 29) geführt. Robert Schmidt.

**Bailey, W. N.:** On the simplification of some identities of the Rogers-Ramanujan type. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 217—221 (1951).

Für  $|q| < 1$  kann die Hilfsfunktion

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 + q^n z^{-1}) (1 + q^{n-1} z) [1 - q^{2n-1} z^2] [1 - q^{2n-1} z^{-2}] = \varphi(z)$$

vermöge

$$q(z) = z \varphi(z^{-1}) = -q z^3 \varphi(qz)$$

in eine lineare Verbindung unendlicher Produkte verwandelt werden. Insbesondere folgt

$$\prod_1^{\infty} \frac{(1 - q^{10n-6})(1 - q^{10n-4})(1 - q^{10n})}{1 + q^n} = \prod_1^{\infty} (1 + q^{15n-8})(1 + q^{15n-7})(1 - q^{15n}) \\ - q \prod_1^{\infty} (1 + q^{15n-13})(1 + q^{15n-2})(1 - q^{15n}).$$

Wilhelm Maier.

**Garreau, G. A.:** A note on the summation of sequences of 0's and 1's. Ann. of Math., II. Ser. 54, 183—185 (1951).

Jede Folge von Nullen und Einsen bestimmt einen Dualbruch und damit einen Punkt in  $(0, 1)$ . Eine reelle  $T$ -Matrix  $A = (a_{ik})$  hat die Boreleigenschaft, wenn die den  $A$ -summierbaren 0.1-Folgen entsprechenden Punkte in  $(0, 1)$  eine Menge vom



Maß 1 bilden. J. D. Hill [Ann. of Math., II. Ser. 46, 556 — 562 (1945)] bewies, daß  $A$  nur dann die Boreleigenschaft haben kann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^2 = 0$  ist. Es wird ein Beispiel dafür konstruiert, daß diese Bedingung nicht hinreichend ist.

Gottfried Köthe.

Rogers, C. A.: The transformation of sequences by matrices. Proc. London math. Soc., II. Ser. 52, 321—364 (1951).

Eine Menge  $\alpha$  von Folgen  $x = \{x_k\}$  wird als Folgenraum (sequence space) bezeichnet, wenn für jedes Paar von Folgen  $x = \{x_k\}$  und  $y = \{y_k\}$  aus  $\alpha$  und jedes Zahlenpaar  $\lambda, \mu$  die Folge  $z = \{z_k\}$ ,  $z_k = \lambda x_k + \mu y_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ein Element von  $\alpha$  ist. Ein solcher Folgenraum heißt normal, wenn, für irgendeine Folge  $x$  aus  $\alpha$ , auch jede Folge  $z$  mit  $|z_k| \leq |x_k|$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) zu  $\alpha$  gehört. Verf. liefert einen Beitrag zur Lösung der Aufgabe, notwendige und hinreichende Bedingungen aufzufinden, denen eine Toeplitz-Matrix  $A = (a_k(\omega))$  genügt, damit für einen gegebenen normalen Folgenraum  $\alpha$  a)  $A$  „total regulär“ wird für jede Folge von  $\alpha$ ; b)  $A$  den „Kern“ jeder Folge von  $\alpha$  verkleinert oder unverändert läßt; c)  $A$  den Kern jeder Folge von  $\alpha$  vergrößert oder unverändert läßt; d)  $A$  die abgeleitete Menge jeder Folge von  $\alpha$  verkleinert oder unverändert läßt; e)  $A$  die abgeleitete Menge jeder Folge von  $\alpha$  vergrößert oder unverändert läßt. — Dabei heißt eine (komplexe) Matrix  $A$  für einen Folgenraum total regulär, wenn für jede

reelle Folge  $\{x_k\}$  aus  $\alpha$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty$  die Beziehungen  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \Re \left\{ \sum_{k=1}^l a_k(\omega) x_k \right\} = +\infty$

und  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \left| \Im \left\{ \sum_{k=1}^l a_k(\omega) x_k \right\} \right| = 0$  gelten. — Als Kern der Folge  $\{x_k\}$  definiert Verf. die Menge der Punkte  $z$ , für die bei beliebigem reellem  $\varphi$  die Ungleichung  $\Re \{z e^{i\varphi}\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \Re \{x_k e^{i\varphi}\}$

gilt. Als Kern der  $A$ -Transformation der Folge  $x$  definiert er die Menge der Punkte  $z$ , für die bei beliebigem reellem  $\varphi$  die Ungleichung  $\Re \{z e^{i\varphi}\} \leq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \Re \left\{ \sum_{k=1}^l a_k(\omega) x_k e^{i\varphi} \right\}$  gilt. — Unter der abgeleiteten Menge einer Folge  $x$  wird die Menge der Punkte  $z$  verstanden, für die  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - z| = 0$  ist. Die abgeleitete Menge der  $A$ -Transformation von  $x$  wird

als die Menge der Punkte  $z$  definiert, für die  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^l a_k(\omega) x_k - z \right| = 0$  gilt. — Verf. gewinnt nur in einigen sehr speziellen Fällen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Allgemeine Ergebnisse erzielt er aber unter der Annahme, daß die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) x_k$  für jede

Folge  $\{x_k\}$  aus  $\alpha$  konvergiert oder für alle hinreichend großen Werte von  $\omega$  zwischen endlichen Grenzen oszilliert. U. a. werden folgende Sätze bewiesen; ad a) Der normale Folgenraum  $\alpha$  enthalte eine reelle, gegen  $+\infty$  divergierende Folge.  $A$  sei eine  $T$ -Matrix derart, daß

$\lim_{l \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^l a_k(\omega) x_k \right|$  für  $\omega \rightarrow \infty$  und jede Folge  $x$  aus  $\alpha$  definiert und endlich ist.  $A$  ist dann und nur dann für  $\alpha$  total regulär, wenn für jede Folge  $x$  aus  $\alpha$  die Bedingungen

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} [|\Re \{a_k(\omega)\}| - \Re \{a_k(\omega)\}] |x_k| < +\infty$  und  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\Im \{a_k(\omega)\} x_k| = 0$  erfüllt sind. — ad b) Der normale Folgenraum  $\alpha$  enthalte alle beschränkten Folgen, und die  $T$ -Matrix

$A$  sei so beschaffen, daß für  $\omega \rightarrow \infty$  und jede Folge  $x$  aus  $\alpha$   $\lim_{l \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^l a_k(\omega) x_k \right|$  definiert und endlich ist.  $A$  verkleinert dann und nur dann den Kern jeder Folge aus  $\alpha$ , wenn

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega) - b_k(\omega)| \cdot |x_k| = 0$  ist für jede Folge  $x$  von  $\alpha$ . Hierbei bedeutet  $b_k(\omega) = \frac{1}{2} (|\Re \{a_k(\omega)\}| + \Re \{a_k(\omega)\})$ .

Viktor Garten.

Jackson, F. H.: Proper extensions by dilution of matrices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 308—314, Indagationes math. 13, 308—314 (1951).

Den „stretched“  $\gamma$ -Matrizen (Reihe-in-Folge-Transformationen) von P. Vermes [Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 8, 1—13 (1947)] werden die „diluted“  $T$ -Matrizen (die entsprechenden Folge-in-Folge-Transformationen) an die Seite gestellt: Aus  $T = (a_{\mu\nu})$  werden die Matrizen mit den Elementen  $a_{\mu, k}^{(k)} = a_{\mu\nu}$ ,  $a_{\mu 0}^{(k)} = 0$  sonst, gebildet und als Limitierungsverfahren insbesondere auf die Ab-

schnitte von Potenzreihen angewendet. Für Funktionen, die im Innern des Einheitskreises regulär sind und deren Singularitäten auf dem Einheitskreise polygonal verteilt sind, wird durch Dilution die Eignung eines  $T$ -Verfahrens zur analytischen Fortsetzung verbessert.

Robert Schmidt.

Hill, J. D.: Note on a theorem in summability. Proc. Amer. math. Soc. 2, 372—373 (1951).

Gestützt auf S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932 (dies. Zbl. 5, 209) und H. J. Hamilton und J. D. Hill (dies. Zbl. 25, 38), wird ein sehr kurzer Beweis für den folgenden Satz von R. Henstock (dies. Zbl. 35, 160) gegeben: Zu jeder beschränkten Folge  $z_1, z_2, \dots$  gibt abzählbar viele Folgen, deren Glieder nur der Werte 0 und 1 fähig sind, so daß aus der Limitierbarkeit aller dieser durch ein reguläres Verfahren  $T$  stets die  $T$ -Limitierbarkeit von  $z_1, z_2, \dots$  folgt.

Robert Schmidt.

Kuttner, B.: A new method of summability. Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 230—242 (1951).

Falls  $\{\lambda_n\}$  eine monoton nach  $\infty$  wachsende Folge von positiven Zahlen ist, nennt Verf. eine Reihe  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  summierbar  $(X, \lambda_n)$  mit Summe  $l$ , falls  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_n \leq x} a_n e^{\lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right)^x = l$ . Er beweist, daß eine Reihe, die für ein positives  $\kappa$  Riesz-summierbar  $(R, \lambda_n, \kappa)$  ist, auch summierbar  $(X, \lambda_n)$  mit der gleichen Summe ist. Er beweist weiter folgenden Satz: In der komplexen  $s$ -Ebene ( $s = \sigma + it$ ) sei  $K$  derjenige Teil der Kurve  $|e^{-s}| = |1 - s|$ , der in der Halbebene  $\sigma < 0$  liegt. Es sei  $D(0)$  derjenige Teil der Ebene, der rechts von  $K$  liegt, und allgemein sei  $D(z)$  für komplexe  $z$  derjenige Bereich der  $s$ -Ebene, in dem  $s - z$  zu  $D(0)$  gehört. Falls nun die Dirichletsche Reihe  $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$  für genügend großes  $\sigma$  konvergiert, so ist sie summierbar  $(X, \lambda_n)$  mit der Summe  $f(s)$  für jedes  $s$ , das für jede Singularität  $z$  von  $f(s)$  in  $D(z)$  liegt. Falls  $f(s)$  bis auf einen einzigen Pol  $z_0$  erster Ordnung regulär ist, so ist die Reihe nicht summierbar  $(X, \lambda_n)$  für ein  $s$ , das nicht in  $D(z_0)$  liegt. — Schließlich zeigt Verf., daß eine Reihe, die summierbar  $(A, \lambda_n)$  ist, d. h. für die  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$  einen Limes hat, falls  $s \downarrow 0$ , nicht summierbar  $(X, \lambda_n)$  zu sein braucht.

Hendrik Douwe Kloosterman.

Teghem, J.: Sur des transformations de séries. Application aux séries entières. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 21—33 (1951).

Es handelt sich um die Summierungsverfahren  $P^{(-m)}(\alpha)$  und  $\Pi^{(m)}(\alpha)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ;  $\alpha$  komplex,  $\neq 0, \neq 1$ ), die Verf. schon früher (vgl. dies. Zbl. 40, 320) untersuchte. Jetzt werden diese Verfahren zur Summierung von Potenzreihen

(1)  $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$  mit nicht verschwindendem Konvergenzradius  $r$  benützt [zur Summierung durch  $P^{(0)}(\alpha)$  und, für einen gewissen  $\alpha$ -Bereich, durch  $\Pi^{(1)}(\alpha)$  vgl. P. Vermes, dies. Zbl. 33, 257]. Der Summierbarkeitsbereich im Falle  $P^{(-m)}(\alpha)$  wird durch eine an den zu (1) gehörigen Mittag-Lefflerschen Stern anschließende Konstruktion erzeugt. Er besteht aus der Gesamtheit der Punkte  $z$  mit  $|\alpha z| < r$  und  $|z| |1 - \alpha| < |y - \alpha z|$  für alle Ecken  $y$  des Sternes. Eine ähnliche Konstruktion führt im Falle von  $\Pi^{(m)}(\alpha)$  zum Ziel. Dabei spielt, wenn  $|1 - \alpha| \geq 1$  ist, das Verhalten der Funktion  $f(z)$  bzw. eines Zweiges  $\varphi(z)$  derselben im Unendlichen eine Rolle. Die genannten Summierbarkeitsbereiche werden auch noch mittels eines Borelschen Fortsetzungsverfahrens (vgl. Verf., dies. Zbl. 35, 338) bestimmt.

Werner Meyer-König.

Korevaar, Jacob: An estimate of the error in tauberian theorems for power series. Duke math. J. 18, 723—734 (1951).

Es sei  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nt}$  für  $t > 0$  konvergent und  $a_n > -n^{\alpha-1} L(n)$



( $n = 1, 2, \dots$ ), wo  $\alpha$  eine reelle Zahl ist und  $L(u)$  eine langsam oszillierende Funktion, d. h. eine für  $u \geq 1$  definierte, positive, stetige Funktion mit  $L(au)/L(u) \rightarrow 1$  falls  $u \rightarrow \infty$ , für jedes  $a > 0$ . Weiter sei  $f(t) = O\{t^{-\alpha} L(t^{-1}) \omega(t)\}$ , wo  $\omega(t)$  eine positive, mit  $t$  monoton abnehmende Funktion ist, derart, daß  $\omega(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$  und  $\omega(ut)/\omega(t) < A^u$  für  $u \geq 1$ ,  $0 < t \leq u^{-1}$ , wo  $A$  eine Konstante  $> 1$  ist. Dann ist

(1)  $s_n^{(k)} = O\{n^{\alpha+k} L(n) |\log \omega(n^{-1})|^{-k-1} (\log |\log \omega(n^{-1})|)^{k+1}\}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) für jedes ganze  $k \geq 0$  (wie üblich ist  $s_n^{(0)} = s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ , und  $s_n^{(k)} = s_0^{(k-1)} + s_1^{(k-1)} + \dots + s_n^{(k-1)}$  für  $k = 1, 2, \dots$ ). Durch eine Verfeinerung der Methode von Karamata wird (1) zuerst für genügend großes  $k$  und dann durch Anwendung eines Tauberschen Satzes für Cesàro-Summierbarkeit auch für alle kleineren  $k \geq 0$  bewiesen. Verf. beweist auch, daß (1) nicht erheblich verschärft werden kann. Durch ein Beispiel zeigt er, daß (sogar falls  $\omega(t) t^{-B} \uparrow \infty$  für  $t \downarrow 0$ , wo  $B$  eine positive Konstante ist) die Ungleichung (1) gewiß nicht weiter als bis zu  $s_n^{(k)} = O\{n^{\alpha+k} L(n) |\log \omega(n^{-1})|^{-k-1}\}$  verschärft werden kann.

Hendrik Douwe Kloosterman.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Hummel, P. M. and C. L. Seebeck jr.: A new interpolation formula. Amer. math. Monthly 58, 383—389 (1951).

Es sei  $f(x)$  eine mit ihren ersten  $m+n+1$  Ableitungen stetige Funktion in einem Gebiete, das die voneinander verschiedenen Stellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  enthält.

Man setze  $c'_i = \frac{(m+n-i)! m!}{(m+n)! (m-i)! i!}$ ,  $c_i = \frac{(m+n-i)! n!}{(m+n)! (n-i)! i!}$ ,  $S_k = f(x_k) + \sum_{i=1}^m c'_i f^{(i)}(x_k) (x - x_k)^i$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ),  $R_k = (-1)^n \frac{m! n! (x - x_k)^{m+n+1}}{(m+n)! (m+n+1)!} f^{(m+n+1)}(\theta_k)$  ( $x \dots \theta_k \dots x_k$ ). Mit diesen Annahmen und Zeichen beweisen Verff. den Satz, daß

$$(1) \quad f(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} \frac{x_j - x}{x_j - x_i} S_i + R, \quad \text{wo } R = \sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} \frac{x_j - x}{x_j - x_i} R_i.$$

Läßt man in (1) die Fehlerfunktion  $R$  weg, so entsteht die Schaltformel der Überschrift. Die üblichen Schaltformeln arbeiten mit einem Polynom, das an mehreren Stellen mit  $f(x)$  übereinstimmt. Darüber hinausgehend erlaubt (1), so viele Ableitungen von  $f(x)$  einzubeziehen, wie man wünscht, was die Genauigkeit beträchtlich erhöht. — Für  $R$  lassen sich eine obere und untere Schranke angeben. Beispiel:  $n = m = 1$ ,  $f(x) = I + C + R$ . Von den beiden Posten

$$I = \frac{(x_1 - x) f(x_0) + (x - x_0) f(x_1)}{x_1 - x_0}, \quad C = \frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2(x_1 - x_0)} [f'(x_0) - f'(x_1)]$$

entspricht der erste  $I$  der linearen Schaltung, der zweite  $C$  ist die von den Ableitungen herrührende Verbesserung; der Fehler ist

$$R = \frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{12(x_1 - x_0)} [(x_1 - x)^2 f'''(\theta_1) - (x - x_0)^2 f'''(\theta_0)] (x_1 \dots \theta_1 \dots x, x_0 \dots \theta_0 \dots x).$$

Über  $R$  beweisen Verff. den Satz: Wenn  $f'''(x)$  in  $(x_0, x_1)$  sein Zeichen nicht ändert, verschwindet  $R$  für ein  $x$  in  $(x_0, x_1)$ . Sind dort  $M$  und  $m$  Größt- und Kleinstwert von  $|f'''(x)|$ , so gilt  $|R| < [M/124 + (M-m)/144] |x_1 - x_0|^3$ . — Zahlenbeispiele: Berechnung von  $1. \sin 35^\circ$  mit  $n = m = 1$ ;  $2. 1,031^{50}$  mit  $n = m = 2$ .

Lothar Koschmieder.

Merli, Luigi: Su una classe di polinomi interpolanti costruiti con punti fondamentali normalmente distribuiti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 103—106 (1951).

( $-1, 1$ ) bedeute das Gebiet  $-1 < x < 1$ ;  $[-1, 1]$  den Bereich  $-1 \leq x \leq 1$ , in dem eine Funktion  $f(x)$  erklärt sei. Es seien  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ), kurz  $x_k$  die

Grundpunkte (Gp.) einer Lagrangeschen Schaltung,  $n$  verschiedene in  $[-1, 1]$  gelegene Stellen [s. L. Fejér, Math. Ann. **106**, 1—55 (1932); dies. Zbl. **3**, 250]. Dann

sind  $l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}$  mit  $\omega(x) = c \prod_{k=1}^n (x-x_k)$ ,  $c \neq 0$  die Grundpolynome der Schaltung, so daß  $l_k(x_i) = \delta_{ik}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Die Gp. heißen normal verteilt, wenn die linearen Funktionen  $v_k^{(n)}(x) = v_k(x) = 1 - (x-x_k)\omega''(x_k)/\omega'(x_k)$  in  $[-1, 1]$  den Ungleichungen  $v_k^{(n)}(x) \geq \varrho > 0$  ( $0 < \varrho < 1$ ) gehorchen ( $n = 1, 2, \dots$ ). G. Grünwald zeigte (dies. Zbl. **28**, 405), daß bei dieser Annahme das mit einer in  $[-1, 1]$  stetigen Funktion  $f(x)$  gebildete Polynom von höchstens  $(2n-2)$ -tem Grade  $G_n[f] = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k^2(x)$  in  $(-1, 1)$  mit  $n \rightarrow \infty$  gegen  $f(x)$  strebt, und zwar gleichmäßig in  $-1 + \lambda \leq x \leq 1 - \lambda$ ,  $\lambda > 0$ . Verf. beweist hier weitergehend, daß bei denselben Annahmen in  $[-1, 1]$  gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (1-x_k^2) f(x_k) l_k^2(x) = (1-x^2) f(x)$$

gilt. Damit ist der Grad  $\leq 2n-1$  des Hermiteschen Schaltpolynoms (s. Fejér a. a. O.) in gewissem Sinne um 1 unterboten.

Lothar Koschmieder.

**Levin, V. I.:** Asymptotische Abschätzung der Genauigkeit der asymptotischen Entwicklungen einer gewissen Klasse von Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 13—16 (1951) [Russisch].

Sei (\*)  $f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-\gamma-nr}$  eine asymptotische Entwicklung für große  $t$ ,  $\gamma$  und

$r > 0$ . Für solche  $t$ , für die (\*) divergiert, wird  $r(t) = \inf_{N \geq 0} \left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^{-\gamma-nr} \right|$  betrachtet, die beste Annäherung der asymptotischen Entwicklung an  $f(t)$  bei festem  $t$ . Verf. gibt (ohne Beweis) einige Sätze über das asymptotische Verhalten von  $r(t)$  bei großem  $t$  und zwar für die Entwicklungen solcher  $f(t)$ , deren Laplace-Transformation  $\varphi(p)$  eine einfache Gestalt hat, z. B. die Form

$$\varphi(p) = (p-p_0)^{\gamma-1} \sum_{\mu=1}^m \frac{A_{\mu}}{\{(p-p_0)^r - \zeta^r\}^{\mu}},$$

wo  $A_{\mu} \neq 0$ ,  $r$  rational und  $> 0$ ,  $p_0$  und  $\zeta \neq 0$  feste Zahlen,  $0 < \gamma < r$ .

Karl Prachar.

**Bruijn, N. G. de:** The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes. J. Indian math. Soc., n. Ser. **15**, 25—32 (1951).

Let  $\varrho(u)$  be a function defined as  $\varrho(u) = 1$  for  $0 \leq u \leq 1$  and  $u\varrho'(u) = -\varrho(u-1)$ , for  $u \geq 1$ . The author proved (i) that

$$\varrho(u) \sim \varrho_1(u) = \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\int_0^{\xi} \frac{s e^s - e^s + 1}{s} ds\right),$$

as  $u \rightarrow \infty$ , where  $\xi (> 0)$  is defined by  $e^{\xi} - 1 = u\xi$ , and (ii) that  $\varrho(u) =$

$\frac{e^{\gamma}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp\left(-uz + \int_0^z \frac{e^s - 1}{s} ds\right) dz$ . In the proof of (i), he uses one of his previous results about the asymptotic behaviour of a function  $F$  satisfying  $uF(u) = \int_0^1 F(u-t)dt$ ,

by which he proved  $\lim_{u \rightarrow \infty} \varrho(u)/\varrho_1(u) = c$ . To determine the constant  $c$ , the author used the saddle-point method. The result (ii) can be rendered alternatively as

the following: let  $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-us} \varrho(u) du$ . It is easy to verify that  $f(s)$  satisfies the differential equation  $s f'(s) = (e^{-s} - 1) f(s)$ . Integrating and observing the



„initial condition“ that  $f(s) \sim \frac{1}{s}$  as  $s \rightarrow \infty$ , we have  $f(s) = e^\gamma \exp \left( \int_0^s \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \right)$ .

We obtain the explicite formula (ii) by the inversion formula for Laplace integral.  
Loo-Keng Hua.

**San Juan, Ricardo:** Einige bemerkenswerte asymptotische Entwicklungen. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 11, 65–110 (1951) [Spanisch].

Soit  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$  une série asymptotique qui correspond à une fonction  $f(z)$  dans un domaine  $R$ , dont l'adhérence contient l'origine. Les nombres  $m_n^{(p)}$  soient définis par  $\left| f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu \right| \leq m_n^{(p)} |z|^{n-p}$  ( $z \in R$ ). L'A. détermine les  $m_n^{(p)}$  appartenant à diverses méthodes pour obtenir une série asymptotique à une fonction. Voici un théorème typique: Soit  $\alpha(t)$  ( $t = \rho e^{i\varphi_0}$ ,  $0 < \rho < \infty$ ) une fonction positive ayant les moments  $\mu_n = \int_0^{\infty(\varphi_0)} t^n \alpha(t) dt$ , où l'intégrale est prise sur la droite issue

à l'origine et de direction  $\varphi_0$ . Soit  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$  une série de puissances, posons  $\Phi(tz) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\mu_\nu} (tz)^\nu$  et  $f(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \Phi(tz) \alpha(t) dt$  [ $f(z)$  est la somme de la série  $\sum a_\nu z^\nu$  par la méthode des moments, voir Hardy, *Divergent Series*, Oxford 1949, p. 81; ce Zbl. 32, 58]. Si  $\left| \Phi(t) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{\mu_\nu} t^\nu \right| \leq M_n |t|^n$  pour  $|\theta| \leq \delta$

( $t = \rho e^{i\theta}$ ) et si  $\int_0^{\infty(\varphi_0)} |t^n \alpha(t)| dt = C_n$ , alors  $\left| f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu \right| \leq M_n C_n |z|^n$  pour  $-\varphi_0 - \delta \leq \varphi \leq \varphi_0 + \delta$  ( $z = r e^{i\varphi}$ ).  
János Horváth.

**Berghuis, J.:** Berechnung der Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung der Funktion  $\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( z^n \int_{i=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_i n + \beta_i) \right)$ . *Math. Centrum*, Amsterdam, Rapport ZW 1951–007, 12 p. (1951) [Holländisch] (hektographiert).

L'A. obtient pour la fonction ci-dessus ( $\mu > 0$ ,  $\Re(\alpha_i) > 0$ ) l'expression asymptotique suivante:

$$\Omega(z) = \sum_j' \left\{ \sum_{h=0}^S c_h e^{Z_j} Z_j^{1-\beta-h} + R_S(z) \right\} - \sum_{n=0}^N \frac{z^{-n}}{\prod_{i=1}^{\mu} \Gamma(\beta_i - \alpha_i n)} + O(z^{-N}),$$

où  $\alpha = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i$ ,  $\beta = \sum_{i=1}^{\mu} \beta_i - \frac{\mu-1}{2}$ ,  $A = \alpha^\alpha \prod_{i=1}^{\mu} \alpha_i^{\alpha_i}$ ,  $Z_j = (z A e^{2j\pi i})^{1/\alpha}$ , la somme  $\sum_j'$  est étendue aux valeurs de  $j$  pour lesquelles  $|\arg Z_j| < \pi$ ,  $R_S(z) = O(e^{Z_j} Z_j^{-S-\beta})$  et on a des formules de récurrence pour les coefficients  $c_h$ :

$$c_0 = \frac{\alpha^{\beta-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{\mu} \alpha_i^{\frac{1}{2}-\beta_i}}{(\sqrt{2\pi})^{\mu-1}}, \quad \frac{c_1}{c_0} = \frac{6\beta(\beta-1)+1}{12} - \alpha \sum_{i=1}^{\mu} \frac{6\beta_i(\beta_i-1)+1}{12\alpha_i},$$

etc.—Dans les cas  $\mu = 1$  et  $\mu = 2$  l'A. obtient des expressions asymptotiques plus simples pour  $\Omega(z)$ . Emploi est fait des résultats de Kemperman (ce Zbl. 40, 326) et de Wright [*Proc. London math. Soc.*, II. Ser. 38, 257–270 (1934); ce Zbl. 10, 211] qui considère le cas  $\mu = 2$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ .  
János Horváth.

**Mergeljan, S. N.:** Über einen Satz von M. A. Lavrent'ev. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 77, 565–568 (1951) [Russisch].

Une nouvelle démonstration du théorème (A. Lavrent'ev, *Actual. sci. industr.*

Nr. 441, Paris 1936; ce Zbl. 17, 206): Chaque fonction  $f(z)$  continue sur un continu  $K$  sans points intérieurs ne partageant pas le plan peut être représentée par une série de polynômes  $\sum P_n(z)$  uniformément convergente sur  $K$  vers  $f(z)$ . La démonstration est appuyée sur le théorème connu de Weierstrass sur l'approximation uniforme de toute fonction continue  $f(z)$  dans un ensemble fermé et borné quelconque par des polynômes (1)  $\Pi(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$  de deux variables réelles  $x$  et  $y$ , ( $z = x + i y$ ). Il suffit donc de démontrer le théorème en question dans le cas où  $f(z)$  est un polynôme  $\Pi(x, y) = \Pi(z)$ . — Posons  $\zeta = \xi + i \eta$ ,  $F(\zeta) = u_\xi - i v_\eta + i (u_\eta + v_\xi)$  et désignons par  $D_\varepsilon$  un domaine borné par une courbe analytique  $C_\varepsilon$  contenant  $K$  dans son intérieur et tel que  $\text{mes}(D_\varepsilon - K) < \varepsilon$ . On a la formule (facile à prouver)

$$(2) \quad \Pi(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\Pi(t) dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

L'approximation (uniforme sur  $K$ ) du premier terme du second membre (2) par des polynômes en  $z$  est évidente et celle du second membre l'A. déduit du lemme suivant: A chaque  $\varepsilon > 0$  et chaque point  $\zeta \in K$  correspond un polynome  $P_\zeta(z)$  de la variable  $z$  tel que pour tout  $z \in K$  on a

$$|P_\zeta(z)| < \frac{A}{|\zeta - z|} \quad \text{et} \quad \left| P_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < B \cdot \varepsilon \quad \text{si} \quad |\zeta - z| \geq \varepsilon,$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes.

F. Leja.

Timan, A. F.: Verallgemeinerung einiger Resultate von A. N. Kolmogorov und S. M. Nikol'skij. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 509—511 (1951) [Russisch].

Verf. teilt ohne Beweis eine Formel für die Approximation einer periodischen Funktion (mit gewissen Differenzierbarkeitseigenschaften) durch den von Achiezer-Levitan (dies. Zbl. 15, 300; Achiezer, Vorlesungen über die Theorie der Approximation, Moskau-Leningrad 1947, § 90; dies. Zbl. 31, 157) eingeführten Integraloperator mit.

Wolfgang Hahn.

Tagamlickij, Ja. A.: Über eine Verallgemeinerung der Abelschen Reihe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 17—20 (1951) [Russisch].

Verf. betrachtet die Menge  $A$  der für  $x > a$  beliebig oft differenzierbaren Funktionen  $F(x)$ .  $x_k$  sei eine arithmetische Progression mit der Differenz  $\tau > 0$ ,  $x_0 > a$ ;  $R(x, t) = (e^{\lambda(x_0 - x)} - e^{\mu(x_0 - x)})/(\lambda - \mu)$  ( $0 < t < 1$ ), wo  $\mu < \lambda$  die beiden Lösungen der Gleichung  $\tau y e^{1-\tau y} = t$  sind;  $R(x, 1) = (x_0 - x) e^{(x_0 - x)/\tau}$ . Er beweist den Satz: Für ein  $F \in A$  gilt genau dann eine Darstellung der Form

$$(1) \quad F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{(x_0 - x)(x_\nu - x)^{\nu-1}}{\nu!} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 R(x, t) d\alpha(t)$$

(mit  $a_\nu \geq 0$ ,  $\alpha(t)$  monoton wachsend), wenn (2)  $(-1)^k F^{(k)}(x) \geq 0$  für  $a < x \leq x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , ist. — Führt man in  $A$  unter Verwendung von (2) eine Halbordnung  $\omega$  ein, so stellt (1) die Entwicklung von  $F$  nach den bezüglich  $\omega$  „nicht zerlegbaren“ Funktionen dar (vgl. Verf., Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 75, 337—340 (1950)). Für einen anderen Reihentyp erhielt S. N. Bernštejn (dies. Zbl. 39, 69) ähnliche Resultate. Weitere Literatur: Verf. [dies. Zbl. 36, 317, 39, 119 und Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Livre I 46, 385 (1950)] sowie Myškis [dies. Zbl. 35, 178 und Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 2 (36), 148—154 (1950)].

Karl Zeller.

Civin, Paul: Approximation to conjugate functions. Proc. Amer. math. Soc. 2, 207—208 (1951).

The author proves the following theorem: If  $\{T_n(x)\}$  is a sequence of trigonometric polynomials of order  $n$ , and if  $f(x) - T_n(x) = O(n^{-\alpha})$ , ( $\alpha > 0$ ) uniformly in  $x$ , then the conjugate function and the conjugate trigonometric polynomials satisfy  $\bar{f}(x) - \bar{T}_n(x) = O(n^{-\alpha} \log n)$  uniformly in  $x$ .

Jerzy Gorski.



**Diliberto, S. P. and E. G. Straus:** On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables. *Pacific J. Math.* **1**, 195—210 (1951).

Let  $C_R$  be the space of all continuous real valued functions  $z(x, y)$ , defined in the unit square  $0 \leq x, y \leq 1$ , with norm  $\|z\| = \max |z(x, y)|$ . Let  $C_S$  be the closed subspace of  $C_R$  composed of all functions of the form  $f(x) + g(y)$ . Put  $\mu[z] = \inf \|z - w\|$ ,  $w \in C_S$ . By the definition of  $\mu[z]$  there exists a sequence  $z_i \in C_R$  such that  $z - z_i \in C_S$  and that  $\|z_i\| \rightarrow \mu[z]$ . Such a sequence is called a „minimizing sequence“. The authors give a method to construct minimizing sequences with the property  $\|z_i\| \geq \|z_{i+1}\|$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Finally say that a polygonal line  $l$  is permissible if it lies entirely within the square  $0 \leq x, y \leq 1$ , and if each of its sides is parallel either to the  $x$ - or to the  $y$ -axis. ( $x_j, y_j$ ) being the vertices of  $l$ , put  $\pi_l[z] = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j z(x_j, y_j)$  and  $\pi[z] = \sup |\pi_l[z]|$ , where the sup is taken over all permissible lines. It is proved that  $\pi[z] = \mu[z]$ .—These results give a method for evaluating  $\mu[z]$  and for constructing functions  $f(x)$  and  $g(y)$  such that  $\|z - f - g\| \leq \mu[z] + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). *János Horváth.*

**Rudin, Walter:** Uniqueness theory for Hermite series. *Trans. Amer. math. Soc.* **70**, 387—403 (1951).

Let  $\Phi_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) be the system of Hermite functions satisfying the orthogonality relations  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = \delta_{nm}$ . Say that  $f \in H_p$  if  $f \in L$  on every finite interval and

$\int_{-\infty}^{\infty} |x^p f(x)| e^{-x^2/2} dx < +\infty$ . If  $f \in H_p$  for every  $p \geq 0$ , we say that  $f \in H$ . If  $f \in H$ ,

put  $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi_n(x) dx$  and  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ , i. e. the latter is the „Hermite series“

of  $f(x)$ . — Let  $F(t)$  be defined in a neighbourhood of  $x$  and let  $h > 0$ . There exists a unique function  $y(t) = y(t; F, h)$  satisfying  $y(x-h) = F(x-h)$ ,  $y(x+h) = F(x+h)$  and (\*)  $y'' - (x^2 + 1)y = 0$ . Put  $\Delta_h F(x) = y(x; F, h) - F(x)$  and  $\Lambda F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 2\Delta_h F(x)/h^2$ .

Define  $\Lambda^* F(x)$  and  $\Lambda_* F(x)$  likewise with  $\limsup$  and  $\liminf$  in place of  $\lim$ . The Hermite functions are eigenfunctions of  $\Lambda$ :  $\Lambda \Phi_n(x) = -(2n+2)\Phi_n(x)$ . Let  $k(x, t)$  be the Green

function of (\*) and put  $\Omega f(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) k(x, t) dt$ . Put further  $f(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) r^n$

and  $f^*(x) = \limsup_{r \rightarrow 1} f(x, r)$ ,  $f_*(x) = \liminf_{r \rightarrow 1} f(x, r)$ . — The following results are proved, which

are all more or less analogous to results concerning trigonometrical series (cf. Zygmund, *Trigonometrical series*, Warszawa 1935, Chap. XI; this Zbl. **11**, 17). 1. Let  $p \geq 0$  be given. Suppose

(a)  $F \in H_p$  and  $F$  is continuous; (b)  $\Lambda^* F(x) > -\infty$  and  $\Lambda_* F(x) < +\infty$  except possibly on countable sets  $E_1$  and  $E_2$ ; (c)  $\limsup_{h \rightarrow 0} \Delta_h F(x)/h \geq 0$  on  $E_1$  and  $\liminf_{h \rightarrow 0} \Delta_h F(x)/h \leq 0$  on  $E_2$ ;

(d) there exists a function  $y \in H_p$  such that  $y(x) \leq \Lambda^* F(x)$  for all  $x$ . Then  $\Lambda F(x)$  exists almost everywhere,  $\Lambda F \in H_p$  and  $F(x) = \Omega \Lambda F(x)$  for all  $x$ . 2. Suppose  $f \in H$ . Then

$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$  if and only if  $\Omega f(x) \sim - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)/(2n+2)$ . 3. Suppose

(i)  $-\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)/(2n+2) \sim F(x)$ , where  $F$  is continuous and satisfies (b) and (c); (ii) there

exists a function  $y \in H$  such that  $y(x) \leq \Lambda^* F(x)$  for all  $x$ . Then  $\Lambda F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ .

4. Suppose (i)  $-\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)/(2n+2) \sim F(x)$ ; (ii) at some fixed point  $x_0$ ,  $F(x_0)$  is finite, and

$-\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) r^n/(2n+2) = F(x_0)$ ; (iii)  $F(x)$  is bounded above (or below) in the neighbourhood of  $x_0$ . Then  $\Lambda_* F(x_0) \leq f^*(x_0)$  and  $f_*(x_0) \leq \Lambda^* F(x_0)$ . 5. Suppose (A)

$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)/(2n+2) \sim F(x)$  where  $F$  is continuous; (B)  $f_*(x) > -\infty$  and  $f^*(x) < +\infty$

except possibly on countable sets  $E_1$  and  $E_2$ ; (C)  $F$  satisfies (c); (D) there exists a function  $y \in H$  such that  $y(x) \leq f_*(x)$  for all  $x$ . Then the series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$  is Poisson summable almost everywhere, and is the Hermite series of its Poisson sum. 6. Suppose  $a_n = o(n^{\frac{1}{2}})$ . If there exists a function  $y \in H$  such that  $-\infty < y(x) \leq f_*(x) \leq f^*(x) < +\infty$  for all  $x$ , then the conclusion of 5. holds. 7. If  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Phi_n(x) = 0$  for  $x$  on a set  $E$  of positive measure, then  $a_n = o(n^{\frac{1}{2}})$ .

8. If the series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$  converges, for all  $x$ , to a finite function  $f(x)$ , such that  $f \in H$ , then  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ . János Horváth.

**Campbell, Robert:** Sur les sommations de Cesàro d'ordre entier des séries de Weber. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 596—598 (1951).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **39**, 67) hat Verf. gezeigt, unter welchen Bedingungen eine Funktion  $f(x)$  in eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D_n(x)$  nach Weberschen Funktionen ganzzahliger Ordnung entwickelbar ist. Diese Untersuchungen werden hier auf Summierbarkeitsfragen ausgedehnt. Es wird zunächst gezeigt, daß sich die  $C_1^r$ -Limitierung (Cesàro) durchführen läßt und daß man für  $\sum_{k=0}^n G_k(x, t)$ , den neuen Kern, einfache Ausdrücke angeben kann. Durch wiederholte Anwendung kann dann gefolgert werden, daß die Reihen auch  $C_p$ -summierbar sind.

Heinz Unger.

**Campbell, Robert:** Sur la sommabilité et la dérivabilité de la série de Weber d'une fonction. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 910—912 (1951).

In der oben besprochenen Mitteilung wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für die  $C_p$ -Summierbarkeit einer nach Weberschen Funktionen  $D_n(x)$  fortschreitenden Entwicklung einer Funktion  $f(x)$  an einer Stelle  $x_0$  gegeben. Unter den früher angegebenen Voraussetzungen über  $f(x)$  (vgl. dies. Zbl. **39**, 67) wird hier gezeigt, daß die Reihe  $C_p$ -summierbar ist zum Werte  $c$ , wenn  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] = c$ . Ist insbesondere  $f(x)$  stetig in  $\langle a, b \rangle$ , dann ist auch die Summierbarkeit eine gleichmäßige in  $\langle a, b \rangle$ . Weiter wird eine Bedingung angegeben, nach der  $f(x)$   $C_p$ -summierbar ist für  $p \geq 2$ . Diese Untersuchungen finden ihre Anwendung bei der Differentiation von Reihenentwicklungen nach Weberschen Funktionen und führen zu entsprechenden Ergebnissen wie bei den Fourierreihen.

Heinz Unger.

**Ossicini, Alessandro:** Sulla sommabilità delle serie di Legendre. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **6**, 218—225 (1951).

L'A. estendendo un teorema di Y. Matsumura (questo Zbl. **39**, 71) sulle serie trigonometriche di Fourier dimostra: se  $f(x) (1-x^2)^{-1/4}$  è sommabile in  $(-1, 1)$ , e se  $k$  è un numero intero,  $k \geq 2$ , allora in ogni punto  $x$  interno a  $(-1, 1)$  in cui  $\int_0^h [f(x \pm t) - f(x)] dt = o(h)$  le somme parziali  $S_1^k(x), S_2^k(x), \dots, S_n^k(x), \dots$  della serie di Legendre di  $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$

godono la proprietà che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n [S_r^k(x) - f(x)] = 0$ . Giovanni Sansone.

**Vučkić, Milenko:** Poncelet et la théorie de la meilleure approximation. Soc. Sci. natur. Croatica, Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. **6**, 115—121 und französ. Zusammenfassg. 121 (1951) [Serbisch].

Dans un mémoire de 1835 Poncelet a déterminé la valeur approchée linéaire de l'expression



$\sqrt{x^2 + y^2}$  au sens de la théorie de la meilleure approximation, fondée, en sa généralité, 20 ans après par Tchebycheff. Dans l'article présent, une solution de Poncelet est reproduite — solution purement géométrique, mais très remarquable par sa netteté classique et sa évidence. On donne aussi une solution du problème au point de vue de la théorie générale de Tchebycheff quelques remarques sur Laplace et Fourier, précurseurs de Poncelet à l'égard de ce mode de l'approximation. (Autoreferat.)

**Burkill, J. C.:** Uniqueness theorems for trigonometric series and integrals. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 163—169 (1951).

Eine überall konvergente trigonometrische (trig.) Reihe braucht unter Zugrundelegung des Lebesgueschen Integralbegriffs nicht die Fourierreihe der dargestellten Funktion zu sein, weil die die Koeffizienten darstellenden Integrale unter Umständen nicht existieren. Um diesen Mißstand möglichst zu beseitigen, muß man bekanntlich einen allgemeineren Integralbegriff zugrunde legen. Verf. findet das SCP (lies symmetrische Cesàro-Perron)-Integral dazu besonders geeignet und hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 284) einige Sätze in dieser Richtung bewiesen. Hier werden nun diese Resultate auf den Fall ausgedehnt, daß die trig. Reihe nicht konvergiert, sondern nur im Cesàroschen oder Abelschen Sinne summierbar ist. Sodann werden auch einige Sätze über trig. Integrale bewiesen von folgender Art:

Wenn  $f(x) = \int_0^\infty a(u) \cos(xu) du$  und wenn das Integral  $\int_0^\infty u^{-2} a(u) \cos(xu) du$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  endlichen Grenzwerten zustrebt, so ist  $a(u) = \frac{2}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\omega \left(1 - \frac{x}{\omega}\right) f(x) \cos(ux) dx$ . Oskar Perron.

**Levitan, B. M.:** Die Entwicklung in Fouriersche Reihen und Integrale nach Besselschen Funktionen. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 2 (42) 102—143 (1951) [Russisch].

Verf. behandelt, z. T. in engem Anschluß an frühere Veröffentlichungen, einige Probleme aus der Theorie der Reihenentwicklungen und Integraloperatoren mit Besselschen Funktionen. Er gibt zunächst einen neuen Beweis für die Entwicklung einer Funktion nach Lösungen der Besselschen Differentialgleichung an, die nicht notwendig die Standardlösungen  $J_p$  und  $Y_p$  zu sein brauchen, ferner die entsprechende Verallgemeinerung der Hankelschen Umkehrformel, also ein Paar von Integraltransformationen, deren Kerne allgemeine Lösungen der Besselschen Gleichung sind. Sodann werden einige Hilfssätze über die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\beta}{x-y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\beta'}{x-y} \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

abgeleitet; insbesondere gewinnt Verf. eine durch Anfangsbedingungen charakterisierte Lösung mit Hilfe der Riemannschen Methode. (In den Rechnungen des § 5 scheinen dem Ref. die Voraussetzungen  $\beta + \beta' > 1$  und später  $\beta = \beta'$  notwendig zu sein.) Die gewonnenen Formeln führen zur Definition des Integraloperators

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) \sin^{2p} \varphi d\varphi,$$

der im weiteren studiert wird. Verf. gibt u. a. eine Entwicklung

$$T_x^y f(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(y) L^k f(x) + R_n(x, y), \quad L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{d}{dx},$$

mit neuartiger Restgliedabschätzung, beweist, daß  $T_x^y$  selbstadjungiert ist, daß also

$$\int_0^\infty T_x^y f(x) \cdot g(x) x^{2p+1} dx = \int_0^\infty f(x) T_x^y g(x) x^{2p+1} dx,$$

behandelt den Zusammenhang zwischen  $T_x^y$  und gewissen andern Integraloperatoren und formuliert schließlich mittels  $T_x^y$  eine notwendige und hinreichende Bedingung

dafür, daß sich eine stetige Funktion  $f(x)$  in ein Stieltjessches Integral der Gestalt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_p(\sqrt{\lambda} x)}{(\sqrt{\lambda} x)^p} d\sigma(\lambda)$$

mit Hankelschem Kern und monoton wachsender Belegungsfunktion  $\sigma(\lambda)$  darstellen läßt: es muß  $f(x)$  bezüglich  $T_x^y$  positiv definit sein, d. h. für beliebige Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und beliebige komplexe Zahlen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  muß der Ausdruck

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n T_{x_\mu}^{x_\nu} f(x) \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \geq 0$$

sein.

Wolfgang Hahn.

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

**Bericht über eine von Seiten der Abteilung „Reine Mathematik“ angestellte Untersuchung.** Math. Centrum, Rapport ZW 1951—003, 3 p. (1951) [Holländisch] (hektographiert).

Erörterung der Beziehungen zwischen Integraldarstellungen der Funktionen  $\exp(i t x \log x)$  (vgl. dies. Zbl. 40, 352) und  $\exp(-t x \log x)$  (vgl. das folgende Referat). Die Untersuchung geht auf Fragestellungen von Dantzig zurück.

Uwe Timm Bödewadt.

**Lekkerkerker, C. G.: Betrachtungen über eine Formel für  $e^{-tx \log x}$ .** Math. Centrum, Rapport ZW 1951—004, 11 p. (1951) [Holländisch] (hektographiert).

Ausführliche Darstellung eines durch van Dantzig aufgezeigten Beweises für die Formel

$$e^{-x \log x} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-x \log z} \int_0^1 e^{-z v \log v} dv dz,$$

wo der Integrationsweg in  $z$  die negative reelle Achse umläuft. Diese Formel gilt nur für  $\operatorname{Re} x > 0$ . Aus ihr wird eine ähnliche Formel für  $\exp(-t x \log x)$  hergeleitet, und es werden Abänderungen des Integrationsweges untersucht. Für rein imaginäre  $t$  versagt diese Darstellung, ein unmittelbarer Übergang zu der Formel für  $\exp(i t x \log x)$  ist darum nicht möglich (vgl. das vorige Referat).

Uwe Timm Bödewadt.

**Apostol, T. M.: On the Lerch zeta function.** Pacific J. Math. 1, 161—167 (1951).

Durch Verlagerung von  $dz$  entnahm M. Lerch [Acta Math. 11 (1887)] für das in  $x, a, s$  analytische Gebilde (1)  $\Phi(x, a, s) = \frac{\Gamma(s)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0+} \frac{dz z^{s-1} e^{az}}{1 - e^{z+2\pi i x}}$  die Verknüpfung

$$(2) e^{2\pi i a(1-x)} \Phi(a, 1-x, s) + e^{2\pi i (\frac{1}{2}-ax)} \Phi(-a, x, s) - \frac{(2\pi i)^s}{\Gamma(s)} \Phi(x, a, 1-s) = 0.$$

Wird im Integranden (1) die Summation einer geometrischen Reihe, deren Elemente in  $x$  und  $r$  einfach periodisch sind, ausgeschieden zugunsten einer Modulfunktion  $\theta(x, a, z) = \theta(x+1, a, z) = \theta(x, a+1, z) = e^{-2\pi i a x} z^{-\frac{1}{2}} \theta(a, -x, z^{-1})$ , so führen die partiellen Differenzen- und Differentialgleichungen für (1) ebenfalls nach (2). — Rekursive Bestimmung verallgemeinerter Bernoullischer Polynome aus (1) für  $s = 0, -1, \dots$ .

Wilhelm Maier.

**Vinti, John P.: Note on a series of products of three Legendre polynomials.** Proc. Amer. math. Soc. 2, 19—23 (1951).

Sei  $P_l(x)$  das Legendresche Polynom  $l$ -ten Grades,  $-1 < x, y, z < +1$ ,  $g(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyx$ . Verf. zeigt  $\sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) P_l(x) P_l(y) P_l(z)$



$= \pi^{-1} g^{-\frac{1}{2}}$  für  $g > 0$ ,  $= 0$  für  $g < 0$ . Weiter wird die Divergenz der Reihe gezeigt, wenn eine Variable  $= \pm 1$  ist. Der Beweis erfolgt durch direktes Entwickeln.

Karl Prachar.

Thosar, Y. V.: Some simple relations involving Legendre's functions  $P_n^m(z)$  and  $Q_n^m(z)$ . Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 34, 14—16 (1951).

Beweis von zehn Relationen von der Form  $P_n^m(z) Q_{n'}^{m'}(z) - P_{n'}^{m'}(z) Q_n^m(z)$  ( $n, n', z$  beliebig;  $m, m'$  natürliche Zahlen). Es ist z. B.:

$$P_n^{m-1}(z) Q_{n+1}^m(z) - P_{n+1}^m(z) Q_n^{m-1}(z) = (-1)^m \frac{(n)_m (n+m)_m}{(n-m+1)(n+m)} \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Durch Spezialisieren ergeben sich solche Relationen für die Kugelfunktionen  $P_n(z)$ ,  $Q_n(z)$ , wie z. B. ( $m=1$ ):  $P_{n+1}'(z) Q_n(z) - Q_{n+1}'(z) P_n(z) = z/(z^2-1)$ . Otto Volk.

Thiruvengkatachar, V. R. and T. S. Nanjundiah: Inequalities concerning Bessel functions and orthogonal polynomials. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 33, 373—384 (1951).

Verf. beweist die Ungleichungen (1)  $(1-x^2) \Delta_n(0) \leq \Delta_n(x) \leq \Delta_n(0)$  für  $|x| \leq 1$ ,  $n \geq 1$ , (2)  $(1-x^2)/2n \leq \Delta_n(x) < 2/\pi n$  für  $|x| \leq 1$ ,  $n \geq 1$ , (3)  $\Delta_n(x) < (1-x^2) \Delta_n(0)$  für  $|x| > 1$ ,  $n \geq 1$ , (4)  $\Delta_{n,\lambda}(x) < 0$  für  $|x| > 1$ ,  $1 \leq \lambda \leq n$ , wo  $\Delta_n(x) = P_n^2(x) - P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$ ,  $\Delta_{n,\lambda} = P_{n+\lambda-1}(x) P_{n-\lambda+1}(x) - P_{n-\lambda}(x) P_{n+\lambda}(x)$ ,  $P_n(x)$  die Legendresche Kugelfunktion erster Art und  $\Delta_{2m}(0) = \left( \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2m} \right)^2$ ,  $\Delta_{2m+1}(0) = \frac{2m+1}{2m+2} \Delta_{2m}(0)$  ist. (2) stellt (in der oberen Schranke allerdings für  $n \geq 11$ ) eine Verschärfung gegenüber der von O. Szasz gegebenen Ungleichung  $\frac{1-P_n^2(x)}{(2n-1)(n+1)} \leq \Delta_n(x) < \frac{2n+1}{3n(n+1)}$  dar. Ferner werden für die Besselschen Funktionen  $J_\nu(x)$  und  $I_\nu(x)$  die folgenden Beziehungen abgeleitet:

$$J_\nu^2(x) - J_{\nu-1}(x) J_{\nu+1}(x) \geq 0, \quad \nu \geq -1, \quad x \text{ endlich,}$$

$$0 \leq I_{\nu-k+1}(x) I_{\nu+k-1}(x) - I_{\nu-k}(x) I_{\nu+k}(x) \leq \frac{2k-1}{\nu+k} I_{\nu-k+1}(x) I_{\nu+k-1}(x),$$

$$1 \leq k \leq \nu+2, \quad \nu \geq -1, \quad x \text{ endlich,}$$

$$J_\nu^2 - J_{\nu+1} J_{\nu-1} = \frac{1}{\nu+1} J_\nu^2(x) + \frac{2}{\nu+2} J_{\nu+1}^2(x) + 2\nu \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_{\nu+n}^2}{(\nu+n-1)(\nu+n+1)},$$

$$\nu \neq -1, -2, \dots$$

Es folgen entsprechende Ungleichungen für die Laguerreschen und ultrasphärischen (Gegenbauerschen) Polynome. (Vgl. G. Szegő, dies. Zbl. 32, 275; O. Szasz, dies. Zbl. 37, 330.)

Otto Volk.

Kuhn, T. S.: A convenient general solution of the confluent hypergeometric equation, analytic and numerical development. Quart. appl. Math. 9, 1—16 (1951).

L'A. assume l'equazione ipergeometrica confluyente nella forma

$$(1) \quad \frac{d^2 U^{(l,n)}}{dr^2} + \left[ -\frac{1}{n^2} + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U^{(l,n)} = 0$$

la quale con la sostituzione  $z = (8r)^{\frac{1}{2}}$ ,  $U^{(l,n)} = 2^{-1} z V^{(l,n)}$  assume la forma

$$(2) \quad \nabla_l V^{(l,n)} - \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{2} z \right)^4 V^{(l,n)} = 0,$$

ove  $\nabla_l$  è l'operatore di Bessel

$$\nabla_l = z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + z^2 - (2l+1)^2.$$

Le soluzioni della (2) possono esprimersi in serie di potenze di  $1/n^2$

$$V^{(l,n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n^{-2k} V_k^{(l)}(z)$$

dove le  $V_k^{(l)}(z)$  sono funzioni analitiche di  $z$ , e supposto  $n$  ed  $l$  reali esse convergono uniformemente e assolutamente per  $n \geq n_0$ , dove  $n_0$  è un numero positivo arbitrario e qualunque sia  $l$ . — Per la determinazione delle  $V_k^{(l)}(z)$  l'A. si vale delle equazioni ricorrenti

$$\nabla_l V_0^{(l)}(z) = 0, \quad \nabla_l V_k^{(l)}(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^4 V_{k-1}^{(l)}(z) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

la prima delle quali è l'equazione di Bessel di indice  $2l + 1$ , ed egli dà il procedimento per costruire due tavole delle funzioni  $U_k^{(l)}(z) = \frac{1}{2}z V_k^{(l)}(z)$ ,  $l = 0, 1$ ,  $k = 0, \dots, 7$  espresse per le funzioni cilindriche  $C_0, C_1$ . — Quando si parta dalle funzioni di Bessel  $J_m(z)$ ,  $Y_m(z)$  le  $U_k^{(l)}(z)$  si particolarizzano nelle funzioni  ${}^0U_k^{(l)}(z)$ ,  ${}^{(1)}U_k^{(l)}(z)$  tabulate dall'A. per  $k = 0, \dots, 7$  e per gli otto valori dell'argomento  $z = 3,5; 4,0; \dots, 6,5; 7,0$ . Queste tabelle insieme ad altre tre sono di particolare interesse per la fisica teorica. — Nella memoria sono indicate le più recenti ricerche sull'argomento.

Giovanni Sansone.

**Varma, R. S.: On Appell polynomials.** Proc. Amer. math. Soc. **2**, 593—596 (1951).

Una successione  $\{P_n(x)\}$  di polinomi  $P_n(x)$  chiamasi una successione di Appell se vale la relazione  $dP_n/dx = P_{n-1}(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). L'A. per costruire una successione di Appell generalizza un procedimento di L. M. Sheffer [Bull. Amer. math. Soc. **51**, 739—744 (1945)] nel seguente modo. Sia  $\beta(x)$  una funzione a variazione limitata in  $(0, \infty)$  con i suoi momenti  $b_n = \int_0^\infty x^n d\beta(t)$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ) tutti finiti,  $b_0 \neq 0$ ; e  $\{\delta_n(t)\}$  una successione di funzioni per le quali gli integrali  $\int_0^\infty \delta_n(t) t^r d\beta(t)$  ( $n, r = 0, 1, \dots$ ) risultano finiti. Posto allora  $K_n(x, t) = \delta_0(t)(x+t)^n/n! + \delta_1(t)(x+t)^{n-1}/(n-1)! + \dots + \delta_n(t)$  i polinomi  $\{P_n(x)\}$  definiti dalla relazione  $P_n(x) = \int_0^\infty K_n(x, t) d\beta(t)$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ), formano una successione di Appell. In particolare se  $\delta_r(t) = \frac{t^r}{r!} \left[ \alpha_r - \binom{r}{1} \alpha_{r-1} + \binom{r}{2} \alpha_{r-2} - \dots + (-1)^r \binom{r}{r} \alpha_0 \right]$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_j = (a, j-1)(b, j-1)/(c, j-1)(d, j-1)$ , ( $j = 1, 2, \dots$ ), si trova

$$K_n(x, t) = \frac{x^n}{n!} {}_3F_2(-n, a, b; c, d; -t/x),$$

e i corrispondenti polinomi di Appell hanno la forma

$$(*) \quad P_n^*(x) = \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(-n, r)(a, r)(b, r)}{(c, r)(d, r)} \frac{b_r}{r!} x^{n-r}.$$

Poichè si ha

$$e^{ux} A^*(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(x) u^n, \quad A_n^*(u) = \int_0^\infty {}_2F_2(a, b; c, d; ut) d\beta(t),$$

la  $A^*(u)$  rappresenta la funzione generatrice dei polinomi  $P_n^*(x)$  definiti dalla (\*).

Giovanni Sansone.

**Protter, M. H.: On a class of harmonic polynomials.** Portugaliae Math. **10**, 11—22 (1951).

Verf. betrachtet die Polynome  $R_{n,\nu}(x, y, z)$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, 2, \dots, 2n$ ) mit den Eigenschaften: 1. die Polynome sind für jedes  $n, \nu$ , homogene harmonische Polynome vom Grade  $n$ . 2. Ist  $U(x, y, z)$  eine harmonische Funktion von der Form

$$U(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{2n} \frac{\alpha_{n,\nu}}{n!} R_{n,\nu}(x, y, z),$$



so sind die Größen  $\alpha_{n,v}$  bestimmt durch

$$\alpha_{n,2v} = \frac{v!(n-v)!}{n!} \frac{\partial^n U(x, y, 0)}{\partial x^v \partial y^{n-v}} \Big|_{x=y=0}, \quad \alpha_{n,2v+1} = \frac{v!(n-v-1)!}{n!} \frac{\partial^{n-1} U_z(x, y, z)}{\partial x^v \partial y^{n-v-1}} \Big|_{z=0, x=y=0}.$$

Sie lassen sich leicht explizite anschreiben. Die zu einem  $n$  gehörigen  $2n+1$  Polynome  $R_{n,v}$  sind linear unabhängig; sie genügen den Rekursionsformeln:  $R_{n,v} = R_{n,2n-v}$ ;  $\partial R_{n,v} / \partial x = n R_{n-1,v-2}$ ;  $\partial R_{n,v} / \partial y = n R_{n-1,v}$ ;  $\partial R_{n,2v+1} / \partial z = n R_{n-1,2v}$ ;  $\partial R_{n,2v} / \partial z = -n (R_{n-1,2v-3} + R_{n-1,2v+1})$ . Die Funktion  $e^{\alpha x + \beta y + i \gamma z}$  ( $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ,  $\alpha, \beta$  reell) ist eine erzeugende Funktion für die Polynome  $R_{n,v}$  und es ist:

$$e^{\alpha x + \beta y + i \gamma z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^n \frac{\alpha^v \beta^{n-v}}{n!} \left( R_{n,2v} + \frac{i \gamma}{n+1} R_{n+1,2v+1} \right),$$

woraus sich die einfache Darstellung der Polynome ergibt:

$$\left. \begin{aligned} R_{n,2k} &= \frac{1}{k!} \Re \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} (\alpha x + y + i \gamma z)^n \Big|_{\alpha=0} \\ R_{n,4k+3} &= \frac{1}{(2k+1)!} \Im \frac{\partial^{2k+1}}{\partial \alpha^{2k+1}} (\alpha x + y + i \gamma z)^n \Big|_{\alpha=0} \\ R_{n,4k+1} &= \frac{1}{(2k)!} \Im \frac{\partial^{2k}}{\partial \alpha^{2k}} (\alpha x + y + i \gamma z)^n \Big|_{\alpha=0} \end{aligned} \right\} + \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2 (2k-1)} \Im (y + i z)^n,$$

wo  $\gamma^2 = 1 + \alpha^2$ ,  $\alpha$  reell ist. — Sind  $r, \vartheta, \varphi$  sphärische Koordinaten, so bilden die Funktionen  $r^n P_n^m(\cos \vartheta) \begin{cases} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{cases}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n$  ( $P_n^m$  Kugelfunktionen) ein System von  $2n+1$  homogenen harmonischen Polynomen vom Grade  $n$ , sie lassen sich also durch eine lineare Kombination der  $R_{n,v}$  darstellen (vgl. die frühere Arbeit des Verf., dies. Zbl. 32, 276). Analoges gilt für  $\cos z \cdot \cos(n\varphi) J_n(r)$  ( $r, \varphi, z$  Zylinderkoordinaten,  $J_n(r)$  Besselfunktion), ferner für die elliptischen Harmonischen und die Mathieuschen Funktionen. Endlich wird darauf hingewiesen, daß die Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 - \partial^2 u / \partial z^2 = 0$  durch Polynome  $R_{n,v}(x, y, z)$  erfolgt, die aus den  $R_n(x, y, z)$  unmittelbar erhalten werden, wenn man  $z$  durch  $iz$  ersetzt. Eine Tafel der Polynome bis  $n = 5$  ist angefügt.

Otto Volk.

Burchnall, J. L.: An algebraic property of the classical polynomials. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 232–240 (1951).

Verf. zeigt: Ist  $f_n(x) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a_r X^{n-r}$  und  $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) = \Phi[a_r]$  eine homogene,

isobare Invariante oder Semiinvariante von  $f_n(x)$  vom Gewicht  $w$ , so ist  $\Phi[P_r(x)] = 0$ , wenn  $w$  ungerade,  $= C(1 - x^2)^{w/2}$ , wenn  $w$  gerade, wo  $C$  eine numerische Konstante ist. Diese Beziehung gilt, wenn  $P_r(x)$  ein Legendresches, ein Tschebyscheffsches (erster Art) oder ein modifiziertes ultrasphärisches Polynom ist. Für Hermite'sche Polynome  $H_r(x)$  ist  $\Phi[H_r(x)] = 0$ , wenn  $w$  ungerade,  $= C$ , wenn  $w$  gerade, und für die modifizierten Laguerreschen Polynome  $A_n^{(\alpha)}(x) \Phi[A_n^{(\alpha)}(x)] = C x^w$ . Als Beispiele werden die Katalaktikante einer binären Form vom Grade  $2n$  für die Legendreschen und Hermite'schen Polynome (vgl. J. Geronimus, J. London math. Soc. 6, 55–59 (1931); dies. Zbl. 1, 194] und die Diskriminante einer binären Form vom Grade  $n$  für die Hermite'schen Polynome behandelt. Die Betrachtungen, die darauf beruhen, daß sich die fraglichen Polynome durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor und durch Einführung eines geeigneten  $t$  in Funktionen überführen lassen, die der Rekursionsformel (1)  $\frac{d}{dt} f_n(t) = n f_{n-1}(t)$  genügen, lassen sich auf die Invarianten von mehreren Formen, gebildet mit den Funktionen  $f_n(t), g_n(t), \dots$ , die der Formel (1) genügen, ausdehnen. Schließlich wird gezeigt, daß die  $f_n(t)$  unter gewissen Voraussetzungen die Ungleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} f_m^2(t) &> f_{m+1}(t) f_{m-1}(t), \\ f_{m-4} f_m(t) - 4 f_{m-3}(t) f_{m-1}(t) + 3 f_{m-2}^2(t) &> 0, \end{aligned}$$

welch letztere z. B. dazu dienen kann, die Nullstellen von  $f_m(t)$  einzuschränken (vgl. G. Szegő, Orthogonal polynomials. Amer. math. Soc. Colloq. Publ. 23, New York 1939, S. 116; dies. Zbl. 23, 215).

Otto Volk.

**Meixner, Josef: Integralbeziehungen zwischen Mathieuschen Funktionen.**  
Math. Nachr. 5, 371—378 (1951).

Es werden drei Arten von Integralbeziehungen behandelt. I. Setzt man

$$u = 2h \sqrt{[\cos(x+y) - \cos \alpha][\cos(x-y) - \cos \alpha]}, \quad v = \frac{\cos(x+y) - \cos \alpha}{\cos(x-y) - \cos \alpha}$$

und verlangt  $|\arg h[\cos(x \pm y) - \cos \alpha]| < \pi$  für  $0 \leq y \leq 2\pi$ , so gilt mit einer beliebigen ganzen Zahl  $s$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{B}_{\nu+s}^{(j)}(u) v^{(s+1)/2} \operatorname{me}_{\nu}(y) dy = M_{\nu}^{(j)}(-iz) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^r c_{2r} J_{2r-s}(2h \cos \alpha).$$

Dabei bedeutet  $\mathfrak{B}_m^{(j)}$  für  $j = 1, 2, 3, 4$  der Reihe nach die Besselsche ( $J_m$ ), Neumannsche, erste und zweite Hankelsche Zylinderfunktion,  $\operatorname{me}_{\nu}(z) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r} e^{i(\nu+2r)z}$  eine Lösung der Mathieuschen Differentialgleichung  $f''(z) + (\lambda - 2h^2 \cos 2z)f(z) = 0$  mit dem charakteristischen Exponenten  $\nu$  und  $M_{\nu}^{(j)}(-iz)$  die Lösung derselben Differentialgleichung mit dem asymptotischen Verhalten

$$M_{\nu}^{(j)}(-iz) \sim \mathfrak{B}_{\nu}^{(j)}(2h \cos z) \text{ für } \Im(z) \gg 1, \quad -\pi < \arg 2h \cos z < \pi.$$

Wählt man  $\nu$  ganzzahlig, so erhält man unmittelbar die entsprechenden Integralbeziehungen zwischen Mathieuschen Funktionen ganzer Ordnung. Die besondere Bedeutung dieser Formeln liegt in ihrer Allgemeinheit infolge der willkürlichen Parameter  $\alpha$  und  $s$ . — II. Haben  $u, v, x, y, \alpha, h$  dieselbe Bedeutung wie unter I und ist  $\operatorname{me}(y)$  eine beliebige Lösung der Mathieuschen Differentialgleichung, so genügt für beliebiges nicht negatives ganzes  $s$   $Y_s(x, \alpha) =$

$\int_{\alpha-x}^{\alpha+x} J_s(u) v^{s/2} \operatorname{me}(y) dy$  der Differentialgleichung

$$(*) \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} + (\lambda - 2h^2 \cos 2x) Y = -\frac{4h^s}{\Gamma(s)} \operatorname{me}(x + \alpha) \sin(2x + \alpha) [\cos(2x + \alpha) - \cos \alpha]^{s-1}.$$

Hieraus läßt sich  $Y_s(x, \alpha)$  berechnen. Das wird für  $s = 0, 1, 2$  explizit durchgeführt. Für  $s > 2$  wird das allgemeine Verfahren angegeben: man findet ein partikuläres Integral von (\*) durch Ansatz als lineare Kombination von  $\operatorname{me}(x + \alpha)$  und  $\operatorname{me}'(x + \alpha)$  mit trigonometrischen Polynomen als Koeffizienten. Integralbeziehungen dieser Art finden sich bei R. Sips (dies. Zbl. 38, 226) für einige Spezialfälle ( $\alpha = \pi/2, \alpha = 0; \operatorname{me}(y) = c_{\operatorname{me}}(y), \operatorname{me}(y) = s_{\operatorname{me}}(y)$ ); hier sind demgegenüber  $\alpha, s$  und  $\operatorname{me}(y)$  willkürlich. — III. Es gilt mit ganzem  $p$

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \Im \int_0^{2\pi} \cos \eta \cdot \operatorname{me}_{-\nu}(\eta) \frac{\operatorname{me}_{\nu+2p+1}(\eta)}{\Im \xi - \cos^2 \eta} d\eta \\ &= A_{\nu,p} \{ M_{\nu}^{(3)}(\xi) M_{\nu+2p+1}^{(4)}(\xi) - M_{\nu}^{(4)}(\xi) M_{\nu+2p+1}^{(3)}(\xi) \} \end{aligned}$$

mit  $A_{\nu,p} = \frac{h}{4} i^{2p-1} \int_0^{2\pi} \cos \eta \operatorname{me}_{-\nu}(\eta) \operatorname{me}_{\nu+2p+1}(\eta) d\eta$ . Daraus läßt sich ableiten:

$$\begin{aligned} \Xi(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \Re \int_0^{2\pi} \sin \eta \cdot \operatorname{me}'_{-\nu}(\eta) \frac{\operatorname{me}_{\nu+2p+1}(\eta)}{\Im \xi - \cos^2 \eta} d\eta \\ &= A_{\nu,p} \{ M_{\nu}^{(3)'}(\xi) M_{\nu+2p+1}^{(4)}(\xi) - M_{\nu}^{(4)'}(\xi) M_{\nu+2p+1}^{(3)}(\xi) \}. \end{aligned}$$

$\operatorname{me}_{-\nu}(z), M_{\nu}^{(j)}(-iz)$  sind dabei Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung  $f''(z) + (\lambda_{\nu} - 2h^2 \cos 2z)f(z) = 0$  mit den charakteristischen Exponenten  $\pm \nu$ ,  $\operatorname{me}_{\nu+2p+1}(z), M_{\nu+2p+1}^{(j)}(-iz)$  Lösungen der Differentialgleichung  $f'' + (\lambda_{\nu+2p+1} - 2h^2 \cos 2z)f = 0$  mit den charakteristischen Exponenten  $\pm(\nu + 2p + 1)$ , also  $\lambda_{\nu} \neq \lambda_{\nu+2p+1}$ . — Auf diese Integralbeziehungen wird man durch folgende Überlegung geführt: deutet man  $\xi, \eta$  als elliptische Koordinaten in der Ebene, so genügen  $M_{\nu}^{(j)}(\xi) \operatorname{me}_{-\nu}(\eta)$  und ihre Ableitung nach einer kartesischen Koordinate der zweidimensionalen Schwingungsgleichung. Setzt man für die Ableitung eine Entwicklung nach den Funktionen  $M_{\nu+2p+1}^{(j)}(\xi) \operatorname{me}_{-\nu-2p-1}(\eta)$  an, so ergeben sich nach einfacher Rechnung unter Benutzung der Orthogonalitäts- und Normierungseigenschaften der Funktionen  $\operatorname{me}$  Relationen

$$M_{\nu}^{(j)'}(\xi) \Phi(\xi) - M_{\nu}^{(j)}(\xi) \Xi(\xi) = \frac{1}{2\pi} B_{\nu,p} M_{\nu+2p+1}^{(j)}(\xi) \int_0^{2\pi} \operatorname{me}_{-\nu-2p-1}(\eta) \operatorname{me}_{\nu+2p+1}(\eta) d\eta.$$



Beziehungen dieser Art hatte bereits E. T. Whittaker [J. London math. Soc. 4, 88–96 (1929)] für Mathiesche Funktionen ganzer Ordnung sowie  $p = 0$ ,  $p = 1$  aufgestellt und fälschlich als Rekursionsformeln bezeichnet. Sie erweisen sich hier als Identitäten. Gleichzeitig ergibt sich:

$$\frac{1}{2\pi} B_{\nu, p} \int_0^{2\pi} \text{me}_{-\nu-2p-1}(\eta) \text{me}_{\nu+2p+1}(\eta) d\eta = -\frac{4i}{\pi} A_{\nu, p}.$$

Friedrich Wilhelm Schäfke.

Lambe, C. G.: Polynomial expressions for Lamé functions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 53–59 (1951).

Verf. geht von der Laméschen Differentialgleichung in ihrer algebraischen Form aus. Die Lösungen schreibt er in der Riemannschen Form an für ganzzahlige positive Ordnungen. Weiter betrachtet er die Laméschen Funktionen als Lösungen einer homogenen linearen Integralgleichung. Zu jeder dieser Laméschen Funktionen, welche im Endlichen überall endlich bleiben, gibt es eine zugeordnete Lamésche Funktion gleicher Ordnung mit dem gleichen Eigenwert. Diese zugeordnete Lamésche Funktion kann aus der zuerst genannten durch Ausführung eines Integrals berechnet werden. Verf. betrachtet darauf die Differentialgleichung für das Quadrat einer Laméschen Funktion obengenannter Art und schreibt diese ebenfalls in der Riemannschen Form an. Es zeigt sich, daß die Lösungen der betreffenden Differentialgleichung Polynome der Ordnung  $2n$  sind und die Differentialgleichung vom Heun'schen Typus ist. Hierauf betrachtet Verf. Differentialgleichungen, deren Lösungen mit Produkten von Laméschen Funktionen und zugeordneten Laméschen Funktionen zusammenhängen. Er führt in bezug auf die Lamésche Differentialgleichung die Halphensche Transformation durch und gelangt so zu einer weiteren Form dieser Differentialgleichung. Für die obengenannten Laméschen Produkte stellt er einen Ausdruck auf, bei dem diese als bestimmtes Integral einer erzeugenden Funktion hervorgehen. Für diese erzeugende Funktion werden Integralgleichungen abgeleitet.

Max J. O. Strutt.

## Funktionentheorie:

● Weyl, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. — Rep. New York: Chelsea Co. 1951. VIII, 183 p. \$ 3,50.

● Nevel, E. H.: Jacobian elliptic functions. — 2nd ed. Geoffrey Cumberlege, Oxford University Press 1951. XVI, 345 p. 30 s.

García Pradillo, Julio: Bemerkung über die Bedingungen der Monogenität. Gac. mat., Madrid 3, 179–182 (1951) [Spanisch].

Heins, Maurice: A residue theorem for finite Blaschke products. Proc. Amer. math. Soc. 2, 622–624 (1951).

The author proves that if a finite Blaschke product has poles in the finite plane, then for at least one such pole the residue does not vanish. Jerzy Górski.

Popov, I. V.: Über eine Frage von Prof. V. N. Deputatov. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 4 (44), 170–171 (1951) [Russisch].

Die Frage lautet: Ist jede explizite gegebene elementare Funktion mit allen ihren Zweigen auf der ganzen Zahlenkugel mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren abgeschlossenen Menge holomorph? Als Gegenbeispiel gibt Verf. die Funktion

$$\{\log(z-a) + \alpha \log(z-b) + i \log(z-c) + i \beta \log(z-d)\}^{-1}$$

an; dabei sind  $a, b, c, d$  paarweise verschiedene komplexe Zahlen,  $\alpha$  und  $\beta$  reell und irrational.

Andersson, Bengt: On an inequality concerning the integrals of moduli of regular analytic functions. Ark. Mat. 1, Nr. 27, 367–373 (1951).

This paper deals with the so called Gabriel's problem: if a convex curve  $L$  lies inside another convex curve  $C$  and  $f(z)$  is regular inside  $C$ , then an absolute constant  $A$  exists so that (\*)  $\int_L |f(z)| |dz| < A \int_C |f(z)| |dz|$ . The best possible

constant  $A'$  is not known, but it has been conjectured that  $A' = 2$ , which has been verified in the case when  $C$  is a circle. — A very simple proof that (\*) holds with  $A = 4$  is given; it is based on a method used by Carlson [Ark. Mat. Astron. Fys. **29 B**, Nr. 11 (1943)] in the circular case. A refinement of the argument yields  $A = 3,6$ .  
Lennart Carleson.

Ullrich, Egon: **Betragsflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten.** Math. Z. **54**, 297—328 (1951).

Der Fortschritt dieser Arbeit gegenüber anderen Betrachtungen desselben Gegenstandes liegt darin, daß Verf. eine Brücke zu einer neueren funktionentheoretischen Forschungsrichtung schlägt. Die Gaußsche Krümmung  $K$  der Betragsfläche  $x, y, h = |w(z)|$  einer analytischen Funktion  $w(z)$  ergibt sich zu  $K = \frac{|w''|^2}{(1+|w'|^2)^2} \Re \left( \frac{w''}{w w'} - 1 \right)$ . Danach entscheidet der zweite Faktor über das Vorzeichen der Krümmung. Alle analytischen Funktionen  $w(z)$ , für deren Betragsflächen durchweg  $K = 0$  ist, genügen der Differentialgleichung (Dgl.)  $w''^2/w w' = c$  mit  $\Re c = 1$ . Ist  $Z_w$  — der Träger der analytischen Funktion  $w(z)$  — eine „möglichst einfache“ Riemannsche Fläche, auf der  $w(z)$  eindeutig ausgebreitet werden kann, so ist  $Z_w$  auch Träger des Differentialausdrucks  $c(z) = w''^2/w w'$ , braucht aber nicht mit  $Z_c$ , dem Träger von  $c(z)$ , identisch zu sein, wie z. B.  $w = e^z$  zeigt. Bei der Frage nach den einsinnig gekrümmten Betragsflächen (durchweg  $K' > 0$  oder  $K < 0$ ) kommt es entscheidend auf die Struktur des Trägers  $Z_c$  an. Für analytische Funktionen, deren zugeordnete Funktion  $c(z)$  auf einem Liouvilleschen Träger  $Z_c$  — d. h. auf  $Z_c$  gilt der Liouvillesche Satz — eindeutig ausgebreitet werden kann, sind die allgemeinen Potenzen  $(az + b)^{\alpha + i\beta}$  die einzigen einsinnig gekrümmten Betragsflächen. Danach besitzen z. B. alle ganzen und gebrochenen Transzendenten, von  $e^{az+b}$  abgesehen, Betragsflächen mit gemischter Krümmung. Ist  $Z_c$  ein Liouvillefreier Träger, gilt also auf ihm der Satz von Liouville nicht, dann lassen sich durch Integration der Dgl.  $w w'' - w'^2/c(z) = 0$  bzw.  $j' + b(z)j^2 = 0$ ,  $j = w'/w$  und  $b(z) = 1 - 1/c(z)$ , viele analytische Funktionen mit einsinnig gekrümmten Betragsflächen gewinnen. Ist etwa  $P(z)$  eine nicht über  $|z| = 1$  fortsetzbare Potenzreihe mit  $|P(z)| < 1$  in  $|z| < 1$ , so liefert die Integration der Dgl. mit den Koeffizienten  $b_-(z) = (P(z) - 1)/2$  bzw.  $b_+(z) = (P(z) + 1)/2$  Funktionen  $w_-(z)$  bzw.  $w_+(z)$ , für welche  $K < 0$  bzw.  $K > 0$  ist. Die Lösungen der Dgl. sind aber i. a. erst auf einer Überlagerungsfläche  $Z_w$  von  $Z_c$  eindeutig. Die wesentlichsten lokalen Eigenschaften der durch  $b(z) = (w''^2 - w w''')/w'^2$  vermittelten Zuordnung zwischen  $Z_w$  und  $Z_c = Z_b$  werden untersucht. Zum Schluß der Arbeit werden die Potenzbetragsflächen, entsprechend ihrer Bedeutung bei den vom Verf. behandelten Fragestellungen, genauer betrachtet.  
Hans Wittich.

Evgrafov, M. A.: **Potenzreihen mit ganzen Koeffizienten. II.** Mat. Sbornik, n. Ser. **29 (71)**, 121—132 (1951) [Russisch].

(Teil I. s. dies. Zbl. **42**, 83). Sei  $f(z) = \sum a_n z^n$  ( $a_n$  ganz),  $\sum b_n z^n = f(z) \cdot P(z)$  ( $P$  ein Polynom),  $F(z) = \sum b_n z^n/n!$ . Verf. beweist folgendes Rationalitätskriterium:  $f$  ist rational, wenn  $F$  folgenden Bedingungen genügt (mit  $z = r \cdot e^{i\theta}$ ): 1.  $F(z) = O(e^{\tau(1+\delta(r))})$ . 2. In einem Winkelraum der Form  $|\theta - \theta_0| \leq \eta$  ist sogar  $F(z) = O(e^{\tau(1-\varepsilon(r))})$ . Dabei gelte: 3.  $\delta(r) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ , 4.  $\delta(r)/\varepsilon(r) \rightarrow 0$ , 5.  $r \cdot \varepsilon(r)/\ln r \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow \infty$ . Beim Beweis wird der bekannte Kroneckersche Satz verwendet. Für ein Beispiel der Form  $\sum z^{2^n} (1-z)^{a_n}$  wird noch gezeigt, daß Bedingung 4. nicht entbehrlich ist.  
Karl Zeller.

Schubart, Hans: **Einige ganze Funktionen und ihre Riemannschen Flächen.** Math. Ann. **124**, 55—64 (1951).

Les fonctions entières considérées sont  $w = f(z) = \prod (1 + z/a_k)$  où les  $a_k$  sont réels, positifs et tels que  $\sum 1/a_k < \infty$ . Les zéros de  $f'(z)$  étant situés sur l'axe réel, le plan des  $z$  peut être décomposé en domaines d'univalence qui correspondent à  $\Im w > 0$  ou à  $\Im w < 0$ . L'A. étudie ces domaines.  
Jacques Dufresnoy.

Bose, S. K.: **On the maximum modulus of an integral function.** Bull. Calcutta math. Soc. **43**, 25—26 (1951).

Soit  $f(z) = \sum a_n z^n$  une fonction entière d'ordre  $\rho$ . Pour  $|z| = r$ , on pose  $M(r) = \max |f(z)|$ ,  $A(r) = \max \Re f(z)$ ,  $M^{(s)}(r) = \max |f^{(s)}(z)|$ . Soit  $m(r)$  le



plus grand des termes de la suite  $|a_n| r^n$  et  $N(r)$  son rang. L'A. démontre que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{N(r) \log r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log m(r)}{N(r) \log r} \leq 1 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log A(r)}{N(r) \log r} \leq 1 \quad \text{si } \varrho < \infty;$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M^{(s)}(r)}{N(r) \log r} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{N(r) \log r} \leq 1 \quad \text{si } \varrho < \frac{1}{2}.$$

S. M. Shah avait donné une autre démonstration de certains de ces résultats.

*Jacques Dufresnoy.*

**Bernštejn, S. N.: Definition und Grundeigenschaften der quasialgebroiden und algebroiden Funktionen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 377—380 (1951) [Russisch].

Soit  $E_n f(x)$  la meilleure approximation sur l'intervalle  $(-1, +1)$  de  $f(x)$  par un polynôme de degré  $n$ . L'A. dit que  $f(x)$  est quasi-algébroïde s'il existe un polynôme  $P(x)$  tel que (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n f(x) P(x)}{E_n f(x)} = 0$ . Parmi les polynômes  $P(x)$  satisfaisant à cette relation il y en a un,  $D_k(x)$ , de degré minimum  $k$ ; les zéros  $x_i$  de ce polynôme sont appelés points caractéristiques. L'A. montre que si  $R \geq |x_i + \sqrt{x_i^2 - 1}| \geq r$ , on a  $\frac{1}{R} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n f(x)} \leq \frac{1}{r} \leq 1$ . Conséquences: 1° Si  $r = R = 1$ ,  $f(x)$  ne peut être analytique (régulière); 2° Si  $r > 1$ ,  $f(x)$  est analytique dans une ellipse dont la somme des demi-axes est égale à  $r$ ; 3°  $f(x)$  ne peut être une fonction entière. — S'il existe un polynôme  $R(x)$  et un nombre  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) tels que, pour  $n$  assez grand,  $E_n f(x) R(x)/E_n f(x) < \alpha^n$  on dit que  $f(x)$  est asymptotiquement rationnelle. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que  $f(x) = F(x)/R(x)$  où  $R(x)$  est un polynôme dont tous les zéros sont intérieurs à une ellipse dont la somme des demi-axes est  $R > 1$  et  $F(x)$  une fonction régulière dans une ellipse dont la somme des demi-axes est  $R_1 > R$ . — Si pour tout polynôme  $P(x)$  on a, soit  $E_n f(x) P(x) = o[E_n f(x)]$ , soit  $E_n f(x) = O[E_n f(x) P(x)]$ , certains polynômes appartenant effectivement à la première catégorie, on dit que  $f(x)$  est algébroïde. L'A. montre que les points caractéristiques d'une fonction algébroïde sont tous ou bien sur une ellipse de foyers  $-1$  et  $+1$ , ou bien sur le segment  $(-1, +1)$ . Si  $f(x)$  est algébroïde la relation (1) est vérifiée pour tous les polynômes  $P(x)$  divisibles par  $D_k(x)$  et réciproquement. Enfin, toute fonction algébroïde est la somme d'au plus  $k$  fonctions algébroides ayant chacune un seul point caractéristique.

*Jacques Dufresnoy.*

**Fine, N. J.: Note on the Hurwitz zeta-function.** Proc. Amer. math. Soc. **2**, 361—364 (1951).

Riemann hat für die Richtigkeit der Funktionalgleichung der Zeta-Funktion  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  (mit  $\Re s > 1$ ) bekanntlich zwei Beweise angegeben (einen über ein Konturintegral, den anderen über eine Transformation der Theta-Funktion  $\vartheta_3$ ). Hurwitz erweiterte den ersten Riemannschen Weg zum Beweise der Funktionalgleichung der verallgemeinerten Zeta-Funktion  $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$  (mit  $0 < a < 1$ ). Vorliegende Arbeit zeigt, daß auch der zweite Weg Riemanns über die Theta-Funktion  $\vartheta_3$  zum Beweise der erweiterten Gleichung herangezogen werden kann.

*Heinz Unger.*

**Grunsky, Helmut: Über beschränkte Funktionen.** J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein., 1 Abt. **55**, 4—9 (1951).

Bericht über einen 1949 gehaltenen Vortrag. Verf. berichtet anfänglich über Verschärfungen des Hadamardschen Dreikreisesatzes von Teichmüller (dies. Zbl. **20**, 235) und Heins [Trans. Amer. math. Soc. **55**, 349 (1944)]. Wird statt des dabei betrachteten Kreisringes allgemein ein von einer endlichen Anzahl von Kurven berandetes Gebiet  $B$  betrachtet, so ergeben sich verwandte Extremalprobleme.

Garabedian (dies. Zbl. 35, 54) und Verf. haben die obere Schranke von  $|F'(z_0)|$  in der festgehaltenen Nullstelle  $z_0$  bei Betrachtung aller in  $B$  regulärer  $F$  mit  $|F| < 1$  gefunden und die Existenz einer einzigen Extremalfunktion nachgewiesen. Auch das Pick-Nevanlinnasche Interpolationsproblem haben sie in bezug auf die allgemeinen Gebiete  $B$  mit Erfolg angegriffen.

Gunnar af Hällström.

**Chavinson, S. Ja.:** Eine Abschätzung der Taylorschen Summen beschränkter analytischer Funktionen im Kreise. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 333—336 (1951) [Russisch].

Die Teilsummen  $s_n(z)$  einer in  $|z| < 1$  beschränkten Potenzreihe  $f(z)$  mit  $|f| \leq 1$  brauchen nach Landau nicht beschränkt zu sein. Landau verdankt man bei Entwicklung um  $z = \alpha = 0$  die Aussage  $\|S_{n,0}^z\| = \sup_f |s_{n,0}^z| \sim \frac{1}{\pi} \log n$ .

Verf. teilt ein allgemeines Ergebnis von Markuševič mit: Nimmt man unter obiger Voraussetzung  $|f| \leq 1$  in  $|z| < 1$  die Entwicklung um eine Stelle  $\alpha$  vor, o. B. d. A.  $0 < \alpha < 1$ , so gilt bei  $z \neq 1$   $\|S_{n,\alpha}^z\| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha n}} \frac{1-\alpha}{|1-z|} \left(\frac{|z-\alpha|}{1-\alpha}\right)^n$ . Er

ergänzt diese Aussage durch den Grenzfall  $z = 1$ , wo  $\|S_{n,\alpha}^1\| \sim \frac{1}{2\pi} \log n$ . Die Beweismethode wird gegenüber Landau etwas verbessert, dessen Verfahren, unmittelbar übertragen, nur einen doppelt so großen Koeffizienten liefert. Die neue asymptotische Aussage wird als genau erwiesen.

Egon Ullrich.

**Mergeljan, S. N.:** Über ein mit analytischen Funktionen zusammenhängendes Integral. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 15, 395—400 (1951) [Russisch].

Es wird bewiesen: Es existiert eine in  $|z| < 1$  analytische und in  $|z| \leq 1$  beschränkte Funktion  $f(z)$ , für welche  $\iint_{|z| < 1} |f'(z)| d\omega = \infty$ . Wesentliches Hilfsmittel hierzu ist der Banachsche Lückensatz über trigonometrische Reihen. Daran werden einige Bemerkungen geknüpft, z. B.: Es gibt eine Menge  $M$  im  $R_3$ , welche das topologische Produkt einer linearen meßbaren und ebenen meßbaren Menge ist, so daß  $\iint_M \frac{x(y-z)}{[x^2 + (y-z)^2]^2} dx dy dz$  eigentlich divergiert.

Leo Schmetterer.

**Sasaki, Yasuharu:** Theorems on the convexity of bounded functions. Proc. Japan Acad. 27, Nr. 3, 122—129 (1951).

Soit  $w = f(z)$  une fonction qui, pour  $|z| < 1$ , est holomorphe et vérifie  $|f(z)| < M$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ . On sait qu'une telle fonction est univalente dans le cercle  $|z| < M - \sqrt{M^2 - 1}$ . L'A. montre que le cercle  $|z| < p_c$  est transformé par  $w = f(z)$  en un domaine convexe,  $p_c$  étant la racine réelle de l'équation  $M - (4M^2 - 1)x + 3Mx^2 - x^3 = 0$ . Si l'on suppose de plus  $f(z)$  univalente dans  $|z| < 1$ , le résultat précédent subsiste quand on remplace  $p_c$  par  $p_0 = \frac{1}{2}(t_0 - \sqrt{t_0^2 - 4})$  où  $t_0$  est la racine supérieure à 2 de l'équation  $t^3 - 2(1 + 2/M)t^2 - 4(2 - 6/M + 1/M^2)t - 8/M^2 = 0$ . Les valeurs obtenues pour  $p_c$  et  $p_0$  sont les meilleures possibles.

Jacques Dufresnoy.

**Lokki, Olli:** Beiträge zur Theorie der analytischen und harmonischen Funktionen mit endlichem Dirichletintegral. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 92, 11 S. (1951).

Aus den zu einem schlichten, endlich vielfach zusammenhängenden (schl., e. v. z.) Gebiet  $G_n$  gehörigen Radial- und Kreisbogenschlitzfunktionen  $f_n(z)$  und  $g_n(z)$  werden  $L_n(z) = \frac{1}{2} \log(f_n/g_n)$  und  $M_n(z) = \frac{1}{2} \log(f_n \cdot g_n)$  gebildet. Ein beliebiges schlichtes Gebiet  $G$  wird durch eine Folge schl., e. v. z. Gebiete  $G_n$  ausgeschöpft. Bei  $n \rightarrow \infty$  streben  $L_n$  und  $M_n$  gegen in  $G$  erklärte Grenzfunktionen  $L(z)$  und  $M(z)$ . Verf. zeigt, daß  $L(z)$  dann und nur dann verschwindet, wenn die Spanne von  $G$  Null ist, wobei die Spanne  $S$  mit Hilfe der Horizontalschlitzfunktion  $w(z) = (z - z_1)^{-1} + a(z - z_1) + \dots$  und der Vertikalschlitzfunktion  $w^*(z) = (z - z_1)^{-1} + b(z - z_1) + \dots$



durch  $S = a - b$  erklärt wird. Ist  $G$  ein Gebiet  $G_D$ , d. h. gibt es in  $G$  eindeutige analytische Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral, dann existieren in  $G$  auch eindeutige und beschränkte Funktionen. Weiß man darüber hinaus noch, daß die Berandung von  $G_D$  ein endliches und positives lineares Maß hat, dann gibt es in  $G_D$  auch schlichte und beschränkte analytische Funktionen. Wird ein Gebiet  $G$  mit der Spanne Null von einer Punktmenge  $\Gamma$  berandet, die auf einer Geraden  $g$  liegt und positive Kapazität hat, dann nimmt jede in  $G$  eindeutige regulär harmonische Funktion mit endlichem Dirichletintegral in beliebigen zu  $g$  spiegelbildlichen Punkten gleiche Werte an. In  $G$  eindeutige analytische Funktionen mit endlichem Dirichletintegral zeigen ein anderes Verhalten. Ihre Werte in zwei beliebigen Punkten aus  $G$  lassen sich nämlich beliebig vorschreiben.

Hans Wittich.

**Tims, S. R.:** A theorem on functions schlicht in convex domains. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 200—205 (1951).

Noshiro a démontré [J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. Sapporo, Sect. I 2, 129—150 (1934)] que si  $\Phi(z)$  est régulière dans un domaine simplement connexe  $D$  qui est convexe et que la partie réelle de la dérivée  $\Phi'(z)$  est  $\neq 0$  dans  $D$ ,  $\Phi(z)$  est univalente dans  $D$ . Il est montré dans la présente Note que, non seulement la condition que  $D$  soit convexe est nécessaire pour la validité de la proposition ci-dessus, mais que: quelque soit  $D$  simplement connexe et non convexe, il existe toujours une fonction  $\Phi(z)$  régulière dans  $D$  et non univalente dans  $D$ , dont la dérivée  $\Phi'(z)$  ne s'annule pas dans  $D$ .

Simion Stoilow.

**Erdős, P., F. Herzog and G. Piranian:** Schlicht Taylor series whose convergence on the unit circle is uniform but not absolute. Pacific J. Math 1, 75—82 (1951).

Das Funktionselement  $(1) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  besitze den Konvergenzradius 1. Nach G. H.

Hardy kann es vorkommen, daß (1) auf  $|z| = 1$  gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert (vgl. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1929, S. 68). Die Verff. geben zwei neue Beispiele von Potenzreihen (1) dieser Art, die zudem die Eigenschaft haben, daß  $f(z)$  schlicht in  $|z| \leq 1$  ist. Beim ersten Beispiel besitzt  $f(z)$  nur eine einzige singuläre Stelle auf  $|z| = 1$ , beim zweiten Beispiel ist der andere Extremfall verwirklicht, daß nämlich  $f(z)$  über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar ist.

Im zweiten Beispiel handelt es sich um eine Lückenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{m_n}$ . Soll eine solche die Eigenschaften der Schlichtheit in  $|z| \leq 1$  und der gleichmäßigen, aber nicht absoluten Konvergenz auf  $|z| = 1$  besitzen, so muß  $\sum m_n^{-1}$  divergieren, darf also  $m_n$  nicht zu schnell wachsen. Aber, dies zeigt das Beispiel,  $m_n$  kann immerhin so schnell wachsen, daß die Fabry'sche Lückenbedingung  $m_{n+1} - m_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  erfüllt ist. Die Konstruktion der Beispiele beruht auf den

Abbildungseigenschaften der Funktion  $z + k\omega[1 - (1 - z/\omega)^{1/n}]$ , die die Fläche des Einheitskreises abbildet auf einen Bereich, der, roh gesprochen, wieder aus der Fläche des Einheitskreises mit einem an der Stelle  $\omega$  ansetzenden (für großes  $n$  schmalen) Zahn der Länge  $k$  besteht [ $k$  reell,  $|\omega| = 1$ ,  $n > 0$  ganz,  $(1 - z/\omega)^{1/n} > 0$  für  $z = \omega/2$ ].

Werner Meyer-König.

**Ullman, J. L.:** Two mapping properties of schlicht functions. Proc. Amer. math. Soc. 2, 654—657 (1951).

Let  $C$  be a simple analytic curve and  $D$  its exterior. Let  $f(z) = z + a_1/z + \dots$  be a function which maps  $D$  in a 1—1 manner onto the exterior of a circle  $|w| = r$ . The author proves that 1. if  $K$  is a circle with center  $z_0$  whose closed interior lies in  $D$ , then  $F(z) = f(z)/(z - z_0)$  maps  $K$  onto a curve that is star-shaped from the point  $w = 0$ , 2. if  $z_1$  and  $z_2$  are two points in  $D$  and if  $z_1$  and  $C$  lie on the same side of the perpendicular bisector of the joining  $z_1$  and  $z_2$  then  $|f(z_1)| < |f(z_2)|$ . The second theorem is extended on the case when  $C$  is not analytic.

Jerzy Górski.

**Wing, G. Milton:** Averages of the coefficients of schlicht functions. Proc. Amer. math. Soc. 2, 658—662 (1951).

Let  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ,  $a_1 = 1$  be a function analytic and schlicht in the unit

circle and

$$s_n(k) = \left| \sum_{j=0}^{n-1} C_{j+k-1, k-1} \cdot a_{n-j} \right| / C_{n+k, k+1}.$$

The author proves that if  $|a_n| \leq n$  (conjecture of Bieberbach) and  $k > 1$  then  $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(k) \leq e^{k+1} \cdot \Gamma(k+2) \cdot \Gamma(k-1) / (k+1)^{k+1} \cdot 2^{k-1} \cdot \Gamma^2(k/2) = A(k)$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty} A(k) = 1$ .  $A(k)$  tends to unity very slowly. A better estimate of  $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(k)$  for small  $k$  is the following:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(k) \leq k e^{k+1} \cdot \Gamma^{1/2}(2k-1) / (k+1)^k \cdot 2^{k+1/2}.$$

*Jerzy Górski.*

**Herzog, F. and G. Piranian:** On the univalence of functions whose derivative has a positive real part. Proc. Amer. math. Soc. 2, 625—633 (1951).

Let  $D$  be a domain and  $H$  the interior of its convex hull. Let  $S$  be the set of deficiency of  $D$  with respect to convexity i. e. the complement of  $D$  relative to  $H$ . A domain shall be said to be almost convex provided every pair of open circles in  $D$  can be connected by a line segment lying entirely in  $D$ . A set is totally disconnected if it does not contain a nondegenerate continuum. A point-set  $E$  has perimeter zero provided for every number  $\varepsilon > 0$  there exists a set of disjoint rectifiable closed Jordan curves  $J_k$  such, that each point of  $E$  is enclosed by one of  $J_k$  and the sum of the lengths of the curves  $J_k$  is less than  $\varepsilon$ . It was shown by K. Noshiro [J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Sapporo 2, 129—155 (1934/5); this Zbl. 10, 263] and S. E. Warschawski [Trans. Amer. math. Soc. 38, pp. 310—340 (1935); this Zbl. 14, 267] that every convex domain  $D$  has the property (U): if  $\Re f'(z) > 0$  in  $D$ , where  $f(z)$  is holomorphic in  $D$ , then  $f(z)$  is schlicht in  $D$ . The authors prove 1. in order that a domain  $D$  have property (U) it is necessary that the set of deficiency of  $D$  be totally disconnected, 2. a domain which is almost convex has property (U), 3. a domain whose set of deficiency has perimeter zero is almost convex. The authors give an example which illustrates the obtained theorems.

*Jerzy Górski.*

**Mori, Akira:** Conformal representation of multiply connected domain on many-sheeted disc. J. math. Soc. Japan 2, 198—209 (1951).

The author considers the conformal mapping of a schlicht domain  $D$  bounded by  $p$  continua  $F_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, p$  on a  $k$ -sheeted unit disc, where  $k$  is any integer  $\geq p$ . The case  $k = p$  was proved by Bieberbach [S.-Ber. Berlin. Math. Ges. 24, 6—9 (1925)] and Grunsky [S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., phys. math. Kl. 1937, 40—46; this Zbl. 16, 267]. The author gives a necessary and sufficient condition in order that any  $p$  points in  $D$  have by the conformal mapping of above mentioned theorem one and the same projection. Let  $D_\lambda$  be the part of  $D$  such that  $u_\lambda(x) > \frac{1}{2}$  in  $D_\lambda$ , where  $u_\lambda(x)$  is the harmonic measure of the boundary curve  $F_\lambda$  with respect to  $D$ . Then, if we map  $D$  conformally on a  $p$ -sheeted unit disc the image of  $D_\lambda$  is always schlicht. The number  $\frac{1}{2}$  can not be replaced by any smaller.

*Jerzy Górski.*

**Mori, Akira:** On conformal representation of multiply connected polygonal domain. J. math. Soc. Japan 2, 187—197 (1951).

The necessary and sufficient condition in order that a function  $w(z)$  be schlicht and star-shaped with respect to  $w(0) = 0$  in  $|z| < 1$  is, that  $w(z)$  can be expressed in the form  $w(z) = \text{const} \cdot z \cdot \exp \left\{ 2 \int_{|z|=1} \log \frac{\zeta}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right\}$ , where  $\mu$  denotes a positive distribution of total mass 1 on the unit circle. In this paper the author proves the analogous theorem for  $n$ -ply connected domain. As an application of this theorem the author gives an expression for the mapping function of a  $n$ -ply connected polygonal domain [i. e.  $n$ -ply connected Riemann surface  $P$  of planar character (schlicht-



artig) whose boundary consists of a finite number of segments or half straight-lines]. When  $P$  is schlicht the above mentioned expression coincides for  $n = 1$  with the ordinary Schwarz-Christoffel's formula and for  $n = 2$  with the formula given by Y. Komatu [Japan. J. Math. 19, No. 2 (1945)].

*Jerzy Górski.*

**Warschawski, S. E.:** On conformal mapping of regions bounded by smooth curves. Proc. Amer. math. Soc. 2, 254—261 (1951).

The author proves the following theorem: let  $C$  be a simple closed curve which contains the origin in its interior  $R$ . It is supposed that 1°  $C$  possesses a continuously turning tangent and the tangent angle  $\alpha(s)$  ( $s$  = arc length) has the modulus of continuity  $\beta(t)$ , 2° there exists a const.  $k$  such that if  $P_1$  and  $P_2$  are two points of  $C$  and  $\Delta s$  is the shorter arc between them, then  $\Delta s/P_1 P_2 \leq k$ , 3° the diameter of  $C$  is  $\leq D$ , the distance of the origin from  $C$  is  $> \sigma > 0$ . If  $w = f(z)$  maps the circle  $|z| < 1$  conformally onto  $R$ ,  $f(0) = 0$ , then for every number  $p > 0$  there exists a constant  $A_p$  which depends only on  $p, k, D, \sigma, \beta$  such that for  $0 \leq \varrho < 1$

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\theta})|^{\pm p} d\theta \right\}^{1/p} \leq A_p \text{ uniformly.}$$

An explicit expression is obtained for  $A_p$ .

*Jerzy Górski.*

**Meschkowski, Herbert:** Über die konforme Abbildung gewisser Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche. I. Math. Ann. 123, 392—405 (1951).

Verf. behandelt die Frage der konformen Abbildung der Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche (d. h. Bereiche, bei denen jedes Randkontinuum Kreis oder Punkt ist). Einige Spezialfälle haben Fischer (Diss. Jena 1915) und Georgi (Diss. Jena 1915) erledigt. In dem ersten Teil der vorliegenden Arbeit betrachtet Verf. den Fall, daß sich die Ränder gegen endlich viele Punkte häufen. Dabei müssen gewisse Randbedingungen erfüllt sein. Im zweiten Teil erledigt er den Fall der Bereiche mit endlich vielen Häufungsrändern, die nicht punktförmig sind. Wenn dann gewisse Abstandsbedingungen erfüllt sind, ist eine Abbildung auf einen Vollkreis möglich.

*Jerzy Górski.*

**Tsuji, Masatsugu:** A deformation theorem on conformal mapping. J. math. Soc. Japan 2, 213—215 (1951).

Etant donné un domaine simplement connexe  $D$ , contenant l'origine et compris dans  $|z| < M$ , soit  $E$  un continu  $C D$  et  $\varrho$  un nombre positif inférieur à la distance de tout point de  $E$  à la frontière de  $D$ . Il est démontré que, si  $w = w(z)$ , avec  $w(0) = 0$ , représente conformément  $D$  sur  $|w| < 1$ , l'image de  $E$  est comprise dans  $|w| < 1 - \frac{\varrho}{4M} e^{-a(M^2/\varrho^2)}$ ,  $a$  ayant une valeur numérique indépendante des données.

Une proposition semblable peut être établie pour les surfaces de Riemann simplement connexes sans point de ramification.

*Simion Stoilow.*

**Lohwater, A. J. and G. Piranian:** Linear accesibility of boundary points of a Jordan region. Commentarii math. Helvet. 25, 173—180 (1951).

Soit  $C$  une courbe fermée de Jordan,  $D$  l'intérieur de  $C$  et  $E$  un ensemble quelconque de points de  $C$ . La représentation conforme de  $D$  sur le cercle  $|z| < 1$  fait correspondre à  $E$  un ensemble  $E_1$  situé sur la circonférence  $C_1 \{|z| = 1\}$ . Le problème de quelle nature doit être  $E$  pour que  $E_1$  soit de mesure 0 a été examiné par W. Seidel et J. L. Walsh [Trans. Amer. math. Soc. 52, 128—216 (1942)] et par A. L. Lohwater et W. Seidel (ce Zbl. 31, 25). — Les AA. prouvent par un exemple qu'on peut avoir  $\text{mes } E_1 = 0$  lorsque  $E$  est l'ensemble de tous les points  $P$  linéairement accessibles (c'est-à-dire tels qu'il existe un segment  $PQ$  dont tous les points sauf  $P$  appartiennent à  $D$ ).

*F. Leja.*

**Yosida, Tokunosuke:** Theorems on the cluster sets of pseudoanalytic functions. Proc. Japan Acad. 27, 268—274 (1951).

Verf. untersucht Randwerte in einer quasikonformen Abbildung. Sei  $D$  ein Gebiet in der  $z$ -Ebene und  $C$  sein Rand. Sei  $E$  eine in  $C$  enthaltene, beschränkte abgeschlossene Menge von (logarithmischer) Kapazität Null, und  $z_0$  ein Punkt in  $E$ . Sei  $r(z) = e^{u(z)}$ , wo  $u(z)$  eine durch eine gewisse in  $E$  gegebene Maßbelegung definierte harmonische Funktion ist, welche den Randwert  $+\infty$  in jedem Punkt von  $E$  nimmt, und sei  $C_r$  die Niveaulinie  $r(z) = r$ . Sei ferner  $(P)$  die Klasse von Funktionen  $w = f(z)$ , welche in  $D$  eindeutig und pseudoanalytisch sind und für

welche das Integral  $\int_{\infty}^{\infty} \frac{dr}{r D(r)}$  divergiert, wo  $D(r) = \sup D_{z/w}$  in  $C_r$  ist [ $D_{z/w}$  ist der Dilatationskoeffizient von  $f(z)$ ]. Sei  $S_{z_0}^{(D)}$  die Menge sämtlicher Werte  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ ,

wo  $z_n$  eine in  $D$  gegen  $z_0$  konvergierende Punktmenge ist. Sei ferner  $S_{z_0}^{*(C)}$  der Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen der Vereinigungsmengen  $\cup S_{z'}^{(D)}$ , wo  $z'$  zu  $C - E$  und  $|z - z_0| < r$  gehört. Folgende Sätze werden bewiesen: Wenn  $f(z) \in (P)$ , so ist  $\Omega = S_{z_0}^{(D)} - S_{z_0}^{*(C)}$  offen.  $f(z)$  nimmt in jeder Umgebung von  $z_0$  jeden Wert in  $\Omega$  unendlich oft an, außer einer Menge von Ausnahmewerten, deren Kapazität Null ist. Falls  $E$  in einer endlichen Anzahl von zusammenhängenden Randkomponenten enthalten ist, so gibt es hier höchstens zwei Ausnahmewerte in jeder zusammenhängenden Komponente von  $\Omega$ .

Kaarlo Veikko Paatero.

**Dugué, Daniel:** Relation entre le nombre des valeurs asymptotiques et le nombre des valeurs doubles. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 1734—1735 (1951).

Folgende Sätze werden gegeben: Sei  $\varphi(z)$  eine in einem Gebiete eindeutige analytische Funktion, welche einen Wert unendlich oft annimmt. Wenn  $\varphi(z)$  keinen vielfachen Wert besitzt, so hat  $\varphi(z)$  mindestens drei asymptotische Werte, falls nicht  $\varphi(z) \equiv (a e^z + b)/(c e^z + d)$ . Wenn  $\varphi(z)$  keinen asymptotischen Wert und keinen vielfachen Wert größerer Ordnung als 2 besitzt, so hat  $\varphi(z)$  mindestens vier verschiedene zweifache Werte.

Kaarlo Veikko Paatero.

**Tsuji, Masatsugu:** On a regular function which is of constant absolute value on the boundary of an infinite domain. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 24—38 (1951).

Soit  $w = f(z)$  une fonction holomorphe et uniforme dans un domaine infini  $\Delta$  et sur sa frontière  $\Gamma$  (formée au plus d'une infinité dénombrable de courbes analytiques). On suppose  $|f(z)| < R$  dans  $\Delta$  et  $|f(z)| = R$  sur  $\Gamma$ . Grâce à l'introduction dans le plan des  $w$  d'une métrique convenable à côté de la métrique sphérique habituelle, l'A. établit deux théorèmes fondamentaux analogues à ceux de la théorie classique de Nevanlinna-Ahlfors relative aux fonctions méromorphes dans  $|z| < R_0 \leq \infty$ . La méthode suivie est très voisine de celle développée par Ahlfors dans l'étude des surfaces de recouvrement. Les résultats obtenus rejoignent ceux de Noshiro [ce Zbl. 24, 330], Kunugui [Japan. J. Math. 18, 1—39, 583—614 (1943)], Tumura [Japan. J. Math. 18, 797—876 (1943)]. — L'A. en déduit une extension d'un th. d'Ahlfors, en bornant inférieurement la croissance de la caractéristique  $T(r)$  de  $w = f(z)$  dans l'hypothèse d'une singularité transcendante directe pour la fonction inverse  $z = \varphi(w)$ . — Il étend enfin les théorèmes fondamentaux au cas où les conditions  $|f(z)| < R$  et  $|f(z)| = R$  sont remplacées par  $f(z) \in D$  et  $f(z) \in C$ , où  $D$  est un domaine dont la frontière  $C$  est formée d'un nombre fini de courbes de Jordan analytiques.

Jacques Dufresnoy.

**Korovkin, P. P.:** Über das Wachstum der Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 1081—1084 (1951) [Russisch].

Für ein Gebiet  $G$  mit beschränkter Randpunktmenge  $\Gamma$  von positivem transfinitem Durchmesser werden Schätzungen für eindeutige, bis auf endlich viele Pole reguläre  $f(z)$  mittels der Greenschen Funktion und der Lösung eines verallgemeinerten Dirichletproblems zu  $\ln F(x)$  gegeben, wenn  $x \in \Gamma$ ,  $z \in D$ ,  $\lim_{z \rightarrow x} f(z) \leq F(x)$ .

$z \rightarrow x$



Darauf werden einige Schlüsse aufgebaut, die die Ergebnisse einer früheren Note (dies. Zbl. 41, 203) fortführen; sie verallgemeinern einen Bernsteinschen Schluß, der sich auf die Analytizität einer Funktion in der Umgebung der Menge bezieht, wo zunächst approximiert wird: Gilt für alle Punkte  $x$  einer gewissen Menge  $E$   $\limsup_n |\Phi(x) - f_n(x)| \leq F(x) < 1$ , so ist  $\Phi(x)$  in einer offenen Menge analytisch, die durch Greensche Funktion und Lösung des Dirichletproblems (wie oben) bestimmt werden kann. Bernstejn gab erst den Sonderfall, wo  $E$  als Strecke gewählt ist. Egon Ullrich.

**Royden, H. L.:** Some remarks on open Riemann surfaces. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 85, 8 S. (1951).

Es sei  $W^*$  eine offene Riemannsche Fläche. „ $W^*$  gehört zur Klasse  $N_{HB}$ “ bedeutet, daß es auf  $W^*$  keine nichtkonstanten beschränkten harmonischen Funktionen gibt. Analoge Bedeutung haben die Bezeichnungen  $N_{HD}$ ,  $N_{HBD}$ ,  $N_{AB}$ ,  $N_{AD}$ ;  $D$  = beschränktes Dirichletintegral,  $A$  = analytisch. Weiter sei  $\omega = p dx + q dy$ ,  $\omega^* = -q dx + p dy$ ,  $\iint_{W^*} \omega \omega^* < \infty$  und  $d\omega = (q_x - p_y) dx dy$  das Cartansche Differential. Auf  $W^*$  existiert dann und nur dann eine Greensche Funktion, wenn eine Differentialform  $\omega$  mit  $\iint_{W^*} |d\omega| < \infty$  und  $\iint_{W^*} d\omega \neq 0$  existiert. Gilt

$\iint d\omega = 0$ , und steht außerdem noch die Existenz einer beschränkten, stückweise glatten Funktion  $f$  mit endlichem Dirichletintegral und  $\iint d(f\omega) \neq 0$  fest, so folgt die Existenz von auf  $W^*$  nichtkonstanten HBD-Funktionen und umgekehrt. Als Folge des angegebenen Beweises ergibt sich unmittelbar die (zuerst von Virtanen 1950 bewiesene) Tatsache, daß die Klassen  $N_{HD}$  und  $N_{HBD}$  identisch sind. Weiter folgt, daß die Eigenschaft „ $W^*$  gehört der Klasse  $N_{HD} = N_{HBD}$  oder der Klasse  $N_{HB}$  an“, eine Eigenschaft des idealen Randes von  $W^*$  ist. Der Nachweis, daß  $N_{AD}$  die Klasse  $N_{AB}$  enthält, wird auf einen Satz von Ahlfors-Beurling über funktionentheoretische Nullmengen zurückgeführt. Hans Wittich.

**Gachov, F. D.:** Über singuläre Fälle der Riemannschen Randwertaufgabe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 705—708 (1951) [Russisch].

Referat erschien in dies. Zbl. 41, 48.

**Bergman, S. and M. Schiffer:** Kernel functions and conformal mapping. Compositio math. 8, 205—249 (1951).

Von einem Bereich  $\mathfrak{B}$  im  $R_2$  werde stets vorausgesetzt, daß er endlich ist und von  $n$  analytischen Kurvenstücken  $C_v$  berandet wird. Die Greensche Funktion  $g(z, t)$  von  $\mathfrak{B}$  ist gegeben durch die 3 fundamentalen Eigenschaften: a)  $g(z, t)$  ist harmonisch in  $z$  bei festem  $t$  aus  $\mathfrak{B}$  mit Ausnahme von  $z = t$ , b)  $g(z, t) + \log |z - t|$  ist harmonisch in der Nachbarschaft von  $z = t$ , c)  $g(z, t) \equiv 0$  für  $z \in C$  und  $t$  aus  $\mathfrak{B}$ . — Mit Hilfe der Greenschen Funktion werden die Kernfunktionen 1. und 2. Art

$$K(z, \bar{t}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 g(z, t)}{\partial z \partial \bar{t}}, \quad l(z, t) = \frac{1}{\pi(z-t)^2} + \frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 g(z, t)}{\partial z \partial t}$$

des Bereiches  $\mathfrak{B}$  bestimmt.  $l(z, t)$  ist regulär in  $\mathfrak{B} + C$ , und es gilt die Ungleichung  $|l(z, z)| \leq K(z, \bar{z})$ . — Die in  $\mathfrak{B}$  regulären und quadratintegrierbaren Funktionen bilden einen linearen Vektorraum  $\mathcal{A}$ , der durch das skalare Produkt  $(f, \bar{g}) = \int_{\mathfrak{B}} f \cdot \bar{g} d\tau_z$

metrisiert wird. Durch die lineare Transformation  $Tf(z) = \int_{\mathfrak{B}} l(z, t) \bar{f}(t) d\tau_t$  wird der euklidische Vektorraum  $\mathcal{A}$  eindeutig auf einen Raum  $\mathcal{A}_T$  abgebildet. Die Folge von Eigenfunktionen  $\{\varphi_v(z)\}$  der Transformation  $T$  bildet ein vollständiges Orthonormalsystem in bezug auf den Raum  $\mathcal{A}$ . Die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_v$  sind größer oder gleich eins. Ist  $\mathfrak{B}$  ein einfach zusammenhängender Bereich, so hat sein Komplement dieselbe Folge von Eigenwerten. — Als Anwendung der

Theorie ergibt sich der bemerkenswerte Satz: Es sei  $V(z, t)$  symmetrisch und analytisch in beiden Argumenten in einer Nachbarschaft des Nullpunktes; es seien  $V(z, t) = \sum_{m, n=0}^{\infty} d_{mn} z^m \bar{t}^n$  und  $K(z, \bar{t}) = \sum_{m, n=0}^{\infty} k_{mn} z^m \bar{t}^n$  die zugehörigen Reihenentwicklungen. Gilt dann für jeden komplexen Vektor  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$

$$\left| \sum_{m, n=0}^N d_{mn} \alpha_m \alpha_n \right| \leq \sum_{m, n=0}^N k_{mn} \alpha_m \alpha_n,$$

so ist  $V(z, t)$  analytisch im ganzen Bereich  $\mathfrak{B}$ .

*Mehring.*

**Hitotumatu, Sin:** On the possibility of the Weil's integral representation. Proc. Japan Acad. 27, 279—281 (1951).

Es wird gezeigt, wie aus Ergebnissen von K. Oka (dies. Zbl. 36, 52) und H. Cartan (dies. Zbl. 38, 237) die Zerlegung  $[\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n); z = (z_1, \dots, z_n)]$

$$\varphi(\zeta) - \varphi(z) = \sum_{k=1}^n (\zeta_k - z_k) p_k(\zeta, z)$$

im Regularitätsgebiet  $D \times D$  folgt, wenn  $\varphi(z)$  im Regularitätsgebiet  $D$  regulär ist. Diese notwendige Voraussetzung für die Weilsche Integralformel (dies. Zbl. 11, 123) wurde auf andrem Wege von H. Hefer (dies. Zbl. 38, 238) bewiesen.

*F. Sommer.*

**Levin, B. Ja.:** Die allgemeine Form der speziellen Operatoren über den ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 397—400 (1951) [Russisch].

Wegen der Bezeichnungen vgl. Levin, dies. Zbl. 42, 88. Verf. betrachtet eine Unterklasse  $P$  der Klasse  $\overline{HB}$ . Sie besteht aus allen Funktionen endlicher Ordnung von zwei Veränderlichen. Das sind die Funktionen, die bezüglich der einen Veränderlichen von endlicher Ordnung sind, wenn die andere Veränderliche endlich bleibt ( $\lim \ln |\omega(z, u)| |z|^{-1}$  endlich, wenn  $|u| \leq R$ ,  $z \rightarrow \infty$ , und umgekehrt). Für jeden stetigen linearen homogenen in  $P$  erklärten Operator läßt sich eine Art von kanonischer Integraldarstellung angeben. Unter einem  $\mathfrak{B}$ -Operator versteht Verf. einen Operator, der die Klasse  $P$  auf sich selbst abbildet. Er gibt eine Beweisskizze für einen Satz, der eine vollständige Charakterisierung der  $\mathfrak{B}$ -Operatoren gestattet: es sind dies genau die Operatoren, in deren Integraldarstellung Funktionen aus einer gewissen wohlbestimmten Funktionenklasse als Kernfunktionen auftreten.

*Wolfgang Hahn.*

**Rothstein, Wolfgang:** Über die Fortsetzung vierdimensionaler analytischer Flächen. Arch. der Math. 2, 456—460 (1951).

S. dies. Zbl. 37, 183 und Math. Ann. 122, 424—434 (1951).

**Majstrenko, Petro:** A set-theoretic generalization of the principle of analytic continuation. I. Proc. London math. Soc., III. S. 1, 152—162 (1951).

Die im Titel angedeutete Verallgemeinerung läuft im wesentlichen auf einen axiomatischen Aufbau des Weierstraßschen Prinzips der analytischen Fortsetzung hinaus. Eine Menge  $N$  von topologischen Räumen wird als Menge der „Elemente“ eines „fundamentalen Raumes“  $M_N$  betrachtet und es werden, mit zweckmäßigen Einschränkungen, mengentheoretische und topologische Begriffe eingeführt, die denen der klassischen Theorie nachgebildet sind. So ist z. B. eine verkettete Klasse von Elementen eines  $M_N$  ein „monogenic space of  $M_N$ “. Ähnlich werden Mengen  $\Phi$  von Funktionen  $f$ , die auf offenen Untermengen eines topologischen Raumes  $X$  definiert sind, zu einem Fundamentalraum  $M_\Phi$  zusammengefaßt, und es entsteht ein Begriff, welcher dem der nach Weierstraß monogenen analytischen Funktion nachgebildet ist. Schließlich werden Analogien zum analytischen Gebilde (Weyl) und zur Riemannschen Fläche hergestellt. Die klassischen Begriffe der Funktionentheorie stellen sich als Sonderfälle heraus.

*Simion Stoilow.*



**Rizza, Giovanni Battista:** *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse.*

*Commentationes Pontificia Acad. Sci.* **14**, Nr. 4, 169—194 (1950).

Es handelt sich um die Funktionentheorie in einer (assoziativen) Algebra  $A$  mit der Basis  $i_0, i_1, \dots, i_n$  über dem reellen Körper. Eine Funktion  $w = \sum w_k(x_0, \dots, x_n) i_k$  von  $x = \sum x_h i_h$  heißt in einem Bereich des  $R_{n+1}$  rechts- bzw. linksregulär, wenn  $Dw = 0$  bzw.

$D^*w = 0$ , wo  $D = \sum \frac{\partial}{\partial x_k} i_k$ ,  $D^* = \sum i_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ . Für eine  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

$V_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) des  $R_{n+1}$  werden  $\binom{n+1}{n-k}$  hyperkomplexe Differentiale  $dX_{[a_1, \dots, a_{n-k}]}$ , ( $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-k}$ ) erklärt. Ist  $u$  rechts-,  $v$  linksregulär, so gilt für jede orientierte  $(r+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $V_{r+1}$

$$\int u dX_{[a_1, \dots, a_{n-r}]} v = \sum_{s=1}^{n-r} (-1)^s \int \frac{\partial u}{\partial x_{a_s}} dX_{[a_1, \dots, a_{s-1}, a_{s+1}, \dots, a_{n-r}]} v + u dX_{\square} \frac{\partial v}{\partial x_{a_s}},$$

wo rechts über  $V_{r+1}$ , links über seinen Rand integriert wird. Für  $r = n$  ist die rechte Seite  $= 0$  zu setzen. Dieser sehr allgemeine Integralsatz, der  $2^{n+1} - 1$  verschiedene Integralsätze enthält, läßt sich umgekehrt auch zur Charakterisierung der rechts- bzw. linksregulären Funktionen verwenden. Er umfaßt verschiedene bereits bekannte Sätze, z. B. die Integralsätze von Fueter [*Commentarii Math. Helvet.* **10** (1938), dies. Zbl. **19**, 174]. — Besitzt die Algebra ein Einselement, so kann man gerichtete Ableitungen definieren und eine Funktion rechts- bzw. links monogen nennen, wenn die Ableitung in jedem Punkt des Bereiches richtungsunabhängig ist. Ist  $A$  überdies noch kommutativ, so ist die Monogenität notwendig und hinreichend für das Bestehen eines Integralsatzes vom Cauchyschen Typus, wie für spezielle Algebren schon verschiedentlich festgestellt worden ist. — Der dritte Teil bestimmt den Gültigkeitsbereich der Cauchyschen Integralformel in der Algebra von Sobrero [*Memorie R. Accad. Italia* **6** (1934), dies. Zbl. **11**, 136]. Diese wurde von Sobrero nur unter sehr einschränkenden Voraussetzungen bewiesen.

*Ernst Trost.*

**Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:**

**Conti, Roberto:** *Un teorema di confronto per le equazioni alle differenze finite, lineari, del 2° ordine.* *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **6**, 208—213 (1951).

Si considerino le due equazioni alle differenze finite del secondo ordine, lineari, omogenee

(1)  $\Delta[\theta(x)\Delta y(x)] - Q(x)y(x+h) = 0$ , (2)  $\Delta[\theta_1(x)\Delta z(x)] - Q_1(x)z(x+h) = 0$ , dove  $h$  è una costante positiva assegnata e  $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ . Se  $Q(x)$  e  $Q_1(x)$  sono definite in  $(a, b)$  e  $\theta(x)$ ,  $\theta_1(x)$  in  $(a, b+h)$  e ivi positive; se  $y(x)$  e  $z(x)$  sono due qualsiasi soluzioni delle equazioni proposte, se  $z(x)z(x+h) \neq 0$ , allora per la funzione

$$\varphi(x) = \theta(x)y(x)\Delta y(x) - \theta_1(x)\Delta z(x)[y(x)]^2/z(x)$$

vale la relazione (analogia all'identità di Picone per le equazioni differenziali)

$$\Delta\varphi(x) = [Q(x) - Q_1(x)][y(x+h)]^2 + [\theta(x) - \theta_1(x)][\Delta y(x)]^2 + \theta_1(x)[z(x)\Delta y(x) - y(x)\Delta z(x)]/z(x)z(x+h).$$

Da questa segue il seguente teorema di confronto tra le equazioni (1) e (2): Se  $y(x)$  e  $z(x)$  sono due soluzioni continue delle (1) e (2) per  $\alpha \leq x \leq \beta = \alpha + nh$ ,  $n$  intero,  $n \geq 3$ , se  $y(x)$ ,  $z(x)$  sono linearmente indipendenti nell'insieme dei punti  $x = \alpha + ih$ , ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) e soddisfano le condizioni

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0; \lim_{x \rightarrow \alpha+0} y^2(x)/z(x) = \lim_{x \rightarrow \beta-0} y^2(x)/z(x) = 0; y(\alpha + ih) = 0$$

per  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ; se  $\theta(x)$ ,  $\theta_1(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $Q_1(x)$  sono continue in  $(\alpha, \beta)$  e  $Q(\alpha + ih) \geq Q_1(\alpha + ih)$ ,  $\theta(\alpha + ih) \geq \theta_1(\alpha + ih) > 0$ , per  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , esiste allora almeno un punto interno all'intervallo  $(\alpha, \beta)$  ove la  $z(x)$  si annulla.

*Giovanni Sansone.*

**Hahn, Wolfgang:** *Über die Reduzibilität einer speziellen geometrischen Differenzengleichung.* *Math. Nachr.* **5**, 347—354 (1951).

Colle denotazioni del lavoro precedente (questo Zbl. 38, 50) sia

$$(I) \quad {}_n\Phi_\lambda(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \prod_{r=1}^n \frac{(1-a_r)_{\lambda+j}}{(1-b_r)_{\lambda+j}} x^{\lambda+j}$$

dove  $\lambda$  è un parametro arbitrario e il simbolo  $(1-x)_s$  ha il significato  $(1-x)_s = \prod_{t=0}^{\infty} \frac{1-xq^t}{1-xq^{s+t}}$ . — L'A. dimostra ora che condizione necessaria e sufficiente perchè

la serie (I) soddisfi ad un'equazione alle differenze geometriche al massimo di ordine  $n-1$  a coefficienti razionali in  $x$  è che il rapporto  $a_i/b_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) sia uguale ad una potenza di  $q$  con esponente intero non negativo. — Tale equazione risulterà non omogenea se  $j = n$  e  $a_i = q^k$ ,  $k > 0$ , e omogenea negli altri casi. — Viene anche considerato il caso che il rapporto  $a_i/b_j$  sia uguale a  $q^{-k}$  con  $k$  intero positivo: in questo caso la (I) possiede una soluzione formata dal prodotto di un polinomio per una potenza di  $x$ , e le altre soluzioni soddisfano ancora ad un'equazione alle differenze geometriche di ordine minore di  $n$ , ma in generale con coefficienti trascendenti nella variabile  $x$ . Giovanni Sansone.

**Saltykow, N.:** Recherches sur l'ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 213—226 (1951).

Si le système d'équations différentielles

$$(*) \quad f_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_{2i})}; y_2, \dots, y_2^{(m_{2i})}; \dots; y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_{ni})}) = 0, \quad (i = 1, \dots, n)$$

est résoluble par rapport aux dérivées d'ordre supérieur des fonctions inconnues, il est connu que l'ordre du système est égal à la somme de ces ordres. L'A. montre que, les équations (\*) étant compatibles et irréductibles par différentiation, l'ordre de leur système est défini par la somme  $\sum \mu_{ii}$ , où les  $\mu_{ii}$  désignent les ordres supérieurs des dérivées des fonctions inconnues par rapport auxquelles les équations (\*) sont résolubles; il faut de plus que l'un au moins des  $\mu_{ii}$  soit égal au nombre correspondant  $m_{ii}$  de (\*). Quelques applications sont traitées. Charles Blanc.

**Mitrinovich, Dragoslav S.:** Sur une équation différentielle indéterminée du second ordre. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 227—228 (1951).

Proposta per l'integrazione l'equazione differenziale indeterminata (E)  $F''/F = \lambda f''/f$  in cui  $f$  ed  $F$  sono due funzioni incognite di una variabile  $x$  e  $\lambda$  è un parametro arbitrario, l'A. sostituisce ad  $f, F$  la coppia di funzioni  $g, G$  tali che  $g = f'/f$ ,  $G = F'/F$ . Allora la (E) diventa  $(G - \lambda g)' + G^2 - \lambda g^2 = 0$  e quindi  $\theta' + G^2 - \lambda g^2 = 0$  avendo posto  $\theta = G - \lambda g$ . Le funzioni  $g$  e  $G$  restano allora determinate in termini della funzione arbitraria  $\theta$  attraverso le formule

$$g = (-\lambda \theta \pm \sqrt{\Delta})/(\lambda(\lambda - 1)), \quad G = (-\theta \pm \sqrt{\Delta})/(\lambda - 1)$$

essendo  $\Delta = \lambda \theta^2 + (\lambda - \lambda^2) \theta'$ .

Giovanni Lampariello.

**Wintner, Aurel:** On the nonexistence of conjugate points. Amer. J. Math. 73, 368—380 (1951).

Verschiedene Oszillationseigenschaften der Lösungen von (1)  $x'' + f(t)x = 0$  werden auf folgendes Kriterium zurückgeführt: Notwendig und hinreichend dafür, daß (1) keine Lösung mit mehr als einer Nullstelle in einem gegebenen Intervall  $I$  habe, ist, daß (2)  $y' + y^2 \leq -f(t)$  durch eine nebst ihrer Ableitung in  $I$  stetige Funktion  $y$  befriedigt werden kann. U. a. kann man hieraus bekannte Kriterien von Liapounoff und Kneser herleiten. Ein Ergebnis anderer Art ist z. B.:

(1) hat keine Lösung  $\in L^2(0, \infty)$ , wenn  $\int_t^\infty f(t) dt = o(t^{-1})$  gilt. Göran Borg.

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** On an oscillation criterion of Liapounoff. Amer. J. Math. 73, 885—890 (1951).



Es sei  $r(t) > 0$  und stetig im offenen Intervall  $(0, T)$ . Es wird bewiesen: Wenn  $q(t)$  im abgeschlossenen Intervall  $[0, T]$  stetig ist und

$$\int_{+0}^{T-0} r(t) |q(t)| dt \leq T \inf_{0 < t < T} \left\{ \frac{r(t)}{t(T-t)} \right\}$$

gilt, so gibt es keine Lösung der Differentialgleichung  $x'' + q(t)x = 0$  mit mehr als einer Nullstelle in  $[0, T]$ . Weiter: Die Behauptung ist mit jeder Funktion  $r(t)$  falsch, wenn das rechte Glied der Ungleichung um  $\varepsilon$  vergrößert wird. — Das Ergebnis ist eine Verallgemeinerung einer Ungleichung von Beurling (vgl. z. B. Borg, dies. Zbl. 31, 306).

Göran Borg.

Miller, Kenneth S.: The onesided Green's function. J. appl. Phys. 22, 1054—1057 (1951).

With many problems in engineering (particularly in network theory) there are associated one-point boundary conditions and the solutions are generally of interest in a infinite time interval  $[a, \infty)$ . For problems of this kind a more convenient function to use than the classical Green's function  $G(x, \zeta)$  is a function which the author calls the „one-sided“ Green's function. Let  $L = p_0(x)(d^n/dx^n) + p_1(x)(d^{n-1}/dx^{n-1}) + \dots + p_n(x)$  be a linear differential operator whose coefficients  $p_i(x)$  are real continuous functions in the interval  $J: [a, \infty)$  and  $p_0(x) > 0$ . The one-sided Green's function of  $L$  is any real function  $H(x, \zeta)$  of two real variables  $x$  and  $\zeta$  such that 1.  $H$  is continuous in both variables simultaneously and the first  $n$  derivatives with respect to  $x$  are continuous,

$$2. \frac{\partial^\alpha H(x, \zeta)}{dx^\alpha} \Big|_{x=\zeta} = 0 \text{ for } \alpha = 0, 1, \dots, n-2, \quad 3. \frac{\partial^{n-1} H}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\zeta} = \frac{1}{p_0(\zeta)}, \quad 4. LH(x, \zeta)$$

$= 0$ . There is given the construction of  $H$ .  $H(x, \zeta)$  possesses the following properties: 1° it is unique, 2° if  $f(x)$  is any real continuous function in  $J$  then

$$u(x) = \int_a^x H(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta \text{ satisfies } Lu(x) = f(x) \text{ and } u^{(\alpha)}(a) = 0, \alpha = 0, 1, \dots, n-1,$$

3° when the function  $H$  is known, then  $n$  linearly independent solutions of  $Lu = 0$  can be explicitly written in terms of  $H$ .

Jerzy Górski.

Miller, Kenneth S.: A Sturm-Liouville problem associated with iterative methods. Ann. of Math., II. Ser. 53, 520—530 (1951).

Wie in seiner früheren Note (dies. Zbl. 40, 44) beschäftigt sich Verf. mit der Lösung des inhomogenen Randwertproblems

$$(1) \quad \begin{aligned} M u &\equiv u^{(n-2)} + s_4(x) u^{(n-4)} + \dots + s_n(x) u = 0 \quad (0 \leq x \leq c), \\ U_\alpha(u) &\equiv \sum_{i=0}^{n-3} \{A_{\alpha i} u^{(i)}(0) + B_{\alpha i} u^{(i)}(c)\} = C_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-2) \end{aligned}$$

durch Iterationsverfahren. Die Koeffizienten von  $M$  werden aus  $C^2$ , das homogene System als unlösbar vorausgesetzt. Im Gegensatz zu seinem l. c. mitgeteilten Verfahren werden hier keine zusätzlichen Forderungen an Randbedingungen und Länge des Intervalls nötig. — Verf. bildet mit vorerst willkürlichem stetigen  $f(x)$  die Operatoren  $P = d^2/dx^2 + f(x)$  und  $N = PM$ . Es lassen sich zwei zusätzliche

$$\text{Randbedingungen } U_\alpha(u) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \{A_{\alpha i} u^{(i)}(0) + B_{\alpha i} u^{(i)}(c)\} = C_\alpha \quad (\alpha = n-1, n)$$

derart wählen, daß das homogene Problem  $Nw = 0$ ,  $U_\alpha(w) = 0$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) unlösbar ist und, falls  $N^{-1}v = z$  die Lösung von  $Nz = v$ ,  $U_\alpha(z) = 0$

( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) bedeutet,  $u(x) = Tv(x) \equiv MN^{-1}v(x) \equiv \int_0^c F(x, \zeta) v(\zeta) d\zeta$  ein

Integraloperator mit reellem stetigen symmetrischen Kern wird. Ist dann die Ausgangsfunktion  $u_0(x)$  mit  $U_\alpha(u_0) = C_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) aus der Klasse  $C^n$ , wird gebildet  $\varepsilon_m(x) = Mu_m(x)$ ,  $\Delta_m(x) = N^{-1}\varepsilon_m(x)$ ,  $u_{m+1}(x) = u_m(x) + \Delta_m(x)$

( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), so hat man stets  $U_\alpha(u_m) = C_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ),  $\varepsilon_{m+1}(x) = (1 + T)\varepsilon_m(x)$ . Nun erweist sich  $T$  als inverser Operator zu  $P$  mit gewissen selbstadjungierten Randbedingungen. Nach spezieller Wahl von  $f(x)$  läßt sich daher zeigen, daß  $u_0(x)$  so angesetzt werden kann, daß  $\varepsilon_0(x) = \sum_{i=q}^{\infty} a_i \psi_i(x)$  wird, wo  $\psi_i(x)$  ( $i \geq q$ ) Eigenfunktionen von  $T$  zu Eigenwerten  $\lambda_i$  mit  $-2 < \lambda_i < 0$  sind. Dann konvergiert die Folge der  $u_m(x)$  gleichmäßig gegen die Lösung  $u(x)$  von (1).

Friedrich Wilhelm Schäfke.

**Amerio, Luigi:** Sull'estensione delle nozioni di „colle“, „nodo“ e „fuoco“ ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche in tre variabili. I. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 206—212, 289—297 (1951).

Etant donné le système (1)  $x' = X(t, x, y)$ ,  $y' = Y(t, x, y)$  où  $X$  et  $Y$  sont des fonctions analytiques réelles de  $(x, y)$  pour  $(x, y) \in H$ , ouvert du plan, et pour  $-\infty < t < +\infty$ , et sont des fonctions continues périodiques de période  $T$  de  $t$ , ainsi que toutes leurs dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$ , l'A. étudie le comportement des intégrales du système au voisinage des solutions périodiques de période  $T$ . Si  $x^*, y^*$  est une telle solution, on peut se ramener au cas où  $x^* = 0$ ,  $y^* = 0$ . On a alors  $X(t, 0, 0) = 0$ ,  $Y(t, 0, 0) = 0$ . Une transformation classique ramène au cas  $x' = \bar{X} = A x + B y + \varphi(t, x, y)$ ,  $y' = \bar{Y} = C x + D y + \psi(t, x, y)$  où  $A, B, C, D$  sont des constantes réelles et

$$\varphi(t, 0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, 0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, 0, 0) = 0; \quad \psi(t, 0, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, 0, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(t, 0, 0) = 0.$$

On suppose  $\Delta = AD - BC \neq 0$ , et on pose  $\lambda = \frac{1}{2}(A + D)$ . On distingue les cas:  $\Delta < 0$  (type col),  $\lambda^2 \geq \Delta > 0$  (type noeud),  $\lambda^2 < \Delta$  (type foyer). Le système transformé est celui des caractéristiques de (3):  $\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \bar{X} - \bar{Y} = 0$ . L'axe des  $t$  est une des caractéristiques de (3). On cherche s'il y a des surfaces intégrales de (3),  $y = y(t, x)$ , analytiques en  $x$  et périodiques de période  $T$  en  $t$ , et passant par l'axe des  $t$  (surfaces principales). L'A. montre qu'il n'y en a aucune dans le cas du foyer, qu'il y en a exactement 2 dans le cas du col et au moins une dans le cas du noeud. Dans le cas du col, les surfaces principales ne sont jamais traversées par les intégrales du système, et il existe un cylindre de révolution d'axe  $0t$  et de rayon assez petit pour que les intégrales qui y ont un point et appartiennent à l'une des surfaces principales soient asymptotes à  $0t$  (pour  $t \rightarrow +\infty$  pour une des surfaces et  $t \rightarrow -\infty$  pour l'autre). Dans les cas du noeud ou du foyer, la projection des intégrales sur un plan perpendiculaire à  $0t$  présente les dispositions classiques du noeud et du foyer pour un système du type  $x' = X(x, y)$ ,  $y' = Y(x, y)$ .

André Revuz.

**Prodi, Giovanni:** Nuovi criteri di stabilità per l'equazione  $y'' + A(x)y = 0$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 447—451, 11, 30—34 (1951).

G. Ascoli (questo Zbl. 12, 405) ha dimostrato che se i)  $A(x)$  è continua positiva in  $(x_0, \infty)$  e l'equazione (1)  $u'' + A(x)u = 0$  ha tutti i suoi integrali limitati, ii) se  $Q(x)$  è continua e assolutamente integrabile in  $(x_0, \infty)$ , allora anche l'equazione — (2)  $y'' + [A(x) + Q(x)]y = 0$  — ha tutti i suoi integrali limitati in  $(x_0, \infty)$ . — Se alla condizione ii) si sostituiscono le seguenti condizioni: detto con  $H(x, \xi)$  l'integrale della (1) che per  $x = \xi$  si annulla e la sua derivata prima è uguale a  $-1$ , risulta

$$\left| \int_{x_0}^x Q(\xi) H(x, \xi) u(\xi) d\xi \right| < \infty,$$

$$\int_{x_0}^x \left| Q(\eta) \int_{\eta}^x Q(\xi) H(x, \xi) H(\xi, \eta) d\xi \right| d\eta < k < 1, \quad (k \text{ cost.}),$$



l'A. prova che gli integrali della (2) restano ancora tutti limitati. L'A. dà pure un secondo criterio che assicura la limitatezza di tutti gli integrali dell'equazione (2), e stabilisce infine il seguente teorema per la (1). Se: (i)  $A(x)$  è continua e a variazione limitata in ogni intervallo finito; (ii) esistono due costanti positive  $d$  ed  $L$  tali che  $d \leq A(x) \leq L$ ;

$$(iii) \quad \left| \int_{x_0}^x e^{2i\tau(\xi)} d \log A(\xi) \right| < \infty, \quad \tau(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{A(\xi)} d\xi,$$

$$(iiii) \quad \frac{1}{2\sqrt{A(x)}} \int_{x_0}^x \left| \int_{\eta}^x \cos(\tau(\xi) - \tau(x)) \cos(\tau(\eta) - \tau(\xi)) d \log A(\xi) \right| d\sqrt{A(\eta)} < k < 1,$$

( $k$  costante), allora tutti gli integrali della (1) sono limitati. *Giovanni Sansone.*

**McLachlan, N. W.:** Application of Mathieu's equation to stability of non-linear oscillator. *Math. Gaz.* **35**, 105—107 (1951).

Stabilitätsuntersuchung der periodischen Lösung  $x_p$  der Differentialgleichung  $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)x + ax = 0$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon^2 \ll a$ ) durch Entwicklung von  $x$  und  $a$  nach Potenzen von  $\varepsilon$  mit periodischen Koeffizienten und Aufstellen der Differentialgleichung für  $x - x_p$ . Diese läßt sich für kleine  $\varepsilon^2/a$  auf eine Mathieusche Differentialgleichung transformieren und aus ihrer Stabilitätskarte kann man auf die Stabilität von  $x_p$  schließen. *Josef Meixner.*

**Minorsky, Nicolas:** Sur le pendule entretenu par un courant alternatif. *C. r. Acad. Sci., Paris* **233**, 728—729 (1951).

In den Differentialgleichungen (DGL.)  $d[L(\vartheta)i]/dt + zi = E \sin \omega t$ ,  $I\ddot{\vartheta} + D\dot{\vartheta} + C\vartheta = -d[\frac{1}{2}L(\vartheta)i^2]/dt$  wird für  $L(\vartheta)$  (die Selbstinduktion) der Ansatz  $L(\vartheta) = L_0 - \alpha_2\vartheta^2 + \alpha_4\vartheta^4$  gemacht, wobei  $\alpha_2/L_0$  und  $\alpha_4/L_0$  klein gegenüber 1 seien. Die erste Gleichung wird durch den Ansatz  $i = i_0 \cos \omega t + i_2 \cos(\omega + 2\Omega)t + i_2' \cos(\omega - 2\Omega)t + i_4 \cos(\omega + 4\Omega)t + \dots$  gelöst, wobei die Glieder mit  $i_4, i_4', \dots$  als von höherer Ordnung klein unterdrückt werden. Dieser Ausdruck für  $i$  ergibt beim Einsetzen in die zweite DGL. für  $\vartheta$  eine Gl. der Form  $\ddot{\vartheta} + b\dot{\vartheta} + \vartheta - e\vartheta^3 + (a + c\vartheta^2)\vartheta \cos 2\tau = 0$ , wobei  $\tau = \Omega t$  eine neue unabhängige Veränderliche ist. Diese Gl. war in einer früheren Note des Verf. (dies. Zbl. **42**, 99) untersucht worden, so daß die Ergebnisse wie z. B. vom Vorhandensein einer stabilen periodischen Lösung usw. übernommen werden können. Auch der Fall, daß  $L(\vartheta)$  die Form  $L_0 + \alpha_1\vartheta + \alpha_3\vartheta^3$  hat, läßt sich ähnlich behandeln.

*Lothar Collatz.*

**Reuter, G. E. H.:** On certain non-linear differential equations with almost periodic solutions. *J. London math. Soc.* **26**, 215—221 (1951).

Für die Differentialgleichung (1)  $\ddot{x} + k f(x)\dot{x} + g(x) = k p(t)$  sollen  $k > 0$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $p(t)$  stetig sein; setzt man  $F(x) = \int_0^x f(u) du$ ,  $G(x) = \int_0^x g(u) du$ ,

$P(t) = \int_0^t p(u) du$ , so soll gelten:  $f(x) > 0$  für alle  $x$ ,  $F(x) \cdot \text{sign } x \rightarrow \infty$  für

$|x| \rightarrow \infty$ ;  $xg(x) > 0$  für  $x \neq 0$ ,  $G(x) \rightarrow \infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$ ;  $P(t)$ ,  $p(t)$  sind beschränkt für  $t \geq 0$ . Unter diesen Voraussetzungen zeigte Verf. (dies. Zbl. **42**, 94) die Existenz zweier von  $k$  unabhängiger Konstanten  $x_0$ ,  $v_0$ , derart daß jede Lösung  $x(t)$  für hinreichend große  $t$  ( $t \geq t_0$ ) (2)  $|x(t)| \leq x_0$ ,  $|\dot{x}(t)| \leq v_0$  erfüllt. Hier wird noch angenommen:  $g'(x) > 0$  und  $g''(x)$  existieren und sind beschränkt für  $|x| \leq x_0$ . Dann wird bewiesen: I. Für  $k$  oberhalb einer bestimmten Konstante  $k_0$  gilt für je zwei Lösungen  $x_1, x_2$ :  $x_2(t) - x_1(t) \rightarrow 0$ ,  $\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . — Die Methode des Beweises läßt sich ausgestalten zur Herleitung von: II. Sei (1) mit zwei verschiedenen Funktionen  $p(t) = p_1(t)$ ,  $p(t) = p_2(t)$  vorgelegt, und sind in beiden Fällen die Voraussetzungen für I gegeben, so lassen sich  $x_0$ ,  $v_0$ ,  $k_0$  für

beide gemeinsam wählen. Sei dann  $k > k_0$ , so gibt es eine Konstante  $M > 0$ , von  $\varepsilon$  unabhängig, derart daß  $|p_2(t) - p_1(t)| < \varepsilon$  nach sich zieht  $|x_2(t) - x_1(t)| < M\varepsilon$ ,  $|\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)| < M\varepsilon$  für  $t \geq t_1(t_0, \varepsilon)$ , wenn  $x_1$  bzw.  $x_2$  jeweils zur Differentialgleichung (1) mit  $p_1$  bzw.  $p_2$  gehören und für  $t \geq t_0$  beide (2) erfüllen. — Hieraus fließt unter Benutzung eines Resultats von M. Fréchet [Revue sci. **79**, 341—354 (1941)] über asymptotisch fastperiodische Funktionen das Hauptergebnis der Note: III. Ist  $p(t)$  glm. fastperiodisch und  $k > k_0$ , so konvergieren alle Lösungen von (1) gegen eine glm. fastperiodische Lösung  $\alpha(t)$ , die eine ebenfalls glm. fastperiodische Ableitung  $\dot{\alpha}(t)$  besitzt. — Ergänzend läßt sich leicht zeigen: IV. Die Lösung  $\alpha(t)$  von III besitzt denselben Modul wie  $p(t)$ . Dabei wird unter dem Modul einer fastperiodischen Funktion  $\alpha(t) \sim \sum a_n e^{i\lambda_n t}$  ( $a_n \neq 0$ ) die Gesamtheit der endlichen Linearkombinationen der  $\lambda_n$  mit ganzzahligen Koeffizienten verstanden. — Dies sind weitgehende Verallgemeinerungen der Sätze über periodische Lösungen von (1) bei periodischem  $p(t)$  (M. L. Cartwright, J. E. Littlewood, dies. Zbl. **29**, 126, Verf., loc. cit.).

Friedrich Wilhelm Schäfke.

Cashwell, E. D.: The asymptotic solutions of an ordinary differential equation in which the coefficient of the parameter is singular. Pacific J. Math. **1**, 337—352 (1951).

Verf., ein Schüler von Langer, sucht asymptotische Lösungen in  $\lambda$  von (1)  $w''(s) - (\lambda^2 \sigma(s) + \tau(\lambda, s)) w(s) = 0$ .  $\lambda$  liege in einem Bereich  $A$ , der den unendlich fernen Punkt der  $\lambda$ -Ebene enthält.  $s$  sei auf einen Bereich  $R_s$  der komplexen  $s$ -Ebene beschränkt. In  $R_s$  habe  $\sigma(s)$  genau einen Pol zweiter Ordnung in  $s_0$  und  $\tau(s)$  in demselben Punkte einen Pol erster oder zweiter Ordnung. Der Hauptteil von  $\tau$  sei von  $\lambda$  unabhängig.  $\sigma(s)$  verschwindet nirgends in  $R_s$ . Diese Arbeit ist eine Erweiterung der Untersuchung von Langer, der für  $\sigma$  eine Darstellung  $\sigma = \psi(s)/(s - s_0)^v$  mit  $v < 2$  und regulärem  $\psi(s)$  (dies. Zbl. **11**, 301) oder ein Verschwinden von  $\sigma$  (dies. Zbl. **5**, 158) zuläßt. Es wird ein Funktionenpaar angegeben, das einer Differentialgleichung genügt, die sich nur wenig von einer zu (1) äquivalenten Gleichung (2) unterscheidet. Die Lösungen von (2) genügen einer Volterra'schen Integralgleichung, deren Kern und inhomogener Bestandteil aus dem erwähnten Funktionenpaar aufgebaut ist. Die Konvergenz ihrer Neumannschen Reihe wird für verschiedene Winkelräume einer Funktion von  $\lambda$  getrennt mit funktionentheoretischen Mitteln für hinreichend große  $|\lambda|$  bewiesen.

Wolfhart Haacke.

Seifert, George: A third order boundary value problem arising in aeroelastic wing theory. Quart. appl. Math. **9**, 210—218 (1951).

Im ersten Teil der Arbeit betrachtet der Verf. das homogene Randwertproblem (1)  $u'''(x) + p(x)u'(x) + [q(x) + \lambda]u(x) = 0$  mit  $u(0) = u'(0) - u''(1) = 0$  ( $p, q$  reellwertig und analytisch in  $0 \leq x \leq 1$ ). Er zeigt 1., daß unendlich viele reelle Eigenwerte existieren [genauer: es gibt eine reelle Zahl  $\lambda_k$  so, daß alle Eigenwerte  $\lambda_n$  mit  $\Re(\lambda_n) > \lambda_k$  reell sind] und 2., daß, wenn die Schranken für  $|p|$  und

$|q|$ , ferner die Zahlen  $|p(1)|$  und  $\int_0^1 |q(x) - p'(x)| dx$  genügend klein sind, alle

Eigenwerte von (1) reell ausfallen. Im zweiten Teil wird eine Transformation angegeben, die das Problem (2)  $[f(t)y''(t)]' + \lambda g(t)y(t) = 0$  mit  $y(0) = y'(0) - y''(1) = 0$  ( $f, g > 0$ , reell, analytisch in  $0 \leq t \leq 1$ ) in eine Aufgabe der Gestalt (1) überführt. Das zu (2) adjungierte Problem hat wichtige Anwendungen bei gewissen aeroelastischen Problemen.

Karl Maruhn.

Rapopot, I. M.: Über ein singuläres Randwertproblem für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 21—24 (1951) [Russisch].

The author proves the Parseval equality for the expansion associated with a self-adjoint fourth-order ordinary differential equation over the interval  $(0, \infty)$ .



The method appears to hold for self-adjoint equations of arbitrary even order, and is based on the author's work on the asymptotic behaviour of solutions (this Zbl. 42, 329). Also given, but without proof, is a set of conditions for the spectrum to be discrete or continuous.

Frederick V. Atkinson.

Vasil'eva, A. B.: Über die Differentiation der Lösungen von Differentialgleichungen, die einen kleinen Parameter enthalten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 61, 597—599 (1948) [Russisch].

Vasil'eva, A. B.: Über die Differentiation der Lösungen von Systemen von Differentialgleichungen, die einen kleinen Parameter enthalten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 75, 483—486 (1950) [Russisch].

Vasil'eva, A. B.: Über die Differentiation der Lösungen von Systemen von Differentialgleichungen nach dem größten der kleinen Parameter. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 781—784 (1951) [Russisch].

In der ersten dieser Arbeiten werden Ergebnisse über die Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen

$$(1a) \quad \bar{x}'(t) = \bar{f}(t, \bar{x}, z)$$

$$(1b) \quad \lambda z'(t) = F(t, \bar{x}, z)$$

für den Fall  $\lambda > 0$  und den Fall  $\lambda = 0$  mitgeteilt [vgl. A. N. Tichonov, dies. Zbl. 37, 344 und Mat. Sbornik, n. Ser. 27 (69), 147—156 (1950)]; dabei bedeuten  $\bar{x}$ ,  $\bar{f}$  Vektoren mit den Komponenten  $x_1, \dots, x_n$  und  $f_1, \dots, f_n$ . Die rechten Seiten von (1) sollen stetig und für  $0 < \lambda < \lambda_0$  so beschaffen sein, daß durch jeden Punkt  $t_0, \bar{x}_0, z_0$  eines gewissen Bereiches genau eine Integralkurve  $\bar{x} = \bar{x}(t, \lambda)$ ,  $z = z(t, \lambda)$  des Systems (1) geht. Ferner soll die Gleichung  $F(t, \bar{x}, z) = 0$  eine stetige Lösung  $z = \varphi(t, \bar{x})$  mit  $z_0 = \varphi(t_0, \bar{x}_0)$  haben (in der zweiten Arbeit wird wohl mit Recht mehr verlangt, nämlich daß  $\varphi$  beschränkte partielle Ableitungen haben soll). Schließlich soll  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  Lösung von  $\bar{x}'(t) = \bar{f}(t, \bar{x}, \varphi(t, \bar{x}))$  mit  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$  sein. Die angekündigten Sätze lauten: I. Wenn  $\bar{f}(t, \bar{x}, z)$   $(m-1)$ -mal und  $F(t, \bar{x}, z)$   $m$ -mal (stetig?) differenzierbar und  $F_z(t, \bar{x}, \varphi(t, \bar{x})) < 0$  ist, so ist

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{x}^{(m)}(t, \lambda) = \bar{x}^{(m)}(t), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} z^{(m)}(t, \lambda) = \frac{d^m}{dt^m} \varphi(t, \bar{x}(t)).$$

II. Durch formale Differentiation nach  $\lambda$  erhält man aus (1) ein Differentialgleichungssystem für  $\eta(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \bar{x}(t, \lambda)$  und  $u(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} z(t, \lambda)$ . Setzt man in diesem System  $\lambda = 0$ , so ergibt sich durch Elimination von  $u$  ein Differentialgleichungssystem für eine Funktion  $\eta = \bar{\eta}(t)$  mit bestimmten Anfangswerten. Haben  $\bar{f}(t, \bar{x}, z)$ ,  $F(t, \bar{x}, z)$  stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, erfüllt  $F_z$  in bezug auf alle Veränderliche eine Hölder-Bedingung, und ist wieder  $F_z(t, \bar{x}, \varphi(t, \bar{x})) < 0$ , so ist

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \eta(t, \lambda) = \bar{\eta}(t), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} u(t, \lambda) = \bar{u}(t).$$

In den beiden anderen Arbeiten werden entsprechende Tatsachen für Systeme (1) mitgeteilt, bei denen die eine Gleichung (1b) durch ein System von mehreren Gleichungen ersetzt ist und statt des einen Parameters  $\lambda$  mehrere vorkommen.

Erich Kamke.

El'sin, M. I.: Über die Phasentrajektorien der Bewegung eines Pendels. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 4 (44), 152—154 (1951) [Russisch].

Tricomi (ce Zbl. 6, 55) a discuté, suivant les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  (avec la restriction  $\beta \leq 1$ ) l'allure des trajectoires du point  $\theta = \theta(t)$ ,  $z = z(t)$  du plan  $\theta, z$ , avec:  $d\theta/dt = z$ ;  $dz/dt + \alpha z + \sin \theta = \beta$ . L'A.: 1) fait connaître une propriété qualitative des solutions de certains systèmes différentiels, 2) montre que son résultat permet d'analyser le cas  $\beta > 1$ , laissé de côté par Tricomi.

Julien Kravtchenko.

**Rubinštejn, L. I.:** Die Wärmeausbreitung in einem aus zwei Phasen bestehenden Medium bei zylindrischer Symmetrie. Doklady Akad. Nauk SSSR. n. Ser. 79, 945—948 (1951) [Russisch].

L'A. considère un problème analogue à celui qu'il a résolu récemment dans le cas linéaire (ce Zbl. 32, 131). Dans le cas actuel la substance fondante remplit un cylindre de révolution, et la température aux points à la distance  $x$  à l'axe de ce cylindre est une fonction de  $x$  et du temps  $t$  seulement. On désigne par  $y(t)$  la distance à cette axe de la surface cylindrique, séparant les états particuliers au moment  $t$ . La recherche de la distribution de la température dans cette substance se ramène à la résolution d'un système d'équations

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad y(t) < x < 1; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad 0 < x < y(t);$$

les fonctions  $u_i(x, t)$  ( $i = 1, 2$ ), qui expriment les températures (les index 1 et 2 correspondant aux états particuliers), sont assujetties à satisfaire aux conditions initiales  $u_i(x, 0) = \varphi_i(x)$  ( $\varphi_i(y(0)) = 0$ ), et aux conditions aux limites:

$$u_1(1, t) = f(t), \quad u_2(y(t), t) = 0, \quad y'(t) = \frac{\partial}{\partial x} u_1(y(t), t) - \frac{\partial}{\partial x} u_2(y(t), t).$$

Ce problème aux limites se ramène à son tour à un système de 4 équations intégrales à 4 fonctions inconnues  $v_0(t) = u_1(1, t)$ ,  $v_i(t) = u_i(y(t), t)$ ,  $i = 1, 2$ , et  $y(t)$ , les 3 équations de ce système étant non linéaires par rapport à  $y(t)$ . — L'A. démontre l'existence d'une solution de ce système et, son unicité, en appliquant la méthode des approximations successives. *M. Krzyżanski.*

**Luzin, N. N. und P. I. Kuznecov:** Zur absoluten Invarianz und zur Invarianz bis auf  $\varepsilon$  in der Theorie der Differentialgleichungen. III. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 325—327 (1951) [Russisch].

**Castro Brzezicki, A. de:** Untersuchung und Lösung der Differentialgleichung  $xy'' + ny' + axy = 0$ . Gaceta mat., I. Ser. 3, 153—155 (1951) [Spanisch].

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

● **Schwank, F.:** Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis für Physiker, Mathematiker und Ingenieure. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1951. VI, 406 S., 147 Abb. DM. 22,80.

Lo scopo di questo libro è di esporre le idee e i metodi fondamentali dell'Analisi matematica a coloro che intendono servirsene per la risoluzione dei problemi della Fisica teoria e tecnica. Lontano dalla mente dell'A. è il proposito di discutere questioni di esistenza e di unicità della soluzione soddisfacente al complesso delle condizioni assegnate. Il libro fornisce gli strumenti di calcolo necessari per risolvere i problemi e bisogna dire che lo scopo è raggiunto con notevole abilità. Ricca è la bibliografia che permette allo studioso di prenoer contatto sia con i lavori originali sia con le opere specializzate di più ampia portata. Nel 1° Cap. domina il problema delle piccole oscillazioni di una corda da cui sorgono, con è ben noto, le idee fondamentali su cui si sviluppano i metodi generali per la risoluzione dei problemi al contorno nella teoria delle equazioni alle derivate pazziali. — Il Cap. 2° contiene i principi della teoria delle funzioni (analitiche) di variabile complessa con particolare riguardo alla rappresentazione conforme e all'integrale di Cauchy. — Nel Cap. 3° sono discussi i principali problemi della teoria del potenziale, delle onde, della conduzione del calore e le piccole oscillazioni di una membrana e di una piastra. — Il Cap. 4° contiene i principi della teoria della equazioni integrali. L'A. fa numerose applicazioni dei metodi generali ad esempi concreti ricavati dai vari rami della Fisica. Questa trattazione è veramente utile per coloro che vogliono acquistare la tecnica della risoluzione delle equazioni integrali. — Infine i Capp. 5° e 6° sono dedicati al calcolo delle variazioni e al calcolo delle differenze i cui principi sono bene illustrati da problemi che più interessano le applicazioni. *Giovanni Lampariello.*

**Couchet, Gerard:** Sur l'équation complètement intégrable  $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ . Revue sci. 89, 120—122 (1951).



L'A. étudie l'allure des surfaces intégrales de l'équation complètement intégrable  $P dx + Q dy + R dz = 0$  autour d'un point singulier où  $P = Q = R = 0$ . Il établit les faits suivants: si, le vecteur  $V(P, Q, R)$  étant nul au point considéré, son rotationnel est  $\neq 0$  et le jacobien de  $(P, Q, R)$  nul de rang 2, alors les surfaces  $P = 0$ ,  $Q = 0$  et  $R = 0$  se coupent suivant une courbe  $\Gamma$ ; en outre, les sections des surfaces intégrales par un plan perpendiculaire à  $\Gamma$  en un point, présentent en ce point les mêmes singularités que les courbes intégrales de l'équation  $P dx + Q dy = 0$ .

Charles Blanc.

**Bol, Gerrit:** Alternierende Formen und halbinvariante Differentiation. Math. Z. 54, 141—159 (1951).

In relazione ad una denormalizzazione  $x^* = \varrho(u, v) x(u, v)$  delle coordinate proiettive omogenee  $x$  e ad uno pfaffiano  $\pi$  tale che  $\pi^* = \pi - d \log \varrho$ , e per ogni scalare o forma  $\omega$  tale che  $\omega^* = \varrho^c \omega$  (seminvariante) s'introduce (con Reeb) una differenziazione seminvariante  $\bar{d}\omega = d\omega + c\pi \wedge \omega$  (ove  $\wedge$  indica il prodotto alternante delle due forme) tale che  $\bar{d}\omega^* = \varrho^c \bar{d}\omega$  ( $c$  peso;  $d\pi^* = d\pi$ ). — Nel caso della geometria proiettivo-differenziale delle superficie fissare  $\pi$  equivale a fissare una retta  $g$  in ogni piano tangente. — Occorre spesso considerare (in relazione a più punti) forme seminvarianti  $\omega$  tali che  $\omega^* = \varrho_0^{c_0} \varrho_1^{c_1} \varrho_2^{c_2} \varrho_3^{c_3} \omega$ ; ( $c_0, c_1, c_2, c_3$ ) è il peso di  $\omega$ . In relazione a più pfaffiani  $\pi_k$  tali che  $\pi_k^* = \pi_k - d \log \varrho_k$  s'introduce la differenziazione seminvariante  $\bar{d}\omega = d\omega + \sum c_k \pi_k \wedge \omega$ . — Con questo apparato, e prendendo come retta  $g$  la seconda normale proiettiva, è possibile studiare in modo unitario le proprietà delle superficie.

Enrico Bompiani.

**Sauer, Robert:** Projektive Beziehungen in der Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen. Arch. der Math. 2, 420—423 (1951).

Partielle Differentialgleichungen vom Typ  $L(f) \equiv a f_{xx} + 2b f_{xy} + c f_{yy} = 0$  —  $a, b, c$  Funktionen von  $x, y$  — werden als projektiv verknüpft bezeichnet, wenn die Charakteristikennetze in der  $(x, y)$ -Ebene projektiv sind. Die Gleichung  $L(f) = 0$  möge durch Legendre-Transformation übergehen in  $\bar{a} \varphi_{\eta\eta} - 2\bar{b} \varphi_{\xi\eta} + \bar{c} \varphi_{\xi\xi} = 0$ . Man betrachte eine mit  $L(f) = 0$  projektiv verknüpfte Gleichung. Werden  $\xi, \eta, -\varphi$  derselben Transformation unterworfen wie die homogenen rechtwinkligen Linienkoordinaten der  $(x, y)$ -Ebene, und werden die transformierten Größen durch einen Strich gekennzeichnet, so stellt  $x' \xi' + y' \eta' - \varphi'$  eine Lösung der projektiv verknüpften Gleichung dar. Die Charakteristikennetze der  $(\xi, \eta)$ -Ebene im Vergleich mit denen der  $(x, y)$ -Ebene werden zur Begründung herangezogen. — Bei infinitesimaler Verbiegung einer Fläche  $z(x, y)$  gilt für die Zunahme  $\varepsilon \bar{z}(x, y)$  von  $z$  die Gleichung  $z_{yy} \bar{z}_{xx} - 2z_{xy} \bar{z}_{xy} + z_{xx} \bar{z}_{yy} = 0$ . Bei Anwendung der vorhergehenden Überlegungen ordnet sich jenem Zusammenhang die bekannte Tatsache ein, daß jede infinitesimale Verbiegung einer Fläche eine ebensolche der zu ihr projektiven Flächen liefert.

Eduard Rembs.

**Germany, R. H. J.:** Sur les équations récurrentes aux dérivées partielles du premier ordre, de forme linéaire et homogène. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 65, 25—32 (1951).

Date le  $2n$  successioni di funzioni analitiche

$$\{f_i^{(k)}(x, y_1, \dots, y_n)\}, \{g_i^{(k)}(x, y_1, \dots, y_n)\} \quad (i = 1, 2, \dots, p, \dots; k = 1, 2, \dots, n)$$

l'A. studia il sistema di infinite equazioni

$$\frac{\partial u_p}{\partial x} + \sum_{k=1}^n f_p^{(k)} \frac{\partial u_p}{\partial y_k} + \sum_{k=1}^n g_p^{(k)} \frac{\partial u_{p+1}}{\partial y_k} = 0$$

e dimostra che, sotto certe ipotesi, esiste una e una sola soluzione soddisfacente, per  $x = x_0$ , alle condizioni:  $u_p(x_0, y_1, \dots, y_n) = \varphi_p(y_1, \dots, y_n)$ , ( $p = 1, 2, \dots$ ) con  $\varphi_p$  funzione assegnate.

Luigi Amerio.

**Višik, M. I.:** Über eine allgemeine Form linearer Randwertprobleme für eine elliptische Differentialgleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 373—375 (1951) [Russisch].

The paper continues the programme of the application of Hilbert space ideas to boundary-value problems for

$$Lf = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} f \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f + c(x) f,$$

in a finite region  $D$  with smooth boundary  $\Gamma$ ; see S. L. Sobolev [Mat. Sbornik (Rec. math. Moscow), n. Ser. 2 (44) 465—499 (1937); this Zbl. 18, 26], M. I. Višik (this Zbl. 36, 198, 362). Defining  $L_0$  as the closure of  $L$  when restricted to functions  $f$  which vanish in some boundary strip of the region  $D$ ,  $M_0$  in the same way for the adjoint differential operator  $M$ , and  $L^*$  as the adjoint operator to  $M_0$ , he considers the domain  $\Omega_{\bar{L}}$  of an extension  $\bar{L}$  of  $L_0$ , with  $L_0 \subset \bar{L} \subset L^*$ . His first theorem expresses  $\Omega_{\bar{L}}$  as the direct linear sum of  $\Omega_{L_0}$  and two other terms, whose nature depends on whether  $\bar{L}$  is „completely soluble“, „regularly soluble“ or „normally soluble“. The second theorem gives a precise characterisation of  $\Omega_{\bar{L}}$  in terms of two „boundary operators“  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$ . No proofs are given, most of the paper being taken up by the numerous subsidiary definitions.

Frederick V. Atkinson

**Višik, M. I.:** Über einige Randwertaufgaben für elliptische Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 553—555 (1951) [Russisch].

The equation is

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} f \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f + c(x) f = h, \quad (c(x) \leq 0),$$

to be satisfied in a region  $D$  with boundary  $\Gamma$ , with boundary condition  $\partial f / \partial \nu|_{\Gamma} = Qf|_{\Gamma} + Ff|_{\Gamma}$ , where  $\partial / \partial \nu$  denotes normal differentiation,  $Q$  is a linear second-order differential operator which is, in a specified sense, elliptic on  $\Gamma$ , and  $F$  is a bounded linear operator on the space  $\mathfrak{L}_2(\Gamma)$ . For functions  $f(S)$  defined over  $\Gamma$ , where  $S$  is a point of  $\Gamma$ , there is defined the operator  $Gf(S) = (\text{grad}_{\Gamma} f(S), f(S))$ , which maps part of  $\mathfrak{L}_2(\Gamma)$  on to a set of  $n$ -vectors  $R_G$ . The latter is made into a Hilbert space, the definition of the scalar product depending upon the operator  $Q$ . Various properties of  $G$  and its adjoint  $G^*$  are announced which lead to results for the original boundary problem, analogous to the three theorems of Fredholm. No proofs are given, but the reasoning appears similar to that of a previous paper by the author (see the preced. review).

Frederick V. Atkinson.

**Vekua, I. N.:** Über den Beweis einiger Eindeutigkeitssätze, die in der Theorie der stehenden Schwingungen vorkommen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 341—343 (1951) [Russisch].

Using his result [Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 12 (1943)] that if in three dimensions  $\Delta U + \lambda^2 U = 0$  ( $\lambda$  real) and  $\int_S |U|^2 dS = o(1)$ , ( $S$  a sphere with radius  $R$ ,  $R \rightarrow \infty$ ), then  $U = 0$ , the author proves in a simple fashion certain uniqueness theorems in the theory of a vibrating elastic infinite body.

Lars Gårding.

**Keldyš, M. V.:** Über einige Fälle der Ausartung von Gleichungen elliptischen Typs auf dem Rande eines Gebietes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 181—183 (1951) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich mit Fragen der Existenz und Eindeutigkeit bei der ausgearteten linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus:

$$L(u) = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, y) u = 0$$



$c \leq 0$ , in dem Gebiete  $\Delta$ , das von dem Abschnitt:  $0 \leq x \leq 1$  und einer dessen Endpunkte verbindenden regulären Kurve  $\Gamma$  der oberen Halbebene begrenzt wird. Neben dem Dirichletschen Probleme (D) für das Gebiet  $\Delta$  betrachtet Verf. noch den Problemtypus (E), wo lediglich längs  $\Gamma$  stetige Anfangswerte der Lösungen zu  $L(u) = 0$  in  $\Delta$  vorgeschrieben sind. Es werden Bedingungen dafür angegeben, daß entweder (D) unbeschränkt oder (E) eindeutig lösbar ist. *Herbert Beckert.*

**Olejnik, O. A.:** Über das zweite Randwertproblem für Gleichungen vom elliptischen Typus mit kleinen Parametern bei den höchsten Ableitungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 735—737 (1951) [Russisch].

Vorgelegt ist die Gleichung

$$(1) \quad L_\varepsilon(U) \equiv \varepsilon \Delta U + A(x, y) U_x + B(x, y) U_y + C(x, y) U = f(x, y);$$

Verf. untersucht das Verhalten der Lösung  $U_\varepsilon(x, y)$  der zu (1) gehörigen Lösung der zweiten Randwertaufgabe  $[\partial U / \partial n = \varphi(P), P \text{ auf der Berandung } S \text{ des Gebietes } G]$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wird vorausgesetzt, daß  $B \cdot dx/ds - A \cdot dy/ds$  nur an endlich vielen Punkten von  $S$  das Vorzeichen ändert, und bezeichnet man mit  $S_1$  diejenigen Teile von  $S$  mit  $B dx/ds - A dy/ds < 0$ , so ergibt sich unter einer Reihe von Annahmen über  $A, B, C, f, \varphi$  (u. a. sechsmalige Differenzierbarkeit von  $A, B, C, f$ ) und über  $S$  [u. a. über das Verhalten zu den Charakteristiken von (2)]: Wenn es eine Lösung  $U(x, y)$  von (2)  $A(x, y) U_x + B(x, y) U_y + C(x, y) U = f(x, y)$  mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in  $G + S$  gibt, die auf  $S_1$  der Bedingung  $\partial U / \partial n = \varphi(P)$  genügt, so gilt gleichmäßig für alle  $(x, y)$  in  $G + S$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon(x, y)$

$= U(x, y)$ . — Die Voraussetzung der zweimaligen Differenzierbarkeit von  $U$  kann fallen gelassen werden, wenn über das Verhalten von  $U$  auf den Charakteristiken von (2) weitere Voraussetzungen gemacht werden. — Die Beweise sind nur angedeutet. — Entsprechende Betrachtungen für das erste Randwertproblem von (1) stammen von N. Levinson (dies. Zbl. **36**, 68). *Karl Maruhn.*

**Beckert, Herbert:** Über lineare elliptische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Math. Nachr. **5**, 173—208 (1951).

Das allgemeine lineare elliptische System

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial y} = \sum_{k=1}^n c_{ik}(x, y) u_k + f_i(x, y)$$

( $i = 1, \dots, 2q = n$ ) wird in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $E$  mit der Randkurve  $S$  betrachtet. Auf  $S$  sind die  $q$  Randbedingungen (2)  $\sum_{k=1}^{2q} r_{ik}(s) u_k(s) = \varphi_i(s)$  ( $i = 1, \dots, q$ ) vorgegeben. Dieses System (1) kann auf die Form

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x} - B_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - C_i \frac{\partial v_i}{\partial y} &= \sum_{j=1}^n Q_{2i-1,j} u^j + \varphi_{2i-1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} + A_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + B_i \frac{\partial v_i}{\partial y} &= \sum_{j=1}^n Q_{2i,j} u^j + \varphi_{2i} \end{aligned}$$

( $i = 1, \dots, q$ ) mit analoger Randbedingung gebracht werden. Die linken Seiten sind jetzt Beltramische Differentialausdrücke für je ein Paar  $u_i, v_i$ . In einem Bildbereich  $E_i + S_i$  von  $E + S$  gehen diese nach geeigneter Koordinatentransformation in die Cauchy-Riemannschen Differentialausdrücke über. Nach Hilbert (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig 1924, S. 217) gelangt Verf. für das obige Randwertproblem zu einem System äquivalenter Integralgleichungen, die aber wegen der Allgemeinheit der Randbedingungen (2) belastete und stark singuläre Integralgleichungen sind. Sie enthalten noch in weiten Grenzen willkürliche Funktionen, die in den zugelassenen Transformationen von (1) auf (3) enthalten sind. Verf. nennt sie Multiplikatorensysteme. Diese Multiplikatoren müssen auf  $S$  geeignete Randwerte annehmen und in  $E$  so fortgesetzt werden können, daß sie paarweise keine gemeinsame Nullstelle in  $E + S$  haben. Das bedeutet eine Einschränkung der zugelassenen Multiplikatoren. Hinsichtlich der Darstellung dieser Einschränkung allein aus Randvorgaben verweist Verf. auf den Kroneckerschen Satz. Mit Hilfe der Hilbertschen Reziprozitätsformel für den Cotangenskern werden die belasteten Integralgleichungen der Fredholmschen Theorie zugänglich.

lich gemacht. Dies ist der Hauptteil der vorliegenden Untersuchungen. Die dabei vom Verf. angegebenen Abschätzungen dürften von besonderem Interesse sein. Die Integralgleichungen liefern dann einen zu Hilbert analogen Existenzsatz: Ist die, mit den zugelassenen Multiplikatoren gegebene, homogene Randwertaufgabe nicht lösbar, so hat die inhomogene genau eine Lösung. Hat die homogene Nulllösungen, so ist die inhomogene nur dann lösbar, wenn die absoluten Glieder gewissen Integralrelationen genügen. Verf. schließt mit einigen Betrachtungen über im vorhergehenden ausge-schlossenen Randvorgaben. — Anmerkung der Ref.: Kürzlich zeigte G. Hellwig, daß für den Fall von zwei Differentialgleichungen die Aussagen des Hilbertschen Existenzsatzes unvollständig sind. Es kann nämlich in diesem Falle gezeigt werden, daß die homogene Randwertaufgabe stets Nulllösungen besitzt und die inhomogene Randwertaufgabe bei geeigneter Gebietseinschränkung stets lösbar ist. Es ist daher zu erwarten, daß der obige Satz auch in dieser Richtung verschärft werden kann. Das dürfte sicher der Fall sein, wenn die Integralgleichungen nicht belastet sind.

Wolfgang Haack — Günter Hellwig.

Simoda, Seturo et Mitio Nagumo: Sur la solution bornée de l'équation aux dérivées partielles du type elliptique. Proc. Japan Acad. 27, 334—339 (1951).

Verff. geben eine weitreichende notwendige Bedingung an, daß die lineare partielle Differentialgleichung vom elliptischen Typus mit  $m$  unabhängigen Variablen:  $x(x_1, x_2, \dots, x_m)$

$$\sum a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x) u = 0$$

keine im Gesamtraum reguläre, gleichmäßig beschränkte Lösung außer  $u = 0$  hat. Der Beweis läuft über das bedeutsame Theorem: Sei  $\Phi(x, u, p_i, r_{ij}, \alpha)$  eine von in vorgegebenen Bereichen liegenden Variablen:  $x(x_1, \dots, x_m)$ ,  $u = u(x_1, \dots, x_m)$ ,  $p_i = \partial u / \partial x_i$ ;  $r_{ij} = \partial u / \partial x_i \partial x_j$  abhängige Funktion, wobei  $\alpha$  ein zusammenhängendes Kontinuum durchläuft. Die symmetrische Matrix:  $(\partial \Phi / \partial r_{ij})$  sei stets positiv definit. Die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen:  $w(x, \alpha)$ ,  $v(x, \alpha)$  mögen dort erfüllen:

$$\Phi\left(x, w(x, \alpha), \frac{\partial w(x, \alpha)}{\partial x}, \frac{\partial^2 w(x, \alpha)}{\partial x^2}, \alpha\right) < \Phi\left(x, v(x, \alpha), \frac{\partial v(x, \alpha)}{\partial x}, \frac{\partial^2 v(x, \alpha)}{\partial x^2}, \alpha\right)$$

und  $w(x, \alpha_0) > v(x, \alpha_0)$  für ein gewisses  $\alpha_0$ . Unter wenig einschneidenden weiteren Bedingungen gilt dann sogar  $w(x, \alpha) > v(x, \alpha)$  für alle  $\alpha$  und  $x$ . Herbert Beckert.

Miranda, Carlo: Sulle proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 117—120 (1951).

This paper applies three theorems proved by M. Picone in his „Appunti di Analisi superiore“ (2. ed. Napoli 1947), pp. 694—697, to the case of a partial differential equation of the second order and of the elliptic type in two variables. The equation being

$$E(u) \equiv a_{11} u_{xx} + 2 a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + c u = f(x, y)$$

the conditions on the coefficients are  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \geq \alpha > 0$ ,  $|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| + |b_1| + |b_2| + |c| \leq \beta$ . No condition is mentioned about these coefficients, or the function  $f(x, y)$ , being continuous in the domain in which a solution is studied. They are simply supposed to be determinate at every point of this domain, denoted by  $A$ . — The main result of the author is that of his theorem I': If  $c \leq 0$  and  $f(x, y) \leq 0$  in  $A$ , a regular solution of the equation  $E(u) = f$  cannot have a negative relative minimum at a point of  $A$  without reducing to a constant. — The proof of this theorem, by means of a very skillful artifice of the type of those used by E. Hopf and G. Giraud (this Zbl. 5, 354), is extremely simple and elegant. — Two theorems are deduced by the author from the theorem I', one relative to the equation  $E(u) = 0$  when  $c \leq 0$  and  $A$  is bounded and connected, the other when  $c \equiv 0$ , the other assumptions being the same.

C. Racine.

Spence, R. D. and C. P. Wells: Vector wave functions. Commun. pure appl. Math. 4, 95—104 (S 159—S 168) (1951).

Die vektorielle Wellengleichung  $\text{rot rot } \mathfrak{U} = k^2 \mathfrak{U}$  besitzt Lösungen der Form  $\mathfrak{U} = \text{rot } \mathfrak{r} \Phi' + \text{rot rot } \mathfrak{r} \Phi''$  oder der Form  $\mathfrak{U} = \text{rot } \mathfrak{a} \Psi' + \text{rot rot } \mathfrak{a} \Psi''$ .  $\mathfrak{r}$  ist



der Radiusvektor,  $\alpha$  ein konstanter Vektor,  $\Phi', \Phi''$  und  $\Psi', \Psi''$  sind Lösungen der gewöhnlichen Wellengleichung  $\Delta \Phi + \kappa^2 \Phi = 0$ . Die Untersuchung beschäftigt sich mit den Lösungen der vektoriellen Wellengleichung in rotationselliptischen Koordinaten und kommt zu folgenden Schlußfolgerungen. 1. Sei  $U_n = \text{rot } f \Phi'_n$ ,  $\mathfrak{R}_n = \text{rot rot } f \Phi''_n$ , wo  $f = r$  oder  $= \alpha$  und  $\Phi'_n, \Phi''_n$  skalare Lösungen der gewöhnlichen Wellengleichung sind, die in rotationselliptischen Koordinaten separiert sind. Dann bilden die  $U_n, \mathfrak{R}_n$  kein orthogonales Funktionensystem. Darauf beruht die Schwierigkeit, Randwertprobleme der vektoriellen Wellengleichung auf Rotationsellipsoiden zu behandeln. 2. Diese Wellenfunktionen erlauben eine befriedigende Behandlung nur für rotationssymmetrische Lösungen von Randwertproblemen (behandelte Beispiele: rotationssymmetrische Eigenschwingungen eines rotationselliptischen Hohlraumresonators oder freie Schwingungen mit Abstrahlung eines leitenden Rotationsellipsoids). 3. Für die Behandlung von Randwertproblemen der erwähnten Art wären vektorielle Eigenfunktionen geeignet, deren Richtung in jedem Raumpunkt parallel zu den konfokalen Rotationsellipsoiden eines rotationssymmetrischen elliptischen Koordinatensystems ist. Es wird gezeigt, daß eine vektorielle Wellenfunktion diese Eigenschaft nur auf einzelnen Rotationsellipsoiden, aber nicht auf jedem haben kann.

Josef Meixner.

Poritsky, H.: Extension of Weyl's integral for harmonic spherical waves to arbitrary wave shapes. Commun. pure appl. Math. 4, 33—42 (S 97—S 106) (1951).

Nach Ableitung der Kugelwellendarstellung in der bekannten Form (H. Weyl, Ann. der Physik, IV. Ser. 60, 481—500 (1919))

$$\frac{e^{-ikR}}{-ikR} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2 + i\infty} \exp\{-ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)\} \sin \vartheta d\vartheta$$

wird die gleichfalls bekannte Formel

$$\frac{F(ct - R)}{R} = -\frac{1}{2\pi} \int d\varphi \int F' \{ct - (\alpha x + \beta y + \gamma z)\} \sin \vartheta d\vartheta$$

diskutiert; sodann wird für zweidimensionale Potentialfunktionen die Lösung der ersten Randwertaufgabe für die Halbebene angegeben. Schließlich wird eine einfache Sprungfunktion untersucht.

Hans Hornich.

Ladyženskaja, O.: Über die Integrale hyperbolischer Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 925—927 (1951) [Russisch].

Let  $M_k$ , ( $k \geq 2$ ), be the set of real solutions of the wave equation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x) u = 0$$

in a cylinder parallel to the  $t$ -axis with bounded open base  $\Omega$ , satisfying a boundary condition  $\alpha u + \beta \sum a_{ij} (\partial u / \partial x_i) \cos(\nu, x_j) = 0$  ( $\nu$  is the interior normal) at the boundary  $S$  of  $\Omega$ , whose derivatives of order  $< k + 1$  are continuous in  $\Omega + S$  while those of order  $k + 1$  are summable over  $\Omega$  for all  $t$ . It is further supposed that  $S$  and the coefficients  $a_{ij}$ ,  $a$ ,  $\alpha$  and  $\beta$  are real and independent of  $t$  and have suitable differentiability properties, that  $\beta \geq 0$  and that the quadratic form  $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j$  is uniformly bounded and positive definite. An expression of the form  $I_k(u, v) = \int_{\Omega} \omega_k(u, v) d\Omega + \int_S \omega_{k-1}(u, v) dS$  where  $u, v \in M_k$  and  $\omega_k$  and  $\omega_{k-1}$  are bilinear forms in the derivatives of  $u$  and  $v$  of order  $\leq k$  and  $\leq k - 1$  is called an (invariant) integral of (1) (of order  $k$ ) if it does not depend on  $t$ . The simplest example is the energy integral

$$I_1(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + a u v \right) d\Omega + \int_S \frac{\alpha}{\beta} u v dS.$$

S. Sobolev posed the problem of finding a basis for all invariant integrals [see Volkov, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 15, 75—90 (1951)] and the problem

of finding an invariant integral majorizing the expression  $\int_{\Omega} \sigma_k(u) d\Omega$  where  $\sigma_k(u)$  is the sum of the squares of all the derivatives of  $u$  of order  $\leq k$ , ( $u \in M_k$ ). Such an integral was found by Smolickij [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **73**, 279—282 (1950)]. On the basis of previous work by the author [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **75**, 765—768 (1950)] it is shown that if  $\alpha \geq 0$  and  $\alpha\beta \geq 0$  another such integral is  $\sum_1^{k-1} I_1(u_m, u_m)$ , ( $u_m = \partial^m u / \partial t^m$ ). It is also conjectured that every invariant integral of order  $k$  is a linear combination with constant coefficients of the integrals  $I_1(u_m, v_l)$ , ( $m, l < k$ ), plus an invariant integral which vanishes identically.

Lars Gårding.

Weber, Maria: The fundamental solution of a degenerate partial differential equation of parabolic type. Trans. Amer. math. Soc. **71**, 24—37 (1951).

L'A. s'occupe de l'équation de Fokker-Planck à  $2n$  dimensions

$$(1) \quad \sum_{ij}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i^n \left( x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \alpha u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

la forme  $\sum_{ij}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j$  étant définie positive. On désigne par  $x$  le point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , etc. On appelle solution fondamentale de l'équation (1) une fonction  $u(x, y, t; \zeta, \eta, \tau)$ , satisfaisant à l'équation (1) en tant que fonction de  $x, y$ , et  $t$  pour  $(x, y) \in R$ ,  $(\zeta, \eta) \in R$ ,  $t < \tau$ ,  $R$  étant un domaine de l'espace  $(x, y)$ , et possédant pour  $x = \zeta$ ,  $y = \eta$ ,  $t = \tau$  une singularité telle que l'on ait pour toute fonction  $f(x, y)$  continue dans  $R$  et bornée et pour tout domaine  $D \subset R$

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_D u(x, y, t; \zeta, \eta, \tau) f(x, y) dx dy = \begin{cases} f(\zeta, \eta) & \text{pour } (\zeta, \eta) \in D \\ 0 & \text{pour } (\zeta, \eta) \text{ ext. à } \bar{D}. \end{cases}$$

Si les coefficients de (1) satisfont à certaines hypothèses de régularité, la solution fondamentale existe. Si  $R$  est l'espace entière, la solution fondamentale est unique et satisfait à l'équation adjointe à (1) en tant que fonction de  $\zeta, \eta, \tau$ . Ce théorème constitue une extension des résultats de W. Feller et F. G. Dressel relatifs aux équations paraboliques non dégénérées. Pour former la solution fondamentale de (1), on choisit pour première approximation  $u_0$  une expression analogue à la solution fondamentale de l'équation  $u_{xx} + x u_y + u_t = 0$ , construite par Kolmogoroff. En posant ensuite

$$u(x, y, t; \zeta, \eta, \tau) = u_0(x, y, t; \zeta, \eta, \tau) + \int_t^\tau d\lambda \int_R u_0(x, y, t; \mu, \nu, \lambda) f(\mu, \nu, \lambda; \zeta, \eta, \tau) d\mu d\nu,$$

on obtient une équation intégrale pour déterminer la fonction  $f$ , résoluble par la méthode des approximations successives.

M. Krzyżański.

Cole, Julian D.: On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics. Quart. appl. Math. **9**, 225—236 (1951).

Verf. betrachtet die Gleichung (1)  $u_t + u u_x = \nu u_{xx}$ , deren Beziehungen zur Stoßwellentheorie und zur Turbulenztheorie zunächst kurz dargelegt werden. Nach Herleitung einiger allgemeiner Eigenschaften von (1) wird dann festgestellt, daß eine Lösung von (1) sich in der Gestalt  $u(x, t) = -2\nu \vartheta_x / \vartheta$  darstellen läßt, wenn  $\vartheta$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung  $\vartheta_t - \nu \vartheta_{xx}$  ist, und der Weg angegeben, die (einzige) Lösung zu finden, die für ein gegebenes  $x$ -Intervall der Anfangsbedingung  $u(x, 0) = u_0(x)$  und der Randbedingung  $u(x_1, t) = u(x_2, t) = 0$  genügt. Für  $-\infty < x < +\infty$  wird die Lösung explizit angegeben. Ein wichtiges Beispiel bildet das Abklingen einer vorgegebenen periodischen Anfangsstörung, das in der Turbulenztheorie dem Abklingen der freien Turbulenz in einem endlichen Bereich entspricht.

Karl Maruhn.



**Mann, W. Robert and Frantisek Wolf:** Heat transfer between solids and gasses under nonlinear boundary conditions. Quart. appl. Math. 9, 163—184 (1951).

Verf. betrachten das Wärmeleitungsproblem  $U_t(x, t) = U_{xx}(x, t)$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ , mit der Anfangsbedingung  $U(x, 0) = 0$  und der bei nicht konstantem  $f$  (Wärmeübergangszahl) nichtlinearen Randbedingung

$$-U_x(0, t) = \frac{1}{k} [1 - U(0, t)] f[U(0, t)] = G[U(0, t)].$$

Falls  $G$  physikalisch sinnvoll gewählt wird, existiert immer mindestens eine Lösung

in der Form  $U(x, t) = \int_0^t \frac{G[U(0, \tau)]}{\pi^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \exp \frac{-x^2}{4(t-\tau)} d\tau$ , wobei  $U(0, t)$  der nicht-

linearen Integralgleichung  $U(0, t) = \int_0^t \frac{G[U(0, \tau)]}{\pi^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} d\tau$  genügt. Falls  $f[U(0, t)]$

einer Lipschitzbedingung genügt, so ist die Lösung eindeutig und kann mit Hilfe einer durch Rekursionsformeln angegebenen Funktionenfolge gleichmäßig approximiert werden.

*Maria Josefa de Schwarz.*

**Ciliberto, Carlo:** Sul problema di Holmgren-Levi per l'equazione del calore. Giorn. Mat. Battaglini 80, 1—13 (1951).

Existenzbeweis für die Wärmeleitungsgleichung bei gegebenen Randwerten der unbekannten Funktion. Der Beweis wird auf Grund des Existenzverfahrens der Funktionalanalysis geführt. — Verf. betrachtet die Gleichung (1)  $\partial^2 u / \partial x^2 - \partial u / \partial y = 0$  im Gebiet  $T = \{0 \leq y \leq h; \xi_1(y) \leq x \leq \xi_2(y)\}$  mit einer Randbedingung (2)  $u = f$  ( $f$  stetig in  $s$ ) in dem Teil  $s$  der Begrenzung von  $T$ , der daraus durch Weglassen des Segments der Charakteristik  $y = h$  entsteht. Die Lösungen von (1) und (2) bilden eine lineare Mannigfaltigkeit  $\bar{\Sigma}$  des Raumes  $\Sigma$  der über  $s$  stetigen Funktionen, die nach bekannten Sätzen abgeschlossen ist. Das Existenztheorem wird in Form der Relation  $\bar{\Sigma} \equiv \Sigma$  bewiesen. Zu diesem Zweck zeigt Verf., daß, wenn für jedes  $f \in \bar{\Sigma}$  und  $\mu$  mit beschränkter Variation (3)  $\int_s f d\mu = 0$  gilt, (3) auch für ein beliebiges  $f \in \Sigma$  erfüllt ist. Deshalb ist nach einem Satz von Hahn  $\bar{\Sigma} \equiv \Sigma$ , und es folgt die Existenz von wenigstens einer Lösung von (1) für jedes vorgegebene  $f$  aus  $\Sigma$ .

*Carlo Miranda.*

**Weinstein, Alexander:** On Tricomi's equation and generalized axially symmetric potential theory. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 348—358 (1951).

L'équation du type mixte (\*)  $\sigma Z_{\theta\theta} + Z_{\sigma\sigma} = 0$  est elliptique pour  $\sigma > 0$  et hyperbolique pour  $\sigma < 0$ . En transformant (\*), pour  $\sigma < 0$ , en une équation d'Euler-Poisson, F. Tricomi a étudié l'unicité et l'existence des solutions. L'A. a montré (ce Zbl. 38, 262) que pour  $\sigma > 0$ , (\*) peut être transformée en une équation de la théorie des potentiels symétriques autour d'un axe de révolution (Beltrami). — Dans le présent Mémoire, l'A. s'est proposé de construire la solution fondamentale  $Z\{p\}$  de (\*) et de l'équation plus générale (\*\*)  $y(Z_{xx} + Z_{yy}) + pZ_y = 0$ , ( $p > 0$ ). Pour  $-\infty < x < +\infty$ ,  $y > 0$ , on a

$$Z\{p\} = S_{p-1} \int_0^\pi (b^2 + x^2 + y^2 - 2by \cos \alpha)^{-p/2} \sin^{p-1} \alpha d\alpha$$

avec  $S_{p-1}^{-1} = \int_0^\pi \sin^{p-1} \alpha d\alpha$ . Sur l'axe des  $x$ ,  $Z = (x^2 + b^2)^{p/2}$  et  $\partial Z / \partial y = 0$

Le „résidu“ de  $Z$  en  $x = 0$ ,  $y = b$  est  $-2\pi b^{-p} S_{p-1}$  et est différent de zéro, ce qui montre que  $Z$  est une solution fondamentale de (\*\*). — La recherche d'une solution fondamentale de (\*\*) est particulièrement importante pour la représentation

à l'ai de d'une formule de réciprocité (Green) d'une solution arbitraire de cette équation et pour la détermination de la période de la fonction de courant multiforme.

Florent Bureau.

**Titchmarsh, E. C.:** Eigenfunction expansions associated with partial differential equations. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 1—27 (1951).

Es werden Entwicklungsprobleme studiert, die zur Schrödingergleichung (1)  $Lu = -\Delta u + q(x, y)u = \lambda u$  gehören. Der Bereich ist die ganze  $xy$ -Ebene und  $q(x, y)$  wird, nebst ihren ersten Ableitungen, stetig angenommen. Folgender allgemeiner Satz wird bewiesen: Es sei  $f(x, y)$  und  $Lf(x, y)$  quadratisch integrierbar in der ganzen  $xy$ -Ebene und außerdem (2)  $f \partial G / \partial r - G \partial f / \partial r = o(r^{-1})$  ( $r^2 = x^2 + y^2$ ) für  $\text{Im } \lambda \neq 0$ . Dann gilt

$$(3) \quad f(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{H(X, \Xi, R) - H(X, \Xi, -R)\} f(\Xi) d\xi d\eta,$$

wo  $X = (x, y)$ ,  $\Xi = (\xi, \eta)$  und  $G(X, \Xi, \lambda) = G$  eine in gewisser Weise konstruierte Greensche Funktion von (1) bei den „Randbedingungen“:  $u$  quadratisch integrierbar in der Nähe von  $r = \infty$  ist ( $\text{Im } \lambda \neq 0$ ). Schließlich ist  $H(X, \Xi, R) =$

$\frac{1}{\pi} \lim_{v \rightarrow 0} \int \text{Im } G(X, \Xi, u + iv) du$ . — Es wird auch bewiesen, daß die Bedingung

(2) überflüssig ist, wenn (1) vom type déterminé (Carleman) ist [wenigstens unter weiteren Regularitätsbedingungen über  $q(x, y)$ ]. Eine nähere Untersuchung des rechten Gliedes von (3) wird in Aussicht gestellt. — Die Methode ist derjenigen im Buche Eigenfunction expansions von Titchmarsh (Oxford 1946) analog. Es wird also eine inverse Transformation  $(L - \lambda)^{-1} f$  konstruiert, diese längs einem Wege in  $\text{Im } \lambda > 0$  (im wesentlichen: einem Halbkreis nebst Durchmesser) integriert und schließlich Grenzübergang (Radius des Halbkreises  $\rightarrow \infty$  wobei Durchmesser in  $\text{Re } \lambda$  übergeht) vorgenommen. — Methode, Umfang und Ergebnisse sind also von denen von Carleman (dies. Zbl. 9, 357) und Friedrichs (dies. Zbl. 8, 392. 9, 72. 10, 304) verschieden. — Für die Methode charakteristisch ist auch die Konstruktion der Greenschen Funktionen, die  $(L - \lambda)^{-1} f$  definieren. Sie werden im Falle  $q(x, y) = 0$ , Randbedingung:  $u = 0$  am Rande eines festen Quadrats durch Fouriertransformation erhalten. Durch schrittweise Approximationen und schrittweise Erweiterung des Bereiches erhält man die Greenschen Funktionen des allgemeinen Falles (nur eine beim type déterminé). Göran Borg.

**Aržanyč, I. S.:** Eine neue Lösung des Problems der Berechnung eines Vektors aus seiner Rotation und Divergenz. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 29—32 (1951) [Russisch].

Es wird eine Methode angegeben, das Gleichungssystem  $\text{rot } \vec{v} = \vec{\Omega}$ ;  $\text{div } \vec{v} = P$  im Gebiet  $Q$  mit  $v_n = F$  auf der Grenze  $S$  nach  $\vec{v}$  zu lösen, falls  $\vec{\Omega}$  die nachfolgende Gestalt hat (1)  $\vec{\Omega} = \vec{R} + \text{rot } \vec{v}_0$ ;  $R_n = 0$ . Dabei wird die Bestimmung der Lösung auf das klassische Problem von Neumann zurückgeführt. Für zahlreiche Aufgaben der mathematischen Physik gelingt es,  $\vec{\Omega}$  in die Form (1) zu bringen. Enthält  $\Omega$  die Unbekannte, so werden verschiedene Integrale zu Integralgleichungen. Für zwei Beispiele (eine Wirbelbewegung und eine Aufgabe der Elektrodynamik) wird die Rechnung durchgeführt.

Johannes Haantjes.

**Fichera, Gaetano:** Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 356—360, 452—457 (1951).

Soit  $D$  un domaine borné par des courbes analytiques fermées disjointes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  et  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ . Désignons par  $\mathcal{Q}^2$  la classe de fonctions  $M(z)$  analytiques dans  $\bar{D}$ , par  $\mathcal{M}^2$  la classe de fonctions  $H(z)$  harmoniques dans  $D$



pour lesquelles  $\iint_D |M'(z)|^2 d\tau < +\infty$ ,  $\iint_D \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] d\tau < +\infty$  et posons

$$(1) \quad I(w) = \iint_D \frac{\overline{M'(z)}}{z-w} d\tau, \quad J(w) = \iint_D \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{|z-w|} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{1}{|z-w|} \right] d\tau.$$

Dans la note I l'A. attire l'attention sur un travail de P. Garabedian et M. Schiffer (ce Zbl. 40, 329), dans lequel les fonctions  $I(w)$  et  $J(w)$  ont été considérées et prouve par un exemple que certaines assertions des auteurs de ce travail sur les fonctions (1) ne sont pas correctes. L'A. cite un lemme démontré par lui ailleurs [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 5, 319—324 (1948)] sur le comportement de  $J(w)$  aux points de  $C$ . — Dans le Note II l'A. esquisse une méthode simple de démonstration de l'existence de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans le domaine  $D$  (problème considéré dans le travail cité de Garabedian et Schiffer) et donne en même temps la construction explicite de la solution. Cette méthode, basée sur le lemme précédent, a été déjà appliquée par l'A. dans des problèmes d'existence plus généraux (ce Zbl. 41, 67).

F. Leja.

**Seth, B. R.:** Boundary conditions interpreted as conformal transformation. Proc. Amer. math. Soc. 2, 1—4 (1951).

Verf. behandelt zweidimensionale harmonische Randwertprobleme mittels konformer Abbildung. Die Ausführungen sind ohne Benutzung früherer Arbeiten des Verf. nicht völlig zu verstehen. Sei  $z = f(w)$ ,  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,  $u(x, y)$  die gesuchte Funktion. Für die Randbedingung  $\frac{\partial v}{\partial s} = \left( \sum_{r=0}^m x_r \right) \cos(y n) - \left( \sum_{r=0}^m f_r \right) \cos(x n)$ , wobei die Randkurve in der  $(x, y)$ -Ebene ein Polygon ist mit  $s$  als Bogenlänge und  $n$  als Normalen —  $x_r, f_r$  sind gewisse homogene Polynome  $r$ -ten Grades —, wird die Lösung explizit angegeben. Bei nichtpolygonalen Randfiguren kann man versuchen, diese durch einfache Transformationen auf geradlinige abzubilden. Im allgemeinen werden dann  $x_r$  und  $f_r$  unendliche Reihen sein. Approximiert man diese durch ihre Teilsummen, so kann man die vorherige Methode anwenden und im Resultat zur Grenze übergehen.

Georg L. Tautz.

**Syngé, J. L.:** Pointwise bounds for the solutions of certain boundary-value problems. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 208, 170—175 (1951).

In früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 29, 55, 235; 35, 400) wurden Schranken für die Lösungen von Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen dadurch erhalten, daß diese Lösung, als Punkt eines geeigneten Funktionenraumes gedeutet, im Innern eines gewissen Hyperkreises zu suchen ist. Auf diesem Grundgedanken beruht auch in der vorliegenden Arbeit die Behandlung der räumlichen Potentialgleichung mit der Randbedingung  $Mu = f$  ( $M$  ein linearer Operator). Um die starke Singularität der zunächst zur Lösungsherstellung benutzten Grundlösungen (Ableitungen erster Ordnung von  $1/r$ ) zu umgehen, werden diese durch andere, diesmal reguläre Hilfsfunktionen mit gleichen Randwerten ersetzt. Auf diese Weise gelangt man zu Schranken für die Lösung  $u$  des Dirichletschen Problems. Um Schranken für die Ableitungen erster Ordnung von  $u$  bei dem allgemeinen Problem zu bekommen, werden weitere Grundlösungen (diesmal im wesentlichen Ableitungen zweiter Ordnung von  $1/r$ ) zugrunde gelegt und dann auch hier wieder entsprechende reguläre Hilfsfunktionen gebildet. In analoger Weise können auch Schranken für die Ableitungen zweiter Ordnung von  $u$  erhalten werden.

Karl Maruhn.

**Haviland, E. K.:** A note on unrestricted solutions of the differential equation  $\Delta u = f(u)$ . J. London math. Soc. 26, 210—214 (1951).

In der Differentialgleichung (1)  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(u)$  gelte für die in  $-\infty < \xi < \infty$  eindeutige und zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f(\xi)$ :

$f(\zeta) \geq c > 0$ ,  $f''(\zeta) > 0$  und im Falle  $f(\zeta) \rightarrow \infty$  bei  $\zeta \rightarrow \infty$   $f'(\zeta) > 0$ . In Verallgemeinerung einer Bemerkung des Ref. wird gezeigt, daß bei hinreichend schnellem

Anwachsen von  $f(\zeta)$  — mit  $F(t) = \int_0^t f(\zeta) d\zeta$  soll  $\int_0^\infty dt/\sqrt{F(t)}$  konvergieren —

keine für alle endlichen  $(x, y, z)$  stetige Lösung von (1) existiert. Der Beweis beruht auf der Betrachtung des in  $1/r = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$  konvexen Mittelwertes

$$4 J(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r \sin \alpha \cos \beta, r \sin \alpha \sin \beta, r \cos \alpha) d\alpha d\beta \quad \text{der subharmonischen}$$

Funktion  $u(x, y, z)$ .

Hans Wittich.

Lelong, Pierre: Sur les singularités complexes d'une fonction harmonique. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 1895—1897 (1951).

Soit  $C^n = R^n \times R^n$  l'espace des  $n$  variables complexes  $X_k = x_k + i x'_k$ ; une fonction  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ , harmonique dans un domaine  $d$  de  $R^n$ , est prolongeable, comme fonction holomorphe, dans un domaine  $H(d)$  de  $C^n$ , la „cellule d'harmonicité“ de  $d$ , définie comme la composante connexe de  $C^n - W$  contenant  $d$ , où  $W$  est la réunion des cônes isotropes de sommet sur la frontière de  $d$ ; aucune restriction n'est faite sur la nature de  $d$ . —  $H(d)$  est exactement l'intersection des domaines d'holomorphie des fonctions harmoniques dans  $d$ : l'A. indique en effet la construction de développements ayant des propriétés de quasi-analyticité dans tout  $C^n$ , holomorphes et harmoniques dans  $H(d)$ , non prolongeables analytiquement hors de  $H(d)$ . Un corollaire est le suivant: quel que soit l'ouvert  $V$  de  $C^n$  contenant l'adhérence de  $d$ , il existe un domaine d'holomorphie  $\Delta$  avec  $d \subset \Delta \subset V$ .

Jacques Deny.

Evans, Griffith C.: Lectures on multiple valued harmonic functions in space. Univ. California Publ. Math., n. Ser. 1, Nr. 8, 281—340 (1951).

Dans ces Leçons qui donnent une idée des travaux du séminaire de l'A. à l'Université de Berkeley, sont étudiées des fonctions harmoniques  $V(x, y, z)$  de trois variables, multiformes; l'A. se borne à la considération de telles fonctions dans l'espace réel  $R^3$ ; le groupe des déterminations de  $V$  dans  $R^3$  est assujéti à certaines restrictions: a) les variétés de ramification sont constituées par un nombre fini de „courbes“  $s_i$ , à une dimension, dans  $R^3$ , au voisinage desquelles les déterminations de  $V$  forment un groupe cyclique; b) les  $s_i$  sont contenus dans une sphère  $\Omega$  de rayon fini; il existe une homéomorphie de  $R^3$  en lui-même laissant invariants les points de  $R^3 - \Omega$ , et transformant les  $s_i$  en cercles qui doivent deux à deux n'être ni sécants, ni enlacés. — Ces restrictions sur le groupe fondamental de  $R^3 - \sum s_i$  sont utilisées pour définir

une variété de recouvrement  $T$ , à un nombre fini de feuillets, au dessus de  $R^3$  comme espace de base, avec une métrique. — Ces préliminaires font l'objet de la 1<sup>ère</sup> Leçon; la 2<sup>e</sup> étend un énoncé de Kellogg aux domaines  $D$  bornés sur  $T$ : si  $W$  est sousharmonique dans  $D$  et  $\limsup_{M \in D} W(M)$

$= m < \infty$ , l'ensemble  $e$  des points frontière  $\varphi$  de  $D$  où  $\limsup_{M \rightarrow \varphi} W(M) \geq m - \varepsilon$ ,  $M \in D$  a sa projection  $e$  sur l'espace de base  $R^3$  de capacité positive. Le fait que  $\sum_i s_i$  est un ensemble

fermé de capacité nulle dans  $R^3$  joue un rôle essentiel (le rapporteur aurait souhaité une démonstration explicite de ce fait à partir des hypothèses de l'A.) et permet une extension aux domaines multivalents de calculs connus. — Dans la 3<sup>e</sup> Leçon, l'A. construit la fonction de Green de domaines bornés de  $T$ , ainsi que celle  $\xi(A, M)$  de la surface à un nombre fini de feuillets  $T$ , et une fonction  $\lambda(M)$  harmonique sur  $T$ , tendant à l'infini vers la valeur 1 sur un feuillet précisé et vers 0 sur les autres. Il en déduit dans la 4<sup>e</sup> Leçon l'extension à un domaine

$$D \text{ de } T \text{ de la formule de Green } \int_D (\text{grad } U) (\text{grad } V) dM = \int_t U \frac{\partial V}{\partial n} dP = \int_t V \frac{\partial U}{\partial n} dP,$$

valable ici,  $t$  désignant la frontière de  $D$  dont on peut négliger les courbes  $s_i$ . Une fonction harmonique est continue sur  $s_i$  s'il en est de même de  $\xi(A, M)$ , pour  $M$  sur  $s_i$ . — La 5<sup>e</sup> Leçon ramène aux applications physiques dont l'A. a le souci, et étudie les surfaces de capacité minima passant par un contour  $s_i$ ; l'A. étudie à ce point de vue les surfaces  $D_\xi$  données par  $\xi(A, M) = [2A M]^{-1}$  dans le cas de deux feuillets;  $A, M$  sont les projections de  $A, M$  sur l'espace de base. Les propriétés des potentiels d'énergie finie sont utilisées pour les démonstrations; quelques unes de celles-ci sont susceptibles d'être abrégées en faisant appel à des travaux récents voir J. Deny, ce Zbl. 34, 362).

Pierre Lelong.



**Miles jr., Ernest P.:** Certain properties of functions harmonic within a sphere. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 213—221 (1951).

Let  $u$  be the function, harmonic in the sphere  $S$ , given by the Poisson integral of  $f$  over  $S$ , where  $f \in L$  on  $S$ . The author extends to three dimensions results obtained by Douglas [Trans. Amer. math. Soc. **33**, 263—321 (1931); this Zbl. **1**, 141] and J. Hadamard [Bull. Soc. math. France **34**, 135—138 (1906)] for the plane.

*Jerzy Gorski.*

**Dinghas, Alexandre:** Sur une inégalité concernant la croissance des fonctions harmoniques à plusieurs variables. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 126—127 (1951).

L'A. complète les résultats publiés dans une Note antérieure (ce Zbl. **42**, 84).

*Jacques Dufresnoy.*

**Ganin, M. P.:** Randwertprobleme für polyanalytische Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 313—316 (1951) [Russisch].

Let  $S$  be a bounded open region in the plane of finite connectivity and with a smooth boundary. A solution of the equation  $\Delta^n U = 0$  may be written as

$U = \Re \sum_0^{n-1} \bar{z}^p z^p \varphi_p(z)$  where  $\varphi_p$  is analytic and possibly manyvalued in  $S$ . The

function  $V = \Im \sum_0^{n-1} \bar{z}^p z^p \varphi_p(z)$  is said to be conjugate to  $U$  and if all  $\varphi_p$  are single-valued in  $S$ , then  $U + iV$  is said to be polyharmonic in  $S$ . Various linear and homogeneous boundary problems for such functions, connecting the derivatives of  $U$  with those of  $V$  leading ultimately to Fredholm equations, are solved.

*Lars Gårding.*

**Reade, Maxwell O.:** On a mass distribution associated with a class of polynomials. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 55—63 (1951).

L'A. caractérise deux types de polynômes polyharmoniques d'ordre  $K$  par des conditions portant sur la moyenne périphérique ou spatiale de la fonction sur les polygones d'un système de  $k$  polygones réguliers homothétiques à  $n$  cotés, variable dans un domaine. Il utilise un théorème de Choquet et Deny sur les distributions de masses (sur un ensemble et ses semblables) associées à une fonction [Bull. Soc. math. France **72**, 118—140 (1944)].

*Marcel Brelot.*

**Rudin, Walter:** A theorem on subharmonic functions. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 209—212 (1951).

Dans le critère de sousharmonicité où l'on demande que soit  $\geq 0$  un laplacien généralisé de Privaloff (mais avec moyenne périphérique  $\mathfrak{M}_u^r(M)$ , d'ailleurs supposée finie), l'A. montre qu'on peut excepter pour cette condition un ensemble de points dénombrable pourvu que  $[\mathfrak{M}_u^r(M) - u(M)] r^{-1}$  y admette une  $\limsup \geq 0$ . Application.

*Marcel Brelot.*

**Power, G.:** Change in potential due to a dielectric sphere. Amer. math. Monthly **58**, 249—253 (1951).

L'A. calcola il potenziale elettrostatico del campo di una sfera dielettrica omogenea immersa in un campo elettrostatico preesistente di potenziale  $\Phi$ . Se  $k$  è la costante dielettrica della sfera, si trovano per i potenziali  $\Phi_1, \Phi_2$  interno ed esterno alla sfera le espressioni seguenti

$$\Phi_1 \equiv \frac{2}{k+1} \Phi(x, y, z) + \frac{k-1}{(k+1)^2} \int_0^1 t^{-k/(k+1)} \Phi(xt, yt, zt) dt,$$

$$\Phi_2 \equiv \Phi(x, y, z) - \frac{k-1}{k+1} \frac{a}{r} \Phi(x_1, y_1, z_1) + \frac{k-1}{(k+1)^2} \frac{a}{r} \int_0^1 t^{-k/(k+1)} \Phi(x_1 t, y_1 t, z_1 t) dt,$$

dove  $x_1, y_1, z_1$  è il punto inverso de  $x, y, z$  rispetto alla sfera. Il metodo per stabilire questo risultato consiste nello sviluppare la funzione  $\Phi$  in serie di potenze di  $r$ .  $\Phi = \sum A_n r^n S_n$ , dove  $S_n$  è una funzione armonica superficiale e nel ricercare poi

gli sviluppi delle funzioni incognite  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ ,  $\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n S_n$ ,  $\Phi_2 = \Phi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{r^{n+1}} S_n$ ,

in guisa che sulla superficie della sfera  $r = a$  siano soddisfatte le due condizioni  $\Phi_1 = \Phi_2$ ,  $k \partial \Phi_1 / \partial r = \partial \Phi_2 / \partial r$ . La condizione all'infinito  $\Phi_2 \rightarrow \Phi$  è senz'altro soddisfatta dalla serie che si stabilisce a priori per la rappresentazione di  $\Phi_2$ .

*Giovanni Lampariello.*

**Elliott, H. Margaret:** On approximation to functions satisfying a generalized continuity condition. Trans. Amer. math. Soc. **71**, 1—23 (1951).

Sei  $C$  una Jordankurve und  $\bar{C}$  das von  $C$  begrenzte abgeschlossene Gebiet. Unter dem Stetigkeitsmodul  $\omega(\delta)$  einer Funktion  $u(z)$  auf  $C$  wird das Maximum von  $|u(z_1) - u(z_2)|$  verstanden, wenn  $z_1$  und  $z_2$  auf  $C$  liegen und  $|z_1 - z_2| \leq \delta$  ist. Der Zweck der Arbeit ist, die Beziehungen zwischen dem Stetigkeitsmodul von  $u(z)$  auf  $C$  und den durch harmonische Polynome erhaltenen Approximationen von  $u(z)$  in  $C$  zu untersuchen.  $u(z)$  sei harmonisch in den inneren Punkten von  $C$  und stetig in  $C$  und erfülle folgende Bedingung:  $\partial^k u(z) / \partial s^k$ , wo  $s$  die Bogenlänge von  $C$  ist, existiert und ist stetig auf  $C$  mit dem Stetigkeitsmodul  $\omega(\delta) \neq 0$ . Dann gibt es harmonische Polynome  $p_n(z)$   $n$ -ten Grades derart, daß in  $C$   $|u(z) - p_n(z)| \leq M \omega\left(\frac{1}{n}\right) n^k$ , wo  $M$  eine Konstante ist. — Es sei  $\Omega(x)$  eine reelle, nicht-negative, für hinreichend großes  $x$  nicht-

zunehmende Funktion, für welche  $\int_a^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} dx$  konvergiert. Wenn nun die Kurve  $C$  gewissen Regularitätsbedingungen genügt und  $u(z)$  eine Funktion ist, für welche harmonische Polynome  $p_n(z)$  existieren derart, daß  $|u(z) - p_n(z)| \leq \Omega(n)/n^k$  in  $C$ , so ist  $u(z)$  harmonisch innerhalb  $C$  und stetig in  $\bar{C}$  mit dem Stetigkeitsmodul

$$(1) \quad \omega(\delta) \leq L \left\{ \delta \int_a^{a/\delta} \Omega(x) dx + \int_{1/\delta}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} dx \right\},$$

wo  $L$  und  $a$  Konstanten sind und  $a > 1$ ,  $0 < \delta \leq 1/a$ . Wenn  $f(z) = u(z) + i v(z)$ , so existiert  $f^{(k)}(z)$  und ist stetig in  $C$ , und der Stetigkeitsmodul von  $f^{(k)}(z)$  auf  $\bar{C}$  genügt einer Bedingung von der Form (1). — Verf. beweist analoge Sätze, in welchen die Approximation durch gewisse Integrale gemessen wird. In weiteren Sätzen wird der Stetigkeitsmodul auf gewissen außerhalb  $C$  laufenden Kurven betrachtet. Statt  $C$  kann man endlich viele Jordankurven nehmen, welche außerhalb einander liegen, und statt  $u(z)$  kann eine analytische Funktion  $f(z)$  betrachtet werden.

*Kaarlo Veikko Paatero.*

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

**Lehmann, N. Joachim:** Der Zusammenhang allgemeiner Eigenwertaufgaben bei Differentialgleichungen mit der Integralgleichungstheorie. Z. angew. Math. Mech. **31**, 251—253 (1951).

An Stelle der gewöhnlichen Integralgleichungen werden allgemeinere Gleichungen betrachtet:  $y(x) = \lambda (K(x, s); y(s)) - f(x)$ , wobei  $(u; v) = \sum_{v, \varrho=0}^n \left\{ \int u^{(v)} v^{(\varrho)} d\sigma_{v\varrho} \right.$

$\left. + \sum_{i, k} a_{v\varrho}^{i, k} u^{(i)}(x_i) v^{(\varrho)}(x_k) \right\}$  gesetzt ist. Die  $\sigma_{v\varrho}$  sind gegebene Belastungsfunktionen beschränkter Schwankung,  $a_{v\varrho}^{i, k}$  feste Konstanten,  $x_i, x_k$  endlich viele Punkte eines Grundgebietes. Ist  $K(x, s)$  symmetrisch, ferner  $\partial^{v+\varrho} K(x, s) / \partial x^v \partial s^\varrho$  für  $v, \varrho = 0, \dots, n$  im Grundgebiet in beiden Variablen gleichzeitig stetig und gehört der Kern für jede Variable zu einer linearen Funktionengesamtheit  $\mathcal{D}$ , für welche  $(u; v)$  für  $u, v \in \mathcal{D}$  symmetrisch und positiv definit ist, so lassen sich die klassische Integralgleichungstheorie auf die hier betrachteten Gleichungen übertragen und Existenz und Abzählbarkeit der Eigenwerte sowie Entwicklungssätze für iterierte Kerne und quellenmäßig darstellbare Funktionen beweisen. Auf die obige allgemeinere Gleichung lassen sich z. B. die allgemeinen Eigenwertaufgaben  $M[y] = \lambda N[y]$  mit in  $y$  und  $\lambda$  linearen Randbedingungen  $U_\mu[y] = \lambda S_\mu[y]$  unter den üblichen Selbstadjungiertheitsannahmen mit definitivem Differentialoperator  $M$  oder  $N$  transformieren.

*Lothar Collatz.*



Taldykin, A. T.: Zur Theorie der linearen Integralgleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 281—312 (1951) [Russisch].

Verf. verallgemeinert einige Ergebnisse der Theorie von Hilbert-Schmidt, indem er die Voraussetzungen über den Kern abschwächt. Es handelt sich dabei um die bekannten Sätze, die Lösbarkeit von Integralgleichungen und Entwicklungen nach Eigenfunktionen betreffen. Er verwendet dabei früher erhaltene Resultate über Entwicklungen nach nichtorthogonalen Systemen im Hilbertraum (dies. Zbl. 43, 118; Bezeichnungen wie dort). — Von den Kernen wird durchweg vorausgesetzt, daß sie quadratisch integrierbar sind, daß ihre Resolvente nur einfache Pole besitzt und daß sowohl die rechten Eigenfunktionen  $\varphi_i$  als auch die linken Eigenfunktionen  $\psi_k$  ein stark minimales System bilden. (Hier sei daran erinnert, daß ein minimales System  $\{\chi_i\}$  mit geeigneten  $\chi^i$  ein Biorthogonalsystem bildet.) Ferner werden folgende Eigenschaften verwendet: a) Normaler Kern: Sowohl  $\{\varphi_i\}$  als auch  $\{\psi_k\}$  bilden ein normales System. b) Halbnormaler Kern: Eines der Systeme  $\{\varphi_i\}$  oder  $\{\psi_k\}$  ist normal. c) Regelmäßiger (правильный) Kern: Die Biorthogonalentwicklung jeder Funktion  $f \in L^2$  nach dem System  $\{\varphi_i\}$  konvergiert. Dasselbe gilt für  $\{\psi_k\}$ . (Ein normaler Kern ist regelmäßig.) — Verf. untersucht diese 3 Kerntypen in der oben angegebenen Richtung, wobei z. T. noch weitere Bedingungen an die Kerne gestellt werden. Die normalen Kerne verhalten sich in dieser Hinsicht ganz ähnlich wie die symmetrischen.

Karl Zeller.

Landweber, L.: An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. Amer. J. Math. 73, 615—624 (1951).

Per risolvere l'equazione integrale di prima specie (1)  $f(x) = \int_a^b k(x, y) g(y) dy$  l'A. applica il metodo delle approssimazioni successive ponendo  $g_n = g_{n-1} + F - Kg_{n-1}$  e avendo indicato con  $g_0$  una funzione arbitraria e con  $F$  e  $K$  le funzioni  $K(x, y) = \int_a^b k(t, x) k(t, y) dt$ ,  $F = Kg$ . Se la (1) ammette una soluzione  $g$  sviluppabile in media in serie di autosoluzioni del nucleo  $K$  e se è  $\iint k^2(x, y) dx dy \leq 2$  la successione delle  $g_n$  tende in media a  $g$ .

Carlo Miranda.

Magenes, Enrico: Sulle estremanti dei polinomiali nella sfera di Hilbert. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 24—47 (1951).

Für „Polynomiale vom Grade  $n$ “  $P(f) = \sum_{i=1}^n P_i(f)$  mit

$$P_i(f) = \int_{A(i)} K_i(t_1, t_2, \dots, t_i) f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_i) dt_1 dt_2 \cdots dt_i$$

untersucht Verf. die Lage der Extrema bezüglich der Hilbertschen Kugel  $\Gamma_\delta$  [Gesamtheit der Funktionen  $f(t)$  des mit der Fréchet'schen Metrik versehenen Funktionenraums  $\Gamma$ , für die  $\int_A f^2(t) dt \leq \delta^2$  ist]. Für  $n > 2$  kann es vorkommen, daß beide Extrema im Innern von  $\Gamma_\delta$  angenommen werden. Doch gibt Verf. eine Reihe von Kriterien, nach denen unter bestimmten Voraussetzungen über die Kerne  $K_i$  Maximum oder Minimum oder beide stets am Rande angenommen werden. Hieraus kann auf die Existenz von Eigenwerten gewisser nichtlinearer Integralgleichungen geschlossen werden.

Maria Josefa de Schwarz.

Ganin, M. P.: Der äquivalent-regularisierende Operator für ein System von singulären Integralgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 385—387 (1951) [Russisch].

Verf. beweist: Wenn das Integralgleichungssystem

$$K \varphi(t) = A(t) \varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = g(t)$$

$[A(t), B(t), K(t, \tau)]$  gegebene Matrizen, die ebenso wie der gegebene Vektor  $g(t)$  auf dem System  $L$  von geschlossenen ebenen Kurven einer  $H$ -Bedingung genügen;  $K(t, \tau) = K_0(t, \tau)/|t - \tau|^\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ ,  $K_0$  genügt bezüglich beider Variabler einer  $H$ -Bedingung;  $\text{Det}(A + B) \cdot \text{Det}(A - B) \neq 0$  auf  $L$ ] eine Lösung besitzt, so existiert ein äquivalent regularisierender Operator, d. h. ein Operator, welcher das System in ein ihm äquivalentes System von Fredholmschen Integralgleichungen überführt. Er hat die Form

$$P\omega(t) \equiv \frac{1}{2} [S^{-1}(t) + T^{-1}(t)] \omega(t) + \frac{S^{-1}(t) + T^{-1}(t)}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Georg L. Tautz.

Tricomi, F. G.: On the finite Hilbert transformation. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 199—211 (1951).

Die Hilbert-Transformation  $\mathfrak{H}[\varphi] \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy$  und ebenso die endliche

Hilbert-Transformation  $\mathfrak{T}[\varphi] \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy$  (\* bedeutet Hauptwert) genügen

einer Art Faltungssatz: Gehören  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  in  $(-\infty, \infty)$  bzw. zu den Klassen  $L^{p_1}$ ,  $L^{p_2}$  mit  $p_1 > 1$ ,  $p_2 > 1$ ,  $p_1^{-1} + p_2^{-1} < 1$ , so gilt fast überall:

$$\mathfrak{H}\{\varphi_1 \mathfrak{H}[\varphi_2] + \varphi_2 \mathfrak{H}[\varphi_1]\} = \mathfrak{H}[\varphi_1] \mathfrak{H}[\varphi_2] - \varphi_1 \varphi_2.$$

Wendet man diese Formel auf den Fall  $\varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $\varphi_2(x) = \varphi(x)$  an, so

erhält man folgendes Resultat über die Tragflügelgleichung  $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x)$ ,

mit anderen Worten über die Umkehrung der  $\mathfrak{T}$ -Transformation: Wenn die Gleichung eine Lösung aus der Klasse  $L^p$  ( $p > 1$ ) besitzt, so hat diese notwendig die

$$\text{Form } \varphi(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-y^2}}{y-x} f(y) dy + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{mit } C = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \varphi(y) dy.$$

Gehört die gegebene Funktion zur Klasse  $L^p$  mit  $p > \frac{4}{3}$ , so ist  $\varphi(x)$  sicher eine Lösung, und der erste Summand gehört mindestens zur Klasse  $L^{4/3-\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ). Der zweite Summand stellt die eindeutige Lösung der homogenen Gleichung im Raum  $L^p$  ( $p > 1$ ) dar. — Aus der speziellen Transformation

$$\mathfrak{T}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^\alpha\right] = \text{ctg } \alpha \pi \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\alpha - \frac{1}{\sin \alpha \pi}, \quad (0 < |\alpha| < 1),$$

ergibt sich der asymptotische Satz:  $\varphi(x) \in L^p$  ( $p > 1$ ) sei in einer Umgebung von  $x = -1$  in der Form darstellbar:  $\varphi(x) = A(1+x)^{-\alpha} + \psi(x)$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ) mit  $\psi(-1) = 0$  und  $|\psi(x) - \psi(x_0)| < K|x - x_0|^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Dann ist für  $x \rightarrow -1$   $f(x) = \mathfrak{T}[\varphi] = A \text{ctg } \alpha \cdot (1+x)^{-\alpha} + O(1)$  für  $0 < \alpha < 1$ ,  $f(x) = -\frac{A}{\pi} \log(1+x) + O(1)$  für  $\alpha = 0$ .

Gustav Doetsch.

Doetsch, Gustav: Beitrag zur Asymptotik der durch komplexe Integrale dargestellten Funktionen. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 105—119 (1951).

Um asymptotische Entwicklungen im Sinne von Poincaré für Fourier-Integrale, wie sie in der  $L$ -Transformation auftreten, zu gewinnen, knüpft Verf. an einen in seinem Buch bewiesenen Satz an (Theorie und Anwendung der  $L$ -Transformation, Berlin 1937, S. 270). Sei  $W_0$  der Weg, der sich aus dem Kreisbogen  $|s - s_0| = R$ ,  $\text{arc}(s - s_0) \leq \psi$  ( $\pi/2 < \psi < \pi$ ) und den beiden Halbgeraden  $\text{arc}(s - s_0) = \pm \psi$ ,



$|s - s_0| \geq R$  zusammensetzt. Verf. beweist als einfache Folgerung des obigen

Satzes den Entwicklungssatz: Es sei (1)  $F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s) ds$ . Die

Funktion  $f(s)$  sei analytisch in dem Bereich  $B$ , der rechts von der Geraden  $R(s) = x$ , links von dem von einem Punkt  $s_0 [R(s_0) = x_0 < x]$  ausgehenden Strahlen  $s = s_0 + r e^{\pm i\psi}$ ,  $\pi/2 < \psi < \pi$ ,  $r > 0$ , begrenzt ist, einschließlich Rand, aber ohne den Punkt  $s_0$ . Die Funktion verhalte sich im Unendlichen so, daß der Integrationsweg in (1) durch die Kurve  $W_0$  ersetzt werden kann. In der zu  $B$  gehörigen Umgebung von  $s_0$  besitze  $f(s)$  gleichmäßig hinsichtlich  $\arg(s - s_0)$  eine asymptotische

Potenzentwicklung der Form (A)  $f(s) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (s - s_0)^{\lambda_{\nu}}$  ( $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ ; endlich

viele  $\lambda_{\nu}$  können negativ sein) oder (B)  $f(s) \sim \log(s - s_0) \sum_{p=0}^{\infty} c_p (s - s_0)^p$  für  $s \rightarrow s_0$ .

Auf den Strahlen von  $W_0$  sei  $f(s) = O(e^{k|s|})$  für  $|s| \rightarrow \infty$  ( $k > 0$ ). Dann läßt sich

$F(t)$  im Falle (A) in die asymptotische Potenzreihe  $F(t) \sim e^{s_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\Gamma(-\lambda_{\nu})} t^{-\lambda_{\nu}-1}$

für  $t \rightarrow \infty$  entwickeln; hierbei ist  $1/\Gamma(-\lambda_{\nu}) = 0$  für  $\lambda_{\nu} = 0, \dots$  zu setzen, so daß die den Potenzen von  $s - s_0$  mit nichtnegativ ganzzahligen Exponenten

entsprechenden Glieder wegfallen. Im Falle (B) ist  $F(t) \sim -e^{s_0 t} \sum_{p=0}^{\infty} c_p (-1)^p p! t^{-p-1}$

für  $t \rightarrow \infty$ . Verf. untersucht weiterhin die Frage, welche Bedeutung die Existenz weiterer singulärer Stellen von  $f(s)$  außer  $s_0$  für die Asymptotik von  $F(t)$  hat und gibt als Beispiel die asymptotische Entwicklung der Besselfunktion  $I_0(t)$  für reell gegen  $\infty$  laufendes  $t$ .

Walter Saxer.

Doetsch, Gustav: Über die endliche Laplace-Transformation. Math. Ann. 123, 411–414 (1951).

Soit  $f(s)$  une fonction entière qui se laisse représenter, pour  $x = \Re s > x_0 > 0$  dans la forme de l'intégrale de Laplace  $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$ . L'A. démontre le théorème suivant: Si  $|f(s)| \leq M$  pour  $x \geq 0$  et  $|f(s)| \leq M e^{-hx}$  ( $h \geq 0$ ) pour  $x \leq 0$ , on a  $F(t) = 0$  presque partout pour  $t > 0$ . — La démonstration s'appuie sur la formule  $\int_0^t F(\tau) d\tau = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1-i\omega}^{x_1+i\omega} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds$ , où  $x_1 > x_0$ . Soit  $C$  un contour composé de trois segments  $(-i\omega, x_1 - i\omega)$ ,  $(x_1 - i\omega, x_1 + i\omega)$ ,  $(x_1 + i\omega, i\omega)$  et du demi-cercle de rayon  $\omega$  et de centre à l'origine. Alors on a  $\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds = f(0)$ ; d'autre part, si  $\omega \rightarrow \infty$ , les intégrales le long des segments horizontaux et le long du demi-cercle s'annulent lorsque  $t > h$ . Donc  $\int_0^t F(\tau) d\tau = f(0)$  pour  $t > h$ , ce qui entraîne le théorème. — A la fin de l'article l'A. énonce, pour la transformation de Laplace, un théorème qui s'obtient du théorème bien connu de Paley-Wiener (généralisé par Plancherel et Pólya) par la rotation du plan de la variable complexe d'angle droit.

Jan G.-Mikusiński.

Jarník, V.: Sur le produit de composition de deux fonctions continues. Studia math. 12, 58–64 (1951).

L'A. construit effectivement une fonction  $x(t)$  continue pour  $0 \leq t < \infty$  et telle que le produit de composition  $z(t) = \int_0^t x(t-\tau) x(\tau) d\tau$  satisfait (pour

$0 \leq t < \infty$  aux égalités

$$(1) \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = +\infty, \quad \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = -\infty.$$

Cet exemple montre qu'il existe des fonctions continues dont le produit de composition est dépourvu partout de dérivée (sauf au point  $t = 0$ ). L'existence de telles fonctions résulte, pour des intervalles finis, d'un théorème général que l'A. démontre dans la deuxième partie de l'article: Désignons par  $C^2$  l'ensemble des couples  $[x, y]$  de fonctions  $x, y$  continues dans l'intervalle  $\langle 0, 1 \rangle$ . Introduisons dans  $C^2$  la métrique

$$\rho([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \text{Max}(\text{Max}|x_1(t) - x_2(t)|, \text{Max}|y_1(t) - y_2(t)|).$$

Cela posé, il existe un ensemble  $M \subset C^2$  jouissant des propriétés suivantes: 1)  $C^2 - M$  est un ensemble de première catégorie dans  $C^2$  (donc  $M \neq \emptyset$ , car  $C^2$  est complet);

2) si  $x \in M$  et  $y \in M$ , on a (1) pour  $z(t) = \int_0^t x(t-\tau) y(\tau) d\tau$ .

*Jan G. Mikusiński.*

**Cheng, Min-teh:** On a theorem of Nicolesco and generalized Laplace operators. *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 77—86 (1951).

Alcune diverse maniere di definire un laplaciano doppio generalizzato per una funzione di due variabili vengono prese in considerazione, allo scopo di riconoscere se l'annullarsi identicamente di un operatore cosiffatto, per una funzione supposta soltanto continua, oppure continua insieme con le sue derivate parziali del primo, o dei primi due, o tre ordini, è o non è sufficiente ad assicurare la biarmonicità della funzione stessa. Cenno anche al caso di laplaciani multipli.

*Gianfranco Cimmino.*

**Hirschman jr., I. I. and D. V. Widder:** Convolution transforms with complex kernels. *Pacific J. Math.* **1**, 211—225 (1951).

Die Verf. erweitern ihre in früheren Arbeiten behandelte Umkehrung von Faltungstransformationen  $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t) d\alpha(t)$  mit Kernen der Gestalt

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{ts} [E(s)]^{-1} ds, \text{ wo } E(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_k}\right) e^{s/b_k},$$

auf den Fall, daß die  $a_k$  eine komplexe Folge  $a_k = b_k + i c_k$  durchlaufen mit den Eigenschaften  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_k}\right)^2 < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c_k}{b_k}\right)^2 < \infty$ . Die Umkehrungsformel lautet (für Stetigkeitsstellen von  $\alpha$ ):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/b_k} \right] f(x) dx = \alpha(x_2) - \alpha(x_1),$$

wo  $D$  Differentiation und  $e^{D/a}$  Translation um  $1/a$  bedeutet. Dabei muß  $\alpha$  noch gewisse Bedingungen im Endlichen (beschränkte Variation) und im Unendlichen (Abschätzung durch Exponentialfunktionen) erfüllen. Unter engeren Voraussetzungen läßt sich auch eine komplexe Umkehrformel der Gestalt

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} f(\lambda w + x) K(w) dw = \alpha(x_2) - \alpha(x_1)$$

mit  $K(w) = \int_0^\infty e^{-sw} E(s) ds$  beweisen, wo  $C_\lambda$  eine gewisse geschlossene Kurve ist.

*Gustav Doetsch.*

**Carstoiu, Ion:** Un nouveau théorème du produit dans le calcul symbolique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **232**, 1733—1734 (1951).



## Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Aczél, János:** Über Funktionalgleichungen mehrerer Veränderlichen. I. Elementare Lösungsmethoden für Funktionalgleichungen mehrerer Veränderlichen. Mat. Lapok 2, 99—117, russische und deutsche Zusammenfassgn. 117 (1951) [Ungarisch].

Die Arbeit ist ein erster Schritt zur Entwicklung einer allgemeinen Theorie gewisser Typen von Funktionalgleichungen mehrerer Veränderlichen. Der Ausgangspunkt ist die vom Verf. eingeführte Bismmetrie. Die Funktion  $m(x_1, x_2)$  ist eine bismmetrische, falls sie der Funktionalgleichung (1)  $m[m(x_1, x_2), m(x_3, x_4)] = m[m(x_1, x_3), m(x_2, x_4)]$  genügt. Die Nebenbedingungen sind: a)  $m$  ist eine streng monotone und stetige Funktion; b)  $m(x, x) = x$ ; c)  $m(x_1, x_2) = m(x_2, x_1)$ . Die allgemeine Lösung von (1) nebst a), b), c) ist  $m(x_1, x_2) = f^{-1}[\frac{1}{2}\{f(x_1) + f(x_2)\}]$  ( $f$  ist eine beliebige streng monotone und stetige Funktion,  $f^{-1}$  bedeutet ihre Inverse). Wird c) weggelassen, so erhält man als Lösung  $m(x_1, x_2) = f^{-1}[q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)]$  ( $q_1 + q_2 = 1$ , nicht-negative Zahlen). Wird auch die Bedingung b) weggelassen, so erhalten wir als stetige und monotone Lösung von (1) die sog. quasilinearen Funktionen  $m(x_1, x_2) = f^{-1}[p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + p_3]$ . — Eine andere Sorte von Funktionalgleichungen ist (2)  $O(O(x_1, x_2), x_3) = O(x_1, O(x_2, x_3))$ . Die Nebenbedingungen sind: a)  $O$  ist eine monotone und stetige Funktion, b)  $O(x_1, x_2) = O(x_2, x_1)$ . Die allgemeine Lösung von (2) a), b) ist von der Form:  $O(x_1, x_2) = f^{-1}[f(x_1) + f(x_2)]$ . — Endlich wird eine dritte Sorte von Funktionalgleichungen untersucht, die sog. Translationsgleichung: (3)  $T[T(x_1, x_2), x_3] = T[x_1, x_2 + x_3]$ . Die allgemeine streng monotone und stetige Lösung von (3) lautet:  $T(x_1, x_2) = f^{-1}[f(x_1) + x_2]$ . — Die vom Verf. bewiesenen Sätze zeigen die Äquivalenz der axiomatischen und synthetischen Behandlung gewisser Begriffe der Theorie der Operationen.

Stefan Fenyő.

**Halperin, Israel:** Non-measurable sets and the equation  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . Proc. Amer. math. Soc. 2, 221—224 (1951).

Bezeichnet man eine Menge von reellen Zahlen, welche zugleich mit ihrer Komplementärmenge das innere Maß Null besitzt, als „gesättigt nicht meßbar“ oder kurz als  $g$ -Menge (wobei für die Komplementbildung auch ein beliebiges festes halboffenes Intervall  $B$  benutzt werden darf), so gibt Verf. Verfahren an, wie man eine Zerlegung des Zahlenkontinuums (bzw. der Menge  $B$ ) in  $k$  paarweise (translations-)kongruente  $g$ -Mengen finden kann, wo  $k$  eine beliebige unendliche Kardinalzahl ist, welche die des Kontinuums nicht überschreitet. Wesentlich für das Verfahren ist die Benutzung einer geeigneten Hamelschen Basis bei der Konstruktion von diskontinuierlichen Lösungen der Gleichung  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

Georg Tautz.

**Ruston, A. F.:** Direct products of Banach spaces and linear functional equations. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 327—384 (1951).

In Fortsetzung einer vorangehenden Arbeit [Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 109—124 (1951)] wird die volle Fredholmsche Theorie der Integralgleichungen auf Operatoren der „Spurenklasse“ in beliebigen Banachräumen  $\mathfrak{B}$  übertragen. Das 2. Kap. bringt in enger Anlehnung an die Arbeiten von R. Schatten die Theorie der Tensorprodukte von  $n$  Banachräumen.

Auf einem Tensorprodukt  $\bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{B}_i$  wird die Kreuznorm  $\gamma(X) = \inf \sum_{i=1}^m \|x_i^{(1)}\| \cdots \|x_i^{(n)}\|$  er-

klärt, wobei  $\inf$  über alle Darstellungen  $X = \sum_{i=1}^m x_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_i^{(n)}$  zu bilden ist, ebenso die

Kreuznorm  $\lambda\left(\sum_{i=1}^m x_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_i^{(n)}\right) = \sup \frac{\left|\sum_{i=1}^m f^{(1)}(x_i^{(1)}) \cdots f^{(n)}(x_i^{(n)})\right|}{\|f^{(1)}\| \cdots \|f^{(n)}\|}$ , wobei  $\sup$  über alle

$f^{(i)} \in \mathfrak{B}_i^*$  zu nehmen ist,  $\mathfrak{B}_i^*$  zu  $\mathfrak{B}_i$  konjugiert. Es werden eingehende Untersuchungen über diese und andere Kreuznormen angestellt. Durch Vervollständigung nach den Normen  $\gamma$  und  $\lambda$  erhält man aus den Tensorprodukten mit  $n$  gleichen Faktoren  $\mathfrak{B}$  die Banachräume  $\mathfrak{B}_\gamma^n$  bzw.  $\mathfrak{B}_\lambda^n$ . Kap. 3 untersucht die für die Übertragung der Fredholmschen Theorie benötigten  $n$ -Operatoren  $A$ , d. h. lineare stetige Abbildungen von  $\mathfrak{B}_\gamma^n$  in  $\mathfrak{B}_\lambda^n$ .  $A$  heißt schiefssymmetrisch, wenn die zugehörige Bilinearform  $(f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(n)}) A (x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n)})$  schiefssymmetrisch sowohl in den  $x^{(i)} \in \mathfrak{B}$ , wie den  $f^{(j)} \in \mathfrak{B}^*$  ist. Speziell wird mit  $\begin{pmatrix} x^{(1)} \cdots x^{(n)} \\ f^{(1)} \cdots f^{(n)} \end{pmatrix}$  der  $n$ -Operator bezeichnet,

der  $y^{(1)} \otimes \dots \otimes y^{(n)}$  in das Element  $f^{(1)}(y^{(1)}) \dots f^{(n)}(y^{(n)}) x^{(1)} \otimes \dots \otimes x^{(n)}$  überführt. Eine endliche Summe solcher spezieller  $n$ -Operatoren heißt ein ausgearteter Operator  $K$ . Ihm entspricht offenbar ein Element  $\mathfrak{K}$  des Tensorprodukts  $\mathfrak{B}^n \odot (\mathfrak{B}^*)^n$  und umgekehrt. Schließt man  $\mathfrak{B}^n \odot (\mathfrak{B}^*)^n$  ab zum Banachraum  $[\mathfrak{B}^n \odot (\mathfrak{B}^*)^n]_v$ , so entspricht jedem Element  $\mathfrak{K}$  aus diesem Banachraum ein Operator  $X$ , der Limes ausgearteter  $n$ -Operatoren ist. Diese  $X$  bilden die  $n$ -Operatoren der Spurenklasse  $(t^c)^n$ . Wird die Spur durch  $\text{tr} \left( \begin{pmatrix} x^{(1)} & \dots & x^{(n)} \\ f^{(1)} & \dots & f^{(n)} \end{pmatrix} \right) = f^{(n)}(x^{(n)})$

$\begin{pmatrix} x^{(1)} & \dots & x^{(n-1)} \\ f^{(1)} & \dots & f^{(n-1)} \end{pmatrix}$  erklärt, so läßt sich durch Grenzübergang die Spur für alle Operatoren der Spurenklasse erklären. Es sei nun die Gleichung

$$(1) \quad x = y + \lambda K x, \quad x, y \in \mathfrak{B}, \quad K \in (t^c)^n$$

gegeben. Zur Übertragung der Fredholmschen Theorie auf (1) wird ein erheblicher formaler Apparat aufgebaut, von dem wir nur die wichtigsten Definitionen wiedergeben können. Ist  $B$  ein  $l$ -Operator,  $C$  ein  $m$ -Operator, so wird ein  $(l+m)$ -Operator  $B \wedge C$  eingeführt durch

$$B \wedge C = \sum \varepsilon_{r_1 \dots r_l q_1 \dots q_m} (f^{(1)} \otimes \dots \otimes f^{(l)}) B(x^{(r_1)} \otimes \dots \otimes x^{(r_m)}) \\ \times (f^{(l+1)} \otimes \dots \otimes f^{(l+m)}) C(x^{(q_1)} \otimes \dots \otimes x^{(q_m)}),$$

wobei die Summe über alle Permutationen  $r_1 \dots r_l, q_1 \dots q_m$  von  $1, \dots, l+m$  mit  $r_1 < r_2 < \dots < r_l, q_1 < \dots < q_m$  zu erstrecken ist. Es bedeute  $K_0^1 = 1, K_0^v = 0$  für  $v > 1$ , ferner  $K_n^\mu$  für  $n \geq 1$  den Operator  $\sum K^{\mu_1} \wedge \dots \wedge K^{\mu_n}$ , wobei die Summe über alle Systeme positiver ganzer Zahlen  $\mu_i$  mit  $\mu_1 + \dots + \mu_n = v + n - 1$  zu erstrecken ist. Ferner sei  $\sigma_r = \text{tr}(K^r)$ ,  $K$  sei dabei der Operator aus (1). Nach einem Satz von Plemelj über die Entwicklungskoeffizienten der Fredholmschen Minoren wird gesetzt

$$D_n^v = \frac{(-1)^v}{v!} \begin{vmatrix} K_n^1 & v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_n^2 & \sigma_1 & v-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_n^3 & \sigma_2 & \sigma_1 & v-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_n^v & \sigma_{v-1} & \sigma_{v-2} & \sigma_{v-3} & \dots & \sigma_1 & 1 \\ K_n^{v+1} & \sigma_v & \sigma_{v-1} & \sigma_{v-2} & \dots & \sigma_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$D_n^v$  ist als Linearkombination der  $K_n^i$  ein schiefsymmetrischer Operator  $\in (t^c)^n$ . Es sei dann  $D_n(\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v D_n^v$  [ $D_0(\lambda)$  entspricht der Fredholmschen Determinante],  $D_n^v(\lambda) =$

$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \frac{(v+r)!}{v! r!} D_n^{v+r}$ . Ist  $D_0(\lambda) \neq 0$  in (1), so hat (1) die einzige Lösung  $x = y + \lambda \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} y$ . Ist  $D_0(\lambda) = 0$ , so gibt es ganze Zahlen  $\mu(\lambda)$  und  $d(\lambda)$  (Defekt), so daß  $D_n^\mu(\lambda) \neq 0$ , aber  $D_n^v(\lambda) = 0$  für  $v < \mu$  und  $D_n^\mu(\lambda) = 0$  für  $n < d$  ist, und es gibt  $f^{(1)}, \dots, f^{(d)} \in \mathfrak{B}^*$ ,  $x^{(1)}, \dots, x^{(d)} \in \mathfrak{B}$  mit (2)  $(f^{(1)} \otimes \dots \otimes f^{(d)}) D_n^\mu(\lambda) (x^{(1)} \otimes \dots \otimes x^{(d)}) \neq 0$  und es lassen sich durch die  $f^{(i)}$ ,  $x^{(i)}$  und  $D_n^\mu(\lambda)$  alle Lösungen von (1) und der beiden dazugehörigen homogenen Systeme explizit angeben, z. B. erhält man die  $d$  linear unabhängigen Lösungen von  $x = \lambda K x$  in der Form von Quotienten, in deren Nenner (2) steht, im Zähler ebenfalls die Bilinearform (2), in der aber ein  $f^{(j)}$  durch eine freie Variable ersetzt ist.

Gottfried Köthe.

Tropper, A. Mary: A note on reciprocals of infinite matrices. J. London math. Soc. 26, 298—301 (1951).

Nach Pólya besitzt eine unendliche Matrix  $A = (a_{ij})$  unendlich viele rechtsseitige Reziproke, wenn unendlich viele  $a_{1j} \neq 0$  sind und für  $i = 2, 3, \dots$ , stets  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|a_{1j}| + |a_{2j}| + \dots + |a_{i-1,j}|}{|a_{ij}|} = 0$  gilt. Es wird gezeigt, daß keine dieser Reziproken auch linksseitige Reziproke von  $A$  sein kann. Die Borelmatrix  $B = (e^{-i} i/j!)$  hat nach Pólya unendlich viele linksseitige wie rechtsseitige Reziproke. Sie gehört ferner jedem der Matrizenringe  $\Sigma(\sigma_\infty)$ ,  $\Sigma(\sigma_1)$ ,  $\Sigma(H)$  an [ $\Sigma(H)$  der Ring der beschränkten Matrizen,  $\Sigma(\sigma_\infty)$  der Ring der Matrizen, die den Raum der beschränkten Folgen in sich transformieren,  $\Sigma(\sigma_1)$  der dazu transponierte], hat aber in keinem von ihnen eine zweiseitige Reziproke. Dies wird aus allgemeineren Aussagen über die Nichtexistenz zweiseitiger Reziproker in diesen Matrizenringen abgeleitet.

Gottfried Köthe.



Germa, R.-H.: Application de la méthode des fonctions majorantes à des systèmes d'équations récurrentes définissant des fonctions implicites. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 65, 64—70 (1951).

L'A. dà un'estensione, nel campo analitico, del teorema di esistenza delle funzioni implicite, a dei sistemi ricorrenti di infinite equazioni in infinite incognite.

Luigi Amerio.

Dieudonné, Jean: Sur la convergence des suites de mesures de Radon. Anais Acad. Brasileira Ci. 23, 21—38 (1951).

Let  $E$  be a locally compact (= bicomact) space and let  $\mathfrak{M}(E)$  be the set of all continuous real functions on  $E$  such that the closure of the set  $N(f) = E_x(f(x) \neq 0)$  is compact. Let  $\mathfrak{M}(E)$  denote the linear space of all signed Radon measures on  $E$ . If  $\mu \in \mathfrak{M}(E)$ ,  $\mu \geq 0$ , and if  $f \geq 0$  is any function on  $E$ , then  $\mu^*(f)$  denotes the upper integral of  $f$  with respect to  $\mu$ ; if  $f$  is integrable, the  $\mu(f)$  denotes the integral of  $f$  with respect to  $\mu$ . The strong topology in  $\mathfrak{M}(E)$  is determined by pseudonorms  $p_K(\mu) = \text{l. u. b. } |\mu(f)|$  where  $f \in \mathfrak{M}(E)$ ,  $|f| \leq 1$ ,  $N(f) \subset K$ ,  $K$  is compact. The following theorems are proved: (I) Let  $f \geq 0$  be a real function on  $E$ ; the functional  $\mu \rightarrow \mu^*(f)$  [defined on the set  $\mathfrak{M}^+(E)$  of all non-negative measures  $\mu \in \mathfrak{M}(E)$ ] is continuous in the strong topology if and only if  $f$  is bounded and the closure of the set  $N(f)$  is compact. If  $N(f)$  is covered by an enumerable sequence of compact sets, then the functional  $\mu \rightarrow \mu^*(f)$  is lower semi-continuous. (II) If  $\mu_n \in \mathfrak{M}^+(E)$ ,  $\mu_n \leq \mu_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\mu = \sup \mu_n$ , and if  $f \geq 0$  is a real function on  $E$  such that the set  $N(f)$  is covered by an enumerable sequence of compact sets, then the sequence  $\mu_n^*(f)$  converges to  $\mu^*(f)$ . (III) If  $\mu_n \in \mathfrak{M}^+(E)$ ,  $\mu_n \geq \mu_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\mu = \inf \mu_n$ , and if  $f \geq 0$  is a real function on  $E$  such that  $\mu^*(f) < \infty$ , then the sequence  $\mu_n^*(f)$  converges to  $\mu^*(f)$ . The hypotheses about  $f$  in Theorems II and III are essential. — Suppose now that the space  $E$  is compact. Let  $\mu, \mu_n \in \mathfrak{M}(E)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . For a class  $\Phi$  of bounded Borel functions on  $E$ , we write  $\mu = \lim_{\Phi} \mu_n$  if  $\mu(f) = \lim \mu_n(f)$  for every  $f \in \Phi$  [the „weak convergence“ in  $\mathfrak{M}(E)$ ]. The following classes of functions are under consideration:  $\Phi_1$  = the class of all continuous functions;  $\Phi_2$  = the class of all bounded functions such that the set of the points of discontinuity is of measure  $|\mu_n|$  zero for  $n = 1, 2, \dots$  [where  $|\nu|$  denotes the absolute variation of  $\nu \in \mathfrak{M}(E)$ ];  $\Phi_3$  = the class of all semi-continuous functions;  $\Phi_4$  = the class of all bounded Borel functions. Clearly  $\mu = \lim_{\Phi_3} \mu_n$  if and only if  $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$  for every open or closed set  $A \subset E$ ; and analogously,  $\mu = \lim_{\Phi_4} \mu_n$  if and only if  $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$  for every Borel set  $A \subset E$ . If  $\mu = \lim_{\Phi_{i+1}} \mu_n$ , then  $\mu = \lim_{\Phi_i} \mu_n$ . The converse implication does not hold, in general. However, under some additional hypotheses, the  $\Phi_i$ -convergence implies the  $\Phi_{i+1}$ -convergence. For instance: (IV) Let  $\mu = \lim_{\Phi_1} \mu_n$ ; in order that  $\mu = \lim_{\Phi_2} \mu_n$  it is necessary and sufficient that, for every compact set  $K \subset E$  such that  $|\mu_n|(K) = 0$  for  $n = 1, 2, \dots$ , and for every  $\varepsilon > 0$ , there is an open set  $U$  such that  $K \subset U \subset E$  and  $|\mu_n|(H) \leq \varepsilon$  for  $n = 1, 2, \dots$  and for every compact set  $H \subset U - K$ . (V) Let  $\mu = \lim_{\Phi_1} \mu_n$ ; in order that  $\mu = \lim_{\Phi_3} \mu_n$  it is necessary and sufficient that, for every compact set  $K \subset E$  and for every  $\varepsilon > 0$ , there is an open set  $U$  such that  $K \subset U \subset E$  and  $|\mu_n|(H) \leq \varepsilon$  for  $n = 1, 2, \dots$  and for every compact set  $H \subset U - K$ . (VI) If  $\mu = \lim_{\Phi_3} \mu_n$  and if  $|\mu|(E) = \lim |\mu_n|(E)$ , then  $\mu = \lim_{\Phi_4} \mu_n$  [clearly  $|\nu|(E)$  is the norm of  $\nu$  in the Banach space  $\mathfrak{M}(E)$ ]. (VII) If  $E$  is metrizable, then the  $\Phi_3$ -convergence implies the  $\Phi_4$ -convergence. — Finally it is proved that (VIII) if  $\mu_n \in \mathfrak{M}(E)$  is a sequence such that  $\lim \mu_n(A)$  exists and is finite for every closed  $A \subset E$ , then there is a  $\mu \in \mathfrak{M}(E)$  such that  $\mu = \lim_{\Phi_3} \mu_n$ . (IX) If  $\mu_n \in \mathfrak{M}(E)$  and the sequence  $\mu_n(A)$  is bounded for every closed set  $A \subset E$ , then the sequence of norms  $\|\mu_n\| = |\mu_n|(E)$  is bounded.

Roman Sikorski.

Anzai, Hirofada: Ergodic skew product transformations on the torus. Osaka math. J. 3, 83—99 (1951).

$X$  est un espace pourvu d'une mesure  $m$ ,  $\varphi$  une transformation ergodique de  $X$  dans lui-même conservant  $m$ ,  $Y$  est un cercle (droite réelle modulo 1, avec la mesure  $\mu$  de Lebesgue),  $A$  est l'ensemble des applications  $\alpha(x)$  de  $X$  dans  $Y$ . Les transformations considérées par l'A. sont des applications de  $\Omega = X \times Y$  dans lui-même du type  $T(x, y) = (\varphi x, \alpha(x) + y)$ . Il montre que  $T$  conserve en  $\Omega$  la mesure  $\nu$  produit de  $m$  et  $\mu$ .  $\mathcal{E}$  étant le sous-module de  $A$  dont les éléments  $\xi$  sont de la forme  $\xi(x) = \theta(x) - \theta(\varphi x)$  pour un  $\theta \in A$ , l'A. établit que  $1^\circ T$  a la valeur propre  $\lambda$  [c-à-d.  $f(T(x, y)) = e^{2\pi i \lambda} f(x, y)$ ] si et seulement si  $p \alpha(x) - \lambda \in \mathcal{E}$  pour un entier  $p$ .  $2^\circ T$  est ergodique si et seulement si  $p \alpha(x)$  ( $p$  entier  $\neq 0$ ) n'appartient jamais à  $\mathcal{E}$ . — Puis, passant au cas où  $X$  est aussi un cercle et  $\varphi x = x + \gamma$  ( $\gamma$  irrationnel), il établit que  $3^\circ$  Si  $T$  et  $S$  sont deux transformations correspondant à  $\alpha$  et  $\beta$  ( $x$ ), et s'il existe une application de  $\Omega$  sur lui-même, conservant la mesure  $\nu$ , avec  $VTV^{-1} = S$ , alors on a l'une des relations ( $\varepsilon = \pm 1$ )  $\alpha(x) + \varepsilon \beta(x + u) \in \mathcal{E}$  avec  $u \in X$  et  $V$  est de la forme  $V(x, y) = (x + u, \theta(x) - \varepsilon y)$ . La réciproque est vraie. — A toute transformation  $T$  correspond un opérateur unitaire  $U$  sur  $L_2(\Omega)$  considéré comme un espace de Hilbert  $H$ .  $T$  est spectralement

isomorphe à  $S$ , si les opérateurs unitaires  $U$  et  $V$  correspondants vérifient  $V = WUW^{-1}$  où  $W$  est lui aussi unitaire. Les fonctions  $\psi_{p,q}(x,y) = e^{2i\pi(p x + q y)}$  ( $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) forment un système orthonormé complet sur  $H$ .  $H_0$  est le sous-espace engendré par les  $\psi_{p,0}$ ,  $H_0^\perp$  le complémentaire orthogonal de  $H_0$ . — 4° Le spectre d'une  $T$  est un groupe additif à au plus deux générateurs. 5° Le spectre de  $T$  est purement ponctuel, si et seulement si  $\alpha(x) - \lambda \in \Xi$  où  $\lambda$  est un irrationnel non multiple de  $\gamma$ . 6° Si  $T_m$  est la transformation correspondant à  $\alpha(x) = mx$ , où  $m$  est un entier  $\neq 0$ ,  $T_m$  est une transformation ergodique, dont le spectre sur  $H_0^\perp$  est absolument continu. Les  $T_m$  correspondant aux différentes valeurs de  $m$  sont spectralement isomorphes mais ne le sont pas spatialement. Enfin, l'A. étudie le cas où  $\alpha(x)/\varrho$  ( $\varrho$  irrationnel) est la fonction caractéristique d'un intervalle de  $X$  et prouve que dans ce cas il existe des  $T$  pour lesquelles le spectre sur  $H_0^\perp$  n'est pas absolument continu. *André Revuz.*

Walters, Stanley S.: Remarks on the space  $H^p$ . Pacific J. Math 1, 455—471 (1951).

L'A. poursuit l'étude des espaces  $H^p$  ( $0 < p < 1$ ) de fonctions holomorphes pour  $|z| < 1$  (domaine  $\Delta$ ) telles que  $\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty$  (cf. ce Zbl. 40, 62). Dans le présent article, l'A. prouve que toute fonctionnelle linéaire et continue sur  $H^p$  peut se mettre sous la forme

$$\gamma(f) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\theta}) G\left(\frac{r}{\varrho} e^{-i\theta}\right) d\theta, \quad r < \varrho < 1$$

où la fonction  $G$  déterminée sans ambiguïté par  $\gamma$ , est holomorphe dans  $\Delta$  et continue dans  $\bar{\Delta}$ . En outre,  $G$  possède les propriétés suivantes: a) Si  $0 < p < 1/n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ,  $d^{n-1}G(z)/dz^{n-1}$  est continue sur  $\bar{\Delta}$ ; b) Si  $0 < p < 1/2n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $dG(e^{it})/dt$  est continue; c) Si  $0 < p < \frac{1}{2}$ , la série de Taylor de  $G$  converge absolument pour  $|z| = 1$ . — L'A. termine en prouvant le théorème suivant: Une suite  $\{f_n\}$  bornée en  $H^p$  et pour laquelle  $f_n(e^{i\theta})$  converge simplement sur un ensemble de mesure positive de  $(0, 2\pi)$ , converge pour la topologie de la convergence compacte dans  $\Delta$ . *André Revuz.*

Lorentz, G. G.: On the theory of spaces  $\Lambda$ . Pacific J. Math. 1, 411—429 (1951).

Soit  $\varphi(x)$  une fonction  $\geq 0$  décroissante intégrable dans l'intervalle  $(0, l)$ ,  $l < +\infty$ . Soit  $p \geq 1$ . Une fonction  $f(x)$ , mesurable dans  $(0, l)$ , appartient à  $\Lambda(\varphi, p)$  si  $\|f\|_{\Lambda} = \left[ \int_0^l \varphi(x) f^*(x)^p dx \right]^{1/p} < +\infty$  ( $f^*(x)$  est la fonction décroissante dans  $(0, l)$  équimésurable à  $|f(x)|$ );  $\Lambda(\varphi, p)$  est un espace de Banach. Supposons  $p > 1$  et soit  $q$  l'exposant conjugué de  $p$ . Une fonction  $g(x)$ , mesurable dans  $(0, l)$ , appartient à  $\Lambda^*(\varphi, p)$  s'il existe une fonction  $D$  positive décroissante, avec  $\int_0^l \varphi D^q dx < +\infty$  et  $\varphi D \geq g^*$  (i.e.  $\int_0^x \varphi(t) D(t) dt \geq \int_0^x g^*(t) dt$  pour tout  $x$  de  $(0, l)$ ); posons  $\|g\|_{\Lambda^*} = \inf_{\varphi D \geq g^*} \left[ \int_0^l \varphi D^q dx \right]^{1/q}$ ;  $\Lambda^*(\varphi, p)$  est un espace de Banach et la forme bilinéaire  $(f, g) \rightarrow \int_0^l f(x) g(x) dx$  fait de chaque espace le dual de l'autre.

La moitié de l'article est consacrée à des applications: l'A. étudie, en relation avec les espaces  $\Lambda$  et  $\Lambda^*$ , les majorantes de Hardy-Littlewood, et le problème des moments; il donne des conditions suffisantes pour qu'un opérateur intégral soit continu dans  $\Lambda$ . — Diverses extensions sont étudiées, notamment le cas  $l = +\infty$ . Lorsque  $\varphi(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  ( $0 < \alpha < 1$ ),  $\Lambda(\varphi, p)$  est l'espace  $\Lambda(\alpha, p)$  déjà introduit par l'A. (ce Zbl. 35, 356). *Jacques Dixmier.*

Fort jr., M. K.: A note on pointwise convergence. Proc. Amer. math. Soc. 2, 34—35 (1951).

Beweis des Satzes, daß die Menge der stetigen reellen Funktionen  $f$  auf dem



abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  nicht zu einem metrischen Raum gemacht werden kann derart, daß  $\lim d(f_n, f_0) = 0$  äquivalent ist mit der punktweisen Konvergenz der Folge  $(f_n)$  gegen  $f_0$ .

Georg Nöbeling.

Edwards, R. E.: On derivative and translational bases for periodic functions. Proc. Amer. math. Soc. 2, 644—653 (1951).

Nach Hartman und Wintner (dies. Zbl. 35, 335) sind die Funktionen  $f, f', f'', \dots$  fundamental im Sinne gleichmäßiger Konvergenz unter allen stetigen Funktionen mit der Periode  $2\pi$ , wenn  $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(n) e^{inx}$  eine analytische periodische Funktion mit  $F(n) \neq 0$  für alle

$n$  ist. In der vorliegenden Arbeit wird „analytisch“ durch „quasi-analytisch“ ersetzt und außerdem das entsprechende Problem für eine aus Translationen bestehende Basis betrachtet.  $E$  sei der Banachsche Raum aller stetigen Funktionen mit der Periode  $2\pi$ , wobei die Norm  $\|f\|$  durch  $\sup f(x)$  definiert ist.  $F(n)$  sei der  $n$ -te Fourierkoeffizient von  $f(x)$ .  $P(f)$  und  $D(f)$  seien die abgeschlossenen Vektorräume, die durch alle Funktionen  $e^{inx}$ , für die  $F(n) \neq 0$  ist, bzw. durch die Folge  $f, f', f'', \dots$  aufgespannt werden. Wenn  $A$  eine reelle Zahlenmenge ist, so sei  $T(A, f)$  der abgeschlossene Vektorraum, der durch alle Translationen  $f_t(x) = f(x+t)$ ,  $t \in A$ , aufgespannt wird. Wenn  $A$  alle reellen Zahlen mod.  $2\pi$  enthält, wird  $T(f)$  statt  $T(A, f)$  geschrieben. Satz 1. Für jedes  $f \in E$  ist  $T(f) = P(f)$ . — Auf Grund bekannter Sätze, die das Zusammenfallen von  $T$  und  $P$ , bzw.  $D$  und  $P$  mit der Quasianalytizität der dualen Klasse  $E'$  von  $E$  in Zusammenhang bringen, wird bewiesen: Satz 3.  $p(u)$  habe die Eigenschaft, daß  $up'(u) \uparrow + \infty$

für  $u \rightarrow +\infty$  und daß  $\int_1^{\infty} p(u) \frac{du}{u^2} = +\infty$  ist. Ist  $f \in E$  so beschaffen, daß  $|F(\pm n)| < e^{-p(n)}$ ,

so ist  $D(f) = P(f)$ . Satz 4. Ist  $f \in E$  analytisch, so ist  $T(A, f) = D(f) = P(f)$ , vorausgesetzt, daß  $A$  wenigstens einen endlichen Häufungspunkt hat. Verf. behandelt dann noch ein Problem, das zu dem vorhergehenden komplementär und bisher kaum untersucht ist, nämlich die Frage „freier“ Translationssysteme. (Eine Untermenge  $F$  von  $E$  heißt frei, wenn jedes  $f \in F$  nicht zu dem abgeschlossenen Vektorraum gehört, der durch die Untermenge  $F - \{f\}$  aufgespannt wird.)

Gustav Doetsch.

Edwards, R. E.: Multiplicative norms on Banach algebras. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 473—474 (1951).

Let  $X$  be a Banach algebra (real or complex). The author proves that if for every regular element  $x$  we have  $\|x^{-1}\| = \|x\|^{-1}$ , then every element different from 0 is regular. If  $X$  is, moreover, complex, then it is isomorphic to the algebra of the complex numbers. These results may be considered as a sharpening of a theorem of Mazur [C. r. Acad. Sci., Paris 207, 1025—1027 (1938), this Zbl. 20, 201] under more restrictive hypothesis relatively to  $X$ . The author discusses also under which circumstances the above results hold also for the topological algebras.

Andrzej Alexiewicz.

Tate, John: On the relation between extremal points of convex sets and homomorphisms of algebras. Commun. pure appl. Math. 4, 31—32 (1951).

$A$  est une algèbre commutative sur le corps  $R$  des réels, possédant une unité 1, et telle que pour tout  $a \in A$ ,  $1 + \varepsilon a$  possède une racine carrée pour  $\varepsilon \in R$  assez petit.  $K$  est l'ensemble convexe des fonctionnelles linéaires  $\lambda$  sur  $A$  telles que  $\lambda(a^2) \geq 0$  pour tout  $a \in A$  et  $\lambda(1) \leq 1$ . L'A. établit: Les points extrémaux de  $K$  sont les homomorphismes de  $A$  dans  $R$ . Ceci s'applique en particulier à l'algèbre des fonctions continues réelles définies sur un compact et à toute algèbre de Banach.

André Revuz.

Phillips, R. S.: On one-parameter semi-groups of linear transformations. Proc. Amer. math. Soc. 2, 234—237 (1951).

$X$  est un espace de Banach,  $A$  est l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur  $X$ . Un semi-groupe d'opérateurs à un paramètre de  $A$  est une application  $T(\xi)$  de  $(0, \infty)$  dans  $A$  telle que  $T(\xi_1 + \xi_2)x = T(\xi_1)T(\xi_2)x$ .  $T(\xi)$  est fortement mesurable si pour tout  $x$ ,  $T(\xi)x$  est la limite d'une suite de „step-functions“ (cf. E. Hille, Functional analysis and semi-groups, New York 1948, p. 36—38; ce Zbl. 33, 65). Dunford (ce Zbl. 19, 266) et Hille (loc. cit.) ont montré que si  $T(\xi)$  est fortement mesurable et si  $\|T(\xi)\|$  est borné dans tout intervalle

$(\delta, 1/\delta)$ ,  $T(\xi)x$  est continue pour  $\xi > 0$ . L'A. prouve que la première hypothèse entraîne la seconde et montre par un contre-exemple que la mesurabilité faible [c'est-à-dire celle de la fonction numérique  $f(T(\xi)x)$ , où  $f$  est une fonctionnelle linéaire sur  $X$ ] ne suffit pas à entraîner la même conséquence. *André Revuz.*

**Kadison, Richard V.: Order properties of bounded self-adjoint operators.** Proc. Amer. math. Soc. **2**, 505—510 (1951).

Es sei  $\mathfrak{S}$  der reelle lineare Raum der beschränkten selbstadjungierten Operatoren des Hilbertschen Raumes  $\mathfrak{H}$ .  $\mathfrak{S}$  ist ein teilweise geordneter Vektorraum bei der Festsetzung  $A \geq 0$ , wenn  $(Ax, x) \geq 0$  ist für alle  $x \in \mathfrak{H}$ . Ein teilweise geordneter Vektorraum heißt ein Antiverband, wenn zwei Elemente  $a, b$  nur dann eine größte untere Schranke haben, wenn  $a \leq b$  oder  $b \leq a$  gilt. Es wird bewiesen, daß  $\mathfrak{S}$  ein Antiverband ist. Darüber hinaus wird gezeigt, daß die Faktoren im Sinne von von Neumann sich als diejenigen  $W^*$ -Algebren (d. h. schwach abgeschlossenen selbstadjungierten Operatoralgebren) mit Einheitsoperator charakterisieren lassen, die Antiverbände sind. *Gottfried Köthe.*

**Kaplansky, Irving: A theorem on rings of operators.** Pacific J. Math. **1**, 227—232 (1951).

L'A. prouve le théorème suivant, annoncé antérieurement (ce Zbl. **37**, 205): soit  $H$  un espace hilbertien,  $M$  et  $N$  des  $*$ -algèbres d'opérateurs sur  $H$ ,  $M \subset N$ , avec  $M$  fortement dense dans  $N$ . Alors la boule unité de  $M$  est fortement dense dans celle de  $N$ . Ceci résout affirmativement un problème posé par von Neumann [Math. Ann. **102**, 370—427 (1929)]. Parmi les autres résultats, notons celui-ci: si  $h(t)$  est une fonction numérique continue bornée de la variable réelle  $t$ , l'application  $A \rightarrow h(A)$  est fortement continue sur l'ensemble des opérateurs self-adjoints de  $H$ . *Jacques Dixmier.*

**Pallu de la Barrière, Robert: Algèbres unitaires et espaces de Ambrose.** C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 997—999 (1951).

L'A. établit que certains axiomes utilisés par W. Ambrose dans sa théorie des  $H$ -systèmes (ce Zbl. **32**, 356) sont surabondants. Il en résulte une simplification de la théorie, et plusieurs conséquences nouvelles. L'espace  $L^2$  sur un groupe localement compact unimodulaire, muni du produit de composition, satisfait aux axiomes abstraits. *Jacques Dixmier.*

**Pallu de la Barrière, Robert: Décomposition des opérateurs non bornés dans les sommes continues d'espaces de Hilbert.** C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 2071—2073 (1951).

L'A. annonce (sans démonstration) des résultats concernant les sommes continues d'espaces hilbertiens (au sens de R. Godement, ce Zbl. **42**, 346); ces résultats généralisent aux opérateurs fermés les théorèmes de décomposition connus pour les opérateurs bornés. Ils sont appliqués à la décomposition des algèbres hilbertiennes de classe finie (cf. la Note de l'A., ce Zbl. **42**, 350) en algèbres hilbertiennes irréductibles (i. e., engendrant des facteurs). *Jacques Dixmier.*

**Segal, I. E.: Decompositions of operator algebras. I.** Mem. Amer. math. Soc. Nr. **9**, 67 p. (1951).

Die Arbeit gibt eine neue Methode der Zerlegung eines Operatorertringes in ein direktes Integral über einfachere Operatorertringe, speziell über Faktoren. Die Methode ist einfacher als die von Neumannsche und beruht auf der Theorie der Zustände (Segal, dies. Zbl. **31**, 360). Der Hilbertsche Raum  $H$  wird nicht als separabel vorausgesetzt. Ein Zustand  $\omega$  einer  $C^*$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  ist ein lineares Funktional  $\omega$  auf  $\mathfrak{A}$  mit  $\omega(U^*U) \leq 0$ ,  $\omega(U^*) = \overline{\omega(U)}$  für alle  $U \in \mathfrak{A}$  und  $\sup_{\|U\|=1} \omega(U^*U) = 1$ . Zu jedem  $\omega$  gehören eindeutig eine Darstellung  $\varphi$  von  $\mathfrak{A}$  durch beschränkte

Operatoren eines Hilbertschen Raumes  $H$ , eine stetige und lineare Abbildung  $\eta$  von  $\mathfrak{A}$  in einen dichten Teilraum von  $H$ , schließlich ein  $z \in H$  mit  $\|z\| = 1$ , so daß  $(\eta(U), \eta(V)) = \omega(V^*U)$  für alle  $U, V \in \mathfrak{A}$  gilt, ferner  $\varphi(U)\eta(V) = \eta(UV)$ ,  $\omega(U) = (\varphi(U)z, z)$ ,  $\eta(U) = Uz$ ,  $z$  heißt zyklisch, wenn  $\varphi(\mathfrak{A})z$  in  $H$  dicht ist. Es werden ferner reguläre Maße  $r(R)$  auf lokalkompakten Räumen  $R$  betrachtet, die auf dem  $\sigma$ -Ring  $\mathfrak{R}$ , erzeugt durch die kompakten Teilmengen von  $R$ .



erklärt sind mit  $r(R) < \infty$ . Ein solcher Maßraum  $(R, \mathfrak{R}, r)$  heißt perfekt, wenn jede beschränkte meßbare Funktion auf  $R$  fast überall gleich einer stetigen Funktion ist. Ein Hilbertscher Raum  $H$  heißt schwaches direktes Integral  $\int_R H_p dr(p)$ , wenn über einem Maßraum  $M = (R, \mathfrak{R}, r)$

jedem  $p \in R$  ein Hilbertscher Raum  $H_p$  zugeordnet ist, so daß gilt: Den  $x \in H$  sind Funktionen  $x(p) \in H_p$  zugeordnet, aus  $z = \alpha x + \beta y$  folgt, daß  $(x(p), y(p))$  auf  $M$  integrabel ist, es gilt  $\int (x(p), y(p)) dr(p) = (x, y)$ , und es ist für fast alle  $p \in R$   $z(p) = \alpha x(p) + \beta y(p)$ ; ist ferner

für eine Funktion  $z(p) \in H_p$   $(x(p), z(p))$  für alle  $x \in H$  meßbar und  $(z(p), z(p))$  auf  $M$  integrabel, so existiert ein  $z' \in H$  mit  $(z'(p), x(p)) = (z(p), x(p))$  fast überall auf  $M$  für alle  $x \in H$ . Das Integral heißt stark, wenn die letzte Bedingung durch „ $z'(p) = z(p)$  fast überall auf  $M$ “ ersetzt wird. — Es wird zuerst folgende Zerlegung für die Zustände einer  $C^*$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  in ein Integral über einfachere Zustände über einen Maßraum über dem Spektrum einer gegebenen kommutativen  $W^*$ -Algebra in  $\mathfrak{A}$  abgeleitet:  $C$  sei eine kommutative  $W^*$ -Algebra auf  $H$ ,  $\mathfrak{A}$  eine  $C^*$ -Algebra in  $C'$ ,  $z \in H$  zyklisch für  $\mathfrak{A}$ . Es gibt dann eine schwach stetige Abbildung  $\gamma \rightarrow \omega_\gamma$ ,  $\gamma$  im Spektrum  $\Gamma$  von  $C$ ,  $\omega_\gamma$  im konjugierten Raum zu  $\mathfrak{A}$ , ferner ein perfektes Maß  $\mu$  auf  $\Gamma$ , so daß für jedes  $X \in \mathfrak{A}$  und jedes  $S \in C$  gilt  $(SXz, z) = \int_\Gamma S(\gamma) \omega_\gamma(X) d\mu(\gamma)$ , wobei  $S(\gamma)$  die  $S$  bei

dem Isomorphismus von  $C$  mit der Algebra aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf  $\Gamma$  zugeordnete Funktion ist; es ist ferner  $\omega_\gamma$  fast überall ein Zustand, sogar stets ein Zustand, wenn  $\mathfrak{A}$  die Identität enthält. Aus dieser Zerlegung der  $(SXz, z)$  ergibt sich dann weiter: Sind  $H_\gamma, \varphi_\gamma, \eta_\gamma$  und  $z_\gamma$  der zu dem Zustand  $\omega_\gamma$  gehörige Darstellungsraum usw., so wird  $H$  das schwache (ist  $\mathfrak{A}$  separabel in der uniformen Topologie, sogar das starke) direkte Integral der  $H_\gamma$ , ferner ist für jedes  $U \in \mathfrak{A}$   $U = \int_\Gamma \varphi_\gamma(U) d\mu(\gamma)$ ,  $Uz = \int_\Gamma \eta_\gamma(U) d\mu(\gamma)$ . Jeder Operator  $T$ , der nach

dem direkten Integral zerlegbar ist, sich also schreiben läßt als  $\int_\Gamma T(\gamma) d\mu(\gamma)$ ,  $T(\gamma)$  Operator

in  $H_\gamma$ , liegt in  $C'$ ;  $T(\gamma)$  ist diagonalisierbar (fast überall ein Skalar) dann und nur dann, wenn  $T$  in  $C$  liegt. Ferner gilt, daß die Darstellung  $\varphi_\gamma$  fast überall irreduzibel ist, wenn  $C$  maximal abelsch ist. Zum Beweise dieses Satzes wird das Lemma benützt: Bildet  $f$  den kompakten metrischen Raum  $C$  stetig in einen ebensolchen Raum  $D$  ab und ist  $E$  eine offene Teilmenge von  $C$ , so existiert eine Borelfunktion  $g$  von  $f(E)$  nach  $C$  mit  $g(y) \in f^{-1}(y) \cap E$  für alle  $y \in f(E)$ . — Anwendungen dieser Ergebnisse: 1. Jeder schwach abgeschlossene selbstadjungierte Operatorenring  $\mathfrak{A}$  mit Einheitsoperator in einem separablen  $H$  ist ein direktes Integral  $\int \mathfrak{A}_p dr(p)$  von Faktoren  $\mathfrak{A}_p$  bezüglich einer Zerlegung  $H = \int H_p dr(p)$  als starkes direktes

Integral; die diagonalisierbaren Operatoren bilden gerade das Zentrum  $C$  von  $\mathfrak{A}$ . 2. Jede meßbare unitäre Darstellung  $U$  einer separablen lokalkompakten Gruppe  $G$  in  $H$  ist ein direktes Integral stark stetiger irreduzibler unitärer Darstellungen von  $G$  [es existiert eine Zerlegung  $H = \int H_p dr(p)$ , nach der für jedes  $a \in U(a)$  zerlegbar ist, und es gibt für fast alle  $p$  eine irreduzible unitäre Darstellung  $U_p$ , so daß  $U_p(a)$  die Zerlegung von  $U(a)$  ist]. 3. Ein reguläres Maß  $m$  auf einem kompakten metrischen Raum  $M$ , das bezüglich einer Gruppe  $G$  von Homöomorphismen invariant ist, läßt sich als direktes Integral  $m(E) = \int m_p(E) dr(p)$  von  $G$ -ergodischen regulären Maßen auf  $M$  schreiben. Weitere Sätze über die Zerlegung zweiseitiger unitärer Darstellungen separabler unimodularer lokalkompakter Gruppen in irreduzible.

Gottfried Köthe.

Segal, I. E.: Decompositions of operator algebras. II.: Multiplicity theory. Mem. Amer. math. Soc. Nr. 9, 66 p. (1951).

Im ersten Teil werden die allgemeinsten kommutativen  $W^*$ -Algebren  $\mathfrak{A}$  durch unitäre Invarianten charakterisiert. Ein Maßraum  $M = (R, \mathfrak{R}, r)$  heißt lokalisabel, wenn der Verband der meßbaren Mengen modulo dem Ideal der Nullmengen vollständig ist. Multipliziert man die Elemente des Hilbertschen Raumes  $L_2(M)$  der komplexwertigen, quadratisch integrierbaren Funktionen auf  $M$  mit allen beschränkten meßbaren Funktionen, so bilden diese Operatoren eine maximale abelsche selbstadjungierte (masa) Algebra  $\mathfrak{M}(M)$  auf  $L_2(M)$ . Eine beliebige masa-Algebra von Operatoren auf einem (nicht als separabel vorausgesetzten) Hilbertschen Raum  $H$  ist stets unitär äquivalent einer solchen Algebra  $\mathfrak{M}(M)$  auf einem lokalisablen  $M$ . Die  $n$ -fache Kopie  $\mathfrak{A}$  einer Operatoralgebra  $\mathfrak{B}$  ist für beliebige Kardinalzahlen  $n$  so erklärt:  $S$  sei eine Menge der Kardinalzahl  $n$ ,  $H$  der Hilbertsche Raum aller auf  $S$  erklärten Funktionen  $f(x)$  mit Werten in einem Hilbertschen Raum  $K$ , für die  $\sum_{x \in S} \|f(x)\|^2$  konvergiert und  $(f, g) = \sum_x (f(x), g(x))$  ist;  $\mathfrak{A}$  ist dann die Algebra aller  $A$  auf  $H$  mit  $(Af)(x) = Bf(x)$ ,  $B \in \mathfrak{B}$ . Eine

kommutative  $W^*$ -Algebra hat die gleichmäßige Vielfachheit  $n$ , wenn sie der  $n$ -fachen Kopie einer masa-Algebra unitär äquivalent ist. Es wird nun gezeigt, daß es zu jeder kommutativen  $W^*$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  auf  $H$  und jeder Kardinalzahl  $n \geq 0$  eine eindeutig bestimmte maximale Pro-

jektion  $P_n \in \mathfrak{A}$  gibt, so daß die Kontraktion von  $\mathfrak{A}$  auf  $P_n H$  von gleichmäßiger Vielfachheit  $n$  ist; die Vereinigung der paarweise orthogonalen  $P_n$  ist die Identität. Diese Zerlegung ermöglicht folgende Charakterisierung von  $\mathfrak{A}$ : Es sei  $B(n)$  der Boolesche Ring aller Projektionen der Kontraktion von  $\mathfrak{A}$  auf  $P_n H$ . Zwei kommutative  $W^*$ -Algebren auf  $H$  sind dann und nur dann unitär äquivalent, wenn die  $B(n)$  für jedes  $n$  algebraisch isomorph sind und die Teilräume, die von den Algebren annulliert werden, gleichdimensional sind. Die  $B(n)$  sind also Verbände isomorph vollständigen Maßringen und können nach D. Maharam [Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 108—111 (1942)] klassifiziert werden. Jedes  $B(n)$  ist so die Vereinigung von Maßräumen  $I^p$ ,  $I$  der Lebesguesche Maßraum auf dem Einheitsintervall,  $p$  eine Kardinalzahl;  $B(n)$  kann charakterisiert werden durch eine Funktion  $F(p, n)$ , die für jedes  $p$  die Anzahl der  $I^p$  in  $B(n)$  angibt. Umgekehrt gibt es zu jeder solchen Funktion  $F(p, n)$ , die für genügend großes  $n$  verschwindet, eine kommutative  $W^*$ -Algebra mit diesen unitären Invarianten. Die vollständigen unitären Invarianten eines selbstadjungierten Operators (Wecken, Plessner und Rochlin) werden anschließend neu hergeleitet. Ferner wird gezeigt, daß jede kommutative  $W^*$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  einer maximalen abelschen  $W^*$ -Algebra  $\mathfrak{M}$  algebraisch isomorph ist; diese Isomorphie  $\varphi$  ist beiderseits schwach stetig, und es ist  $\varphi(f(T)) = f(\varphi(T))$  für jede Bairesche Funktion  $f$ .  $\mathfrak{M}$  ist bis auf unitäre Äquivalenz bestimmt, und die Dimension des Hilbertschen Raumes von  $\mathfrak{M}$  ist nicht größer als die des Raumes von  $\mathfrak{A}$ . Daraus ergibt sich das Resultat von von Neumann, daß in jeder kommutativen  $W^*$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  auf einem separablen  $H$  ein selbstadjungierter Operator  $T$  existiert, dessen Bairesche Funktionen die Elemente von  $\mathfrak{A}$  bilden. Durch Einführung des Begriffs einer erweiterten Baireschen Funktion wird gezeigt, daß allgemein jedes Element einer  $W^*$ -Algebra, die durch eine selbstadjungierte Transformation  $T$  und die Identität erzeugt wird, eine erweiterte Bairesche Funktion von  $T$  ist. — Im zweiten Teil wird eine Zerlegung beliebiger nichtkommutativer  $W^*$ -Algebren  $\mathfrak{A}$  erhalten.  $\mathfrak{A}$  hat die minimale Vielfachheit  $n$ , wenn  $n$  die obere Grenze der Kardinalzahlen  $m$  ist, zu denen es  $m$  paarweise orthogonale Projektionen  $P_\mu$  in  $\mathfrak{A}$  gibt, so daß die Kontraktion von  $\mathfrak{A}$  auf  $P_\mu H$  ein algebraischer Isomorphismus ist.  $\mathfrak{A}$  hat die gleichmäßige Vielfachheit  $m$ , wenn für jede Projektion  $P$  im Zentrum von  $\mathfrak{A}$  die Kontraktion von  $\mathfrak{A}$  auf  $PH$  die minimale Vielfachheit  $n$  hat. Diese Definition stimmt im kommutativen Fall mit der früheren überein. Es gibt nun zu jeder  $W^*$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  und jeder Kardinalzahl  $n$  eine Projektion  $P_n$  im Zentrum von  $\mathfrak{A}$ , so daß die  $P_n$  paarweise orthogonal sind und die Vereinigung  $I$  haben, und so, daß die Kontraktion von  $\mathfrak{A}$  auf  $P_n H$  die gleichmäßige Vielfachheit  $n$  besitzt. Eine  $W^*$ -Algebra hat dann und nur dann die gleichmäßige Vielfachheit 1, wenn  $\mathfrak{A}$  kommutativ ist. Damit ergibt sich über die unitäre Klassifikation der  $\mathfrak{A}$  eine solche der  $\mathfrak{A}$  von der Vielfachheit 1. Hat  $\mathfrak{A}$  endliche gleichmäßige Vielfachheit  $n$ , so ist  $\mathfrak{A}$  eine  $n$ -fache Kopie einer bis auf unitäre Äquivalenz bestimmten Algebra der Vielfachheit 1, damit sind auch diese Algebren klassifizierbar. Durch Zerlegung in Algebren der eben betrachteten Art gelingt es dem Verf. noch, für eine umfassendere Klasse von  $W^*$ -Algebren, die vom Typ I, die im wesentlichen direkte Integrale über Faktoren vom Typus I sind, eine volle unitäre Äquivalenztheorie abzuleiten.

Gottfried Köthe.

**Heinz, Erhard:** Zur Theorie der Hermiteschen Operatoren des Hilbertschen Raumes. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math. phys.-chem. Abt. 1951, Nr. 2, 4 S. (1951).

Es werden bemerkenswert kurze und durchsichtige Beweise gegeben für folgende Sätze: I. Sei  $H$  ein in  $\mathfrak{D}$  hermitescher abgeschlossener Operator mit den Defektindizes  $(m, m)$  ( $1 \leq m < \infty$ ). Dann gilt 1. Je zwei selbstadjungierte Fortsetzungen von  $H$  besitzen dieselben Häufungspunkte des Spektrums. 2. Ist  $(Hu, u) \geq c(u, u)$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{D}$ , so besteht das Spektrum jeder selbstadjungierten Fortsetzung  $A$  von  $H$  unterhalb von  $\lambda = c$  aus höchstens  $m$  Punkteigenwerten (ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt); auch  $A$  ist also halbbeschränkt nach unten. — 1. und die letzte Aussage von 2. waren bisher nur für gewöhnliche Differentialoperatoren bekannt [H. Weyl, Math. Ann. 68, 220—269 (1910), Satz 8; F. Rellich, Math. Ann. 122, 343—368 (1950), § 4]. — II. Sei  $H$  ein in  $\mathfrak{D}$  hermitescher abgeschlossener Operator mit den Defektindizes  $(m, n)$ ,  $H^*$  die Adjungierte zu  $H$ . Dann gilt: 1. Bedeutet  $l_z$  die Anzahl linear unabhängiger Lösungen von  $H^*f = zf$ , so ist  $l_z = m$  für  $\text{Im } z > 0$  und  $l_z = n$  für  $\text{Im } z < 0$ . 2. Hat man außerdem  $\|(H - \lambda_0)f\| \geq d\|f\|$  für alle  $f$  aus  $\mathfrak{D}$  für ein reelles  $\lambda_0$  und  $d > 0$ , so ist  $m = n = l_{\lambda_0}$ . [zu 1. vgl. J. v. Neumann, Math. Ann. 102, 49—131 (1929), insbes. S. 89; zu 2. vgl. J. W. Calkin, dies. Zbl. 24, 123].

Friedrich Wilhelm Schöfke.

**Fuglede, Bent and Richard V. Kadison:** On a conjecture of Murray and von Neumann. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 420—425 (1951).



Ein Operatorenring  $R$  (schwach abgeschlossener selbstadjungierter Ring beschränkter Operatoren, den Einheitsoperator enthaltend) heißt normal, wenn  $(S'_R)'_R = S$  für jeden Teilring  $S \subset R$  gilt,  $S'_R$  die Menge aller Elemente von  $R$ , die mit allen Elementen von  $S$  vertauschbar sind. Eine Vermutung von Murray und von Neumann besagt, daß kein Faktor (im Sinn von von Neumann) vom Typus II normal ist, sie wurde von ihnen für alle approximativ endlichen Faktoren vom Typus  $II_1$  bewiesen. Verff. zeigen zuerst, daß es in jedem Faktor  $R$  vom Typus  $II_1$  einen maximalen approximativ endlichen Teilfaktor  $S$  gibt, für den  $(S'_R)'_R \neq S$  ist. Für Faktoren vom Typus  $II_\infty$  läßt sich die Vermutung dann ebenfalls bestätigen, so daß das Problem vollständig gelöst ist.

Gottfried Köthe.

Schwarz, Ludwig: Bemerkung zu der Note von G. Herglotz „Eine Formel der formalen Operatorenrechnung“ [Math. Ann. 122, 14—15 (1950)]. Math. Ann. 123, 406—410 (1951).

Die in der zitierten Note von Herglotz (dies. Zbl. 36, 356) abgeleitete Formel wird auf anderem Wege in verallgemeinerter Form bewiesen: Ist  $D_x$  der Operator

$\frac{d}{dx}$ ,  $\theta_x = x D_x$  und ist  $f(t) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v t^v$  eine ganze Funktion, so wird  $f(t\theta) = \sum_{v=0}^{\infty} j_v(t) \cdot x^v D^v$ , wobei die  $j_v(t)$  aus der erzeugenden Funktion  $g(t, s) = \sum_{v=0}^{\infty} j_v(t) s^v$

durch  $g(t, s) = e^{-s} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} f(vt) s^v$  zu bestimmen sind.

Gottfried Köthe.

Taldykin, A. T.: Systeme von Elementen des Hilbertschen Raumes und Reihen nach ihnen. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 79—120 (1951) [Russisch].

Im Anschluß an zwei Arbeiten von Lewin [Math. Z. 32, 491—511 (1930); Recueil math. Moscou (Mat. Sbornik) 39, IV, 3—72 (1932); dies. Zbl. 7, 69] behandelt Verf. Reihenentwicklungen nach nicht notwendig orthogonalen Systemen  $\{\varphi_i\}$  in einem Hilbertraum. Sei  $\Phi = \{(\varphi_i, \varphi_k)\}$ ;  $\Phi_{[n]}$  die aus den  $n$  ersten Zeilen und Spalten von  $\Phi$  bestehende Matrix. Verf. verwendet zur Einteilung der Systeme folgende Gesichtspunkte: a)  $\Phi$  ist beschränkt; b)  $\Phi$  ist selbstadjungiert; c) Die Zeilen von  $\Phi$  gehören  $l_2$  an. Ferner heißt ein System minimal, wenn bei Wegnahme eines beliebigen  $\varphi_j$  die lineare abgeschlossene Hülle verkleinert wird. Dabei wird noch unterschieden: 1. Stark minimal: Die Menge der Eigenwerte der Matrizen  $\Phi_{[n]}$  hat Null nicht zum Berührungspunkt; 2. Schwach minimal: Null ist Berührungspunkt dieser Menge. — Verf. befaßt sich näher mit den genannten Eigenschaften und beweist unter verschiedenen Voraussetzungen gewisse Sätze über die Konvergenz von Koeffizientenreihen und Entwicklungen (auch nach dem „adjungierten“ System), die bei orthogonalen Systemen geläufig sind. — Besonders wichtig sind die „normalen“ Systeme [mit den Eigenschaften 1. und a); für diese gilt u. a. ein Analogon zum Satz von Riesz-Fischer] und die „regulären“ Systeme [mit den Eigenschaften 1. und b)]. — Die meisten der Ergebnisse hat Verf. früher in verkürzter Form veröffentlicht (dies. Zbl. 23, 132; sowie Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 39, 125—128, 170—172 (1943)).

Karl Zeller.

Amemiya, Ichiro: On the equi-continuity in semi-ordered linear spaces. Proc. Japan Acad. 27, 275 (1951).

Von H. Nakano (Modulated semi-ordered linear spaces, Tokyo 1950; dies. Zbl. 41, 234) wurde bewiesen, daß in einem halbgeordneten universal stetigen und halbbregulären linearen Raum  $R$  die gleichgradige Stetigkeit und die universale gleichgradige Stetigkeit für abzählbare Teilmengen dasselbe sind. Dies wird für beliebige Teilmengen von  $R$  bewiesen.

Gottfried Köthe.

Arnold, B. H.: Topologies defined by bounded sets. Duke math. J. 18, 631—642 (1951).

In einem reellen linearen Raum  $S$  sei  $\mathfrak{B}$  eine Klasse von Teilmengen  $B$  von  $S$ , die die folgenden Eigenschaften besitzt: (1) Mit  $x \in S$  ist  $\{x\}$  in  $\mathfrak{B}$ ; (2) zu jedem

$x \neq 0$  und jedem  $B \in \mathfrak{B}$  gibt es ein reelles  $\lambda$  mit  $\lambda x \in B$ ; (3) die Vereinigungsmenge zweier  $B$  liegt in  $\mathfrak{B}$ ; (4) jede Teilmenge eines  $B$  liegt in  $\mathfrak{B}$ ; (5) jedes reelle Vielfache eines  $B$  liegt in  $\mathfrak{B}$ ; (6) die konvexe Hülle jedes  $B$  liegt in  $\mathfrak{B}$ . Es wird gezeigt, daß eine Klasse  $\mathfrak{B}$  im  $R_n$  stets mit der Klasse der im üblichen Sinn beschränkten Mengen zusammenfällt. Durch eine Klasse  $\mathfrak{B}$  wird in  $S$  eine Topologie eingeführt durch die Festsetzung, daß eine Teilmenge  $G$  von  $S$  offen ist, wenn zu jedem  $g \in G$  und jedem  $B \in \mathfrak{B}$  ein  $\lambda > 0$  existiert, so daß  $g + \lambda B \subset G$  ist.  $S$  wird im allgemeinen nur ein  $T_1$ -Raum, kein Hausdorffscher Raum. Für die Menge  $\mathfrak{J}$  der im Sinn dieser Topologie beschränkten Mengen gilt  $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{B}$ , und  $\mathfrak{J}$  ist selbst eine (1) bis (6) erfüllende Klasse von Teilmengen, die ihrerseits zur gleichen Topologie führt wie  $\mathfrak{B}$ . Eine Teilmenge  $X$  von  $S$  gehört dann und nur dann zu  $\mathfrak{J}$ , wenn für jede Folge  $x_n \in X$  und jede Folge  $\lambda_n \rightarrow 0$  ( $\lambda_n \neq 0$ ) stets eine geeignete Teilfolge  $\lambda_n x_n$  eine Menge aus  $\mathfrak{B}$  bildet. Beispiele zeigen, daß  $\mathfrak{B}$  echte Teilmenge von  $\mathfrak{J}$  sein kann.

Gottfried Köthe.

**Yood, Bertram:** Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation. Duke math. J. 18, 599—612 (1951).

Soit  $E(X, Y)$  l'ensemble des applications linéaires continues d'un espace de Banach  $X$  dans un espace de Banach  $Y$ . Voici des propriétés vérifiant la condition mentionnée dans le titre: 1)  $T \in E(X, Y)$  a la propriété  $A$  (resp.  $B$ ), i. e.  $T$  est un homomorphisme et l'espace  $M(T)$  des zéros de  $T$  [resp. l'adhérence  $N(T)$  de l'espace des valeurs de  $T$ ] est de dimension (resp. codimension) finie. 2)  $T$  a la propriété  $A$  (resp.  $B$ ) et il existe un projecteur de  $Y$  sur  $N(T)$  [resp. de  $X$  sur  $M(T)$ ]. L'A. caractérise les éléments inversibles à droite, inversibles à gauche, inversibles, dans l'algèbre quotient de  $E(X, Y)$  par l'idéal des endomorphismes complètement continus, généralisant des résultats de J. W. Calkin [Ann. of Math., II. Ser. 42, 839—873 (1941)]. Plusieurs autres propriétés sont aussi étudiées.

Jacques Dixmier.

**Schwartz, J.:** A note on the space  $L_p$ . Proc. Amer. math. Soc. 2, 270—275 (1951).

Démonstration de la dualité entre les espaces  $L^p$  et  $L^q$  pour  $1 \leq p < +\infty$  et  $1/p + 1/q = 1$ , lorsque l'espace mesuré d'où l'on part est quelconque (i. e., non nécessairement réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie). Ici comme dans tant d'autres questions relatives à la théorie de l'intégration, la démonstration serait bien plus simple si l'A. se plaçait dans le cadre de la théorie des mesures de Radon sur un espace localement compact, au lieu de la théorie des mesures „abstraites“; on voit alors immédiatement ce qu'est aussi le dual de  $L^1$ , savoir l'espace  $L^\infty$  des classes de fonctions égales localement presque partout à une fonction mesurable et bornée.

Jean Dieudonné.

**Vinokurov, V. G.:** Über Quasi-Komplemente in separablen Banachschen Räumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 337—340 (1951) [Russisch].

Sei  $E$  ein separabler Banachraum;  $P, Q, R$  lineare abgeschlossene Unterräume in  $E$ .  $R$  heißt Quasikomplement zu  $P$ , wenn  $P \cap R = \{0\}$  ( $0$  = Nullelement) gilt und die Menge der Elemente  $x + y$  ( $x \in P, y \in R$ ) in  $E$  dicht liegt. G. W. Mackey [Bull. Amer. math. Soc. 52, 322—325 (1946)] bewies in Erweiterung eines Resultates von F. J. Murray [Trans. Amer. math. Soc. 58, 77—95 (1945)], daß es zu jedem  $P$  ein Quasikomplement  $R$  gibt. Verf. zeigt nun: Sind  $P$  und  $Q$  mit  $P \cap Q = \{0\}$  gegeben, so existiert zu  $P$  ein Quasikomplement  $R$  mit  $R \supset Q$ .

Karl Zeller.

**Kantorovič, L. V.:** Einige weitere Anwendungen des Majorantenprinzips. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 849—852 (1951) [Russisch].

Verf. setzt frühere Untersuchungen fort (s. dies. Zbl. 42, 119). Es handelt sich dabei um Lösungen der Gleichung (1)  $x = P(x)$ , wo  $x$  einem linearen Raum  $X$  angehört, der mit Hilfe eines halbgeordneten Raumes  $Z$  „allgemein normiert“ ist.



Verf. betrachtet in  $Z$  eine Gleichung (2)  $z = V(z)$ , die in gewissem Sinne (1) majorisiert. In der oben genannten Arbeit hatte Verf. aus der Konvergenz der Iterationsfolge  $z_{n+1} = V(z_n)$  gegen eine Lösung von (2) die entsprechende Konvergenz bei (1) erschlossen. Hier erhält Verf. nun aus Eindeutigkeitssätzen für (2) solche für (1). Diese Ergebnisse wendet er auf das Newtonsche Iterationsverfahren, insbesondere in gewöhnlichen normierten Räumen, an (vgl. Verf., dies. Zbl. 38, 74). Schließlich wird der Sonderfall einer „abnehmenden“ Majorante  $V$  besprochen. *Karl Zeller.*

**Sunouchi, Haruo:** On integral representations of bilinear functionals. Proc. Japan Acad. 27, Nr. 4, 159—161 (1951).

Let  $f(x, y)$  be a bilinear functional defined over the product of two Banach spaces  $X$  and  $Y$ . The formula  $U(x) = f(x, \cdot)$  establishes an one-to-one correspondence between the class of the functionals  $f(x, y)$  and the linear operations  $U(x)$  from  $X$  to  $Y$  (the conjugate to  $Y$ ), moreover  $\|f\| = \|U\|$ . Hence the knowledge of the general form of linear operations enables us to derive general forms of the bilinear functionals. The author makes use of this principle in the case  $X = L^p$  using a theorem of Philips (this Zbl. 25, 342). Rev. note: it is not necessary that the function  $\psi(t, u)$  in theorem 3 be bounded with respect to  $t$ .

*Andrzej Alexiewicz.*

**Fantappiè, Luigi:** Le variazioni e i funzionali derivati degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo dato. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 375—379 (1951).

Mediante la propria teoria dei funzionali analitici l'A. calcola le successive variazioni e i successivi funzionali derivati degli autovalori e delle autofunzioni di un dato nucleo  $k(z, t)$ , supponendo, nella presente Nota, che  $\lambda_r$  sia autovalore semplice dell'equazione funzionale lineare

$$y(z) = f(z) + \lambda k(z, t) y(t) = f(z) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_C k\left(z, \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} y(t) dt.$$

Se  $\varphi_r(z)$  e  $\psi_r(z)$  sono le autofunzioni corrispondenti a  $\lambda_r$ :  $\varphi_r(z) = \lambda_r k(z, t) \varphi_r(t)$ ;  $\psi_r(t) = \lambda_r k(z, t) \psi_r(z)$ , normalizzate dalla condizione  $\varphi_r(t) \psi_r(t) = 1$ , e se  $R(\lambda; z, t)$  è il nucleo risolvete di  $k(z, t)$  è  $R(\lambda; z, t) = \varphi_r(z) \psi_r(t) / (\lambda_r - \lambda) + R_r(\lambda; z, t)$ , ove la funzione  $R_r(\lambda; z, t)$  è regolare per  $\lambda = \lambda_r$  e ortogonale a  $\varphi_r(z)$  e a  $\psi_r(t)$ . Allora se  $\delta k(z, t) = \varepsilon h(z, t)$  è la variazione del nucleo  $k(z, t)$ , la corrispondente variazione dell'autovalore  $\lambda_r$  è

$$\delta \lambda_r = -\lambda_r^2 \varphi_r(\beta) \psi_r(\alpha) h(\alpha, \beta) \varepsilon = -\lambda_r^2 \varphi_r(\beta) \psi_r(\alpha) \delta k(\alpha, \beta),$$

e quindi l'espressione del funzionale derivato simmetrico dell'autovalore  $\lambda_r$  rispetto al nucleo  $k$  è  $\mathfrak{D}_{k(\alpha, \beta)} \lambda_r = -\lambda_r^2 \varphi_r(\beta) \psi_r(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda \Gamma(\lambda; \beta, \alpha) d\lambda$ , ove  $\Gamma(\lambda; \beta, \alpha)$

è il nucleo associato, cioè  $\Gamma(\lambda; \beta, \alpha) = (1 - \beta \alpha)^{-1} + \lambda R(\lambda; \beta, \alpha)$ ; inoltre per i funzionali derivati successivi vale la formula generale  $\mathfrak{D}^n \lambda_r = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda \mathfrak{D}^{n-1} \Gamma(\lambda; \beta, \alpha) d\lambda$ .

Per l'autofunzione  $\varphi_r(z)$  l'espressione della variazione è  $\delta \varphi_r(z) = \lambda_r \varphi_r(\beta) \delta k(z, \beta) - \lambda_r \varphi_r(z) \psi_r(\alpha) \varphi_r(\beta) \delta k(\alpha, \beta) + \lambda_r^2 \varphi_r(\beta) R_r(\lambda_r; z, \alpha) \delta k(\alpha, \beta)$ , e quella del funzionale derivato è  $\mathfrak{D}_{k(\alpha, \beta)} \varphi_r(z) = \lambda_r (1 - z \alpha)^{-1} \varphi_r(\beta) - \lambda_r \varphi_r(z) \psi_r(\alpha) \varphi_r(\beta) + \lambda_r^2 R_r(\lambda_r; z, \alpha) \varphi_r(\beta)$ . Del tutto analoghe sono le espressioni di  $\delta \psi_r(t)$  e di  $\mathfrak{D}_{k(\alpha, \beta)} \psi_r(t)$ .

*Silvio Cinquini.*

**Fantappiè, Luigi:** Calcolo esatto degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo „variato“, per una variazione di tipo elementare. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 458—462 (1951).

Usufruendo dei risultati raggiunti in propri lavori (questo Zbl. 32, 211 e rec. prec.) l'A. calcola in forma finita il valore esatto degli autovalori  $\lambda_r(\varepsilon)$  e delle autofunzioni  $\varphi_r(z, \varepsilon)$ ,  $\psi_r(t, \varepsilon)$  di un nucleo variato  $k(z, t) + \varepsilon h(z, t)$ , nel caso in cui la variazione  $\varepsilon h(z, t)$  sia di tipo elementare, e precisamente abbia la forma  $h(z, t) =$

$\sum_{j=1}^m p_j(z) q_j(t)$ , supponendo che sia noto il nucleo associato  $\Gamma(\lambda; z, t)$  oppure il nucleo risolvante  $R(\lambda; z, t)$  del nucleo dato  $k(z, t)$ . — A tal uopo l'A. stabilisce, per il nucleo associato  $\Gamma_1$  del nucleo variato, la formula  $\Gamma_1(\lambda, \varepsilon; z, t) = \Gamma(\lambda; z, \overset{\circ}{\alpha}) \cdot \Gamma_s(\varepsilon \lambda, \lambda; \overset{\circ}{\alpha}, t)$ , ove  $\bar{\Gamma}_s$  è il nucleo associato di  $\Gamma_s(\lambda; z, t) = h(z, \overset{\circ}{\beta}) \Gamma(\lambda; \overset{\circ}{\beta}, t)$ , e rileva che in virtù della particolare forma di  $h(z, t)$  anche  $\Gamma_s$  ha la forma analoga  $\Gamma_s(\lambda; z, t) = \sum_{j=1}^m p_j(z) \bar{q}_j(t, \lambda)$ , con  $\bar{q}_j(t, \lambda) = q_j(\overset{\circ}{\beta}) \Gamma(\lambda; \overset{\circ}{\beta}, t)$ , ( $j = 1, \dots, m$ ).

Infine il valore esatto dell'autovalore  $\lambda_r(\varepsilon)$  del nucleo variato è dato dalla formula  $\lambda_r(\varepsilon) = -T \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \Gamma_1(\lambda, \varepsilon; z, t) d\lambda$ , ove  $T$  è il funzionale traccia; mentre per avere il valore esatto di ciascuna delle autofunzioni  $\varphi_r(z, \varepsilon)$ ,  $\psi_r(t, \varepsilon)$  del nucleo variato basta fissare, nella formula  $\varphi_r(z, \varepsilon) \psi_r(t, \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{1}{\lambda} \Gamma_1(\lambda, \varepsilon; z, t) dt$ , rispettivamente il valore della variabile da cui dipende l'altra autofunzione.

*Silvio Cinquini.*

**Bertolini, Fernando:** Applicazione di un noto criterio generale di compattezza allo spazio lagrangiano delle funzioni continue. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 107—110 (1951).

Un insieme di punti  $X$  di uno spazio metrico  $S$  è detto iperlimitato se dato  $\varepsilon > 0$  esso si può considerare come somma di un numero finito di insiemi aventi tutti diametro minore di  $\varepsilon$ . È noto che se  $X$  è iperlimitato ed  $S$  è completo allora  $X$  è compatto. Viceversa se  $X$  è compatto e separabile esso è iperlimitato. L'A. applica questi teoremi per dare una breve dimostrazione del teorema di Ascoli-Arzelà e del suo inverso. Egli infatti dimostra, assai semplicemente, che ogni insieme  $X$  di funzioni equicontinue ed equilimate tutte definite in un dato insieme chiuso limitato  $T$  di punti dello spazio euclideo  $S_r$ , è iperlimitato, se considerato come insieme di punti dello spazio delle funzioni continue, così normalizzate  $\|x(t)\| = \max |x(t)|$  in  $T$ . Viceversa ogni insieme iperlimitato di tale spazio è costituito da funzioni equicontinue ed equilimate e quindi ogni insieme chiuso e compatto in tale spazio — che come è noto è separabile — è costituito da siffatte funzioni.

*Gaetano Fichera.*

## **Praktische Analysis:**

● Sanden, H. von: **Praktische Mathematik.** 2. erweiterte Aufl. (Teubners Mathematische Leitfäden. Band 44.) Leipzig: B. G. Teubner 1951. 119 S. DM 3,80 kart.

Aus dem Vorwort: „Die zweite Auflage ist gegenüber der ersten dadurch erweitert, daß Abschnitte über das Iterationsverfahren zur Auflösung von Gleichungen und über die Ausgleichung mit Gewichten hinzugekommen sind. Auch die harmonische Analyse und Synthese wurde ausführlicher behandelt. Ferner sind einige Beispiele aus meinem früher erschienenen Buch „Mathematisches Praktikum“ (B. G. Teubner, Leipzig, 2. Aufl. 1944) übernommen worden“. — Eine Anregung aus dem Referat über die 1. Aufl. (dies. Zbl. 31, 221), betreffend die Ermittlung von Integralen der Form  $\int_a^b f(x) dh(x)$  durch Messung von Flächeninhalten, ist berücksichtigt worden.



**Haldane, J. B. S.:** The extraction of square roots. *Math. Gaz.* 35, 89—90 (1951).

Verf. leitet aus den (von der Pellischen Gleichung her) bekannten Beziehungen  $P_0^2 - kQ_0^2 = \pm 1$ ,  $P_{n+1} = 2P_n^2 - 1$ ,  $Q_{n+1} = 2^{n+1} \cdot P_n \cdot P_{n-1} \cdots P_1 \cdot P_0 \cdot Q_0$  ein Iterationsverfahren für die Bestimmung der Näherungsbrüche von  $\sqrt{k}$  her:  $\sqrt{k} \simeq P_{n+1}/Q_{n+1} = P_n/Q_n - 1/Q_{n+1} = P_0/Q_0 \pm 1/Q_1 - 1/Q_2 - 1/Q_3 - \cdots$ . Um  $P_0$  und  $Q_0$  zu erhalten, muß man die Kettenbruchentwicklung bis zum vorletzten Glied der ersten Periode berechnen. Verf. bemerkt, daß dies i. a. eine sehr große Arbeit fordert. Er schlägt deshalb die Iteration vor:  $P_{n+1} = R_n^2 + kS_n^2$ ,  $S_{n+1} = 2R_nS_n$ ,  $k = R_n^2 + c$ , ( $S_0 = 1$ ) und bemerkt, daß diese Formeln „falls sie im 17. Jahrhundert bekannt gewesen wären“ eine große Rechenarbeit erspart haben würden. Ref. bemerkt, daß man aus  $a_{n+1} = R_{n+1}/S_{n+1} = (R_n^2 + kS_n^2)/2R_nS_n = (a_n^2 + k)/2a_n$  unmittelbar sieht, daß Verf. nur die „Heroon-Formel“, die schon für die Alt-Babylonische Mathematik belegt ist, wieder gefunden hat. — Leider treten in dem diesbezüglichen Beispiele:  $k = 137$  Rechenfehler auf: man hat

$$a_0 = 12, \quad a_1 = \frac{12^2 + 137}{24} = \frac{281}{24}, \quad a_2 = \frac{157873}{13488}, \quad a_3 = \frac{49847765857}{4258782048}.$$

*E. M. Bruins.*

**Banachiewicz, T.:** Résolution d'un système d'équations linéaires algébriques par division. *Enseignement math.* 39, 34—45 (1951).

Wie man bei einer linearen Gleichung  $kx = l$  den Wert der einen Unbekannten  $x$  durch einen Divisionsprozeß  $x = l:k$  gewinnt, so soll auch der Lösungsvektor  $x$  eines Systems linearer Gleichungen durch eine Division angeschrieben werden; diese Aufgabe hat sich Verf. gestellt, wobei er von seinem „Krakovianen-Kalkül“ Gebrauch macht. Wie einleitend gezeigt wird, unterscheiden sich die Krakovianen von den (Cayleyschen) Matrizen im wesentlichen durch die Definition der Produktbildung, indem hierbei jeweils Spalte mit Spalte (nicht Zeile mit Spalte) multipliziert wird. Die Division, insbes. mit Dreiecks-Krakovianen, wird entsprechend definiert. Ähnlich der Darstellung mit Matrizen findet man die Lösung des angegebenen Gleichungssystems, durch den Krakovian  $k$  verkörpert, mittels einer Zerlegung nach 2 Dreiecks-Krakovianen  $g$  und  $k$  derart, daß  $k = gh$  ist. Dann läßt sich schreiben  $x = \{l:h\} : \tau g$ ;  $\tau$  ist der Einheitskrakovian. Ersetzt man die Spalte der konstanten Glieder in  $k$  durch  $\tau$ , so läßt sich die Inverse  $k^{-1}$  in noch einfacherer Form ermitteln als vom Verf. in einer früheren Publikation angegeben. Abschließend werden die Beziehungen zur Determinantenmethode und zu dem allgemeineren Fall von  $n$  Gleichungen mit  $m$  Unbekannten nachgewiesen. — Wie Verf. früher einmal (1937) bemerkte, komme es immer auf den Standpunkt des Betrachters an, indem häufig unterschiedliche Lösungswege lediglich als „verschiedene Aspekte eines und desselben Rechnungsganges betrachtet werden können“. So könnte man, mit den Augen des Praktikers gesehen (Verf. spricht einleitend gerade den Geodäten und den Astronomen an), auch hier die Meinung vertreten, daß die Zahlenrechnungen in den angegebenen Beispielen Schritt für Schritt genau die gleichen sind wie z. B. bei R. Zurmühl, „Matrizen“ (Berlin 1950; dies. Zbl. 36, 149), S. 258 bzw. S. 263, 23. 8. — Es soll jedoch ausgesprochen werden, daß insbesondere bei großen Systemen für unmittelbare, numerische Anwendungen die Krakovianen-Formeln dem Praktiker angenehmer zu handhaben sind als die Zeilen  $\times$  Spalten-Multiplikation der Matrizenrechnung, wo das Auge gezwungen wird, über größere Bereiche der Zahlentabelle umherzuspringen, während bei der Spalten  $\times$  Spalten-Multiplikation durch Längs-Falten des Papiers und entsprechendes Aneinanderschoben der betreffenden Spalten wesentliche Erleichterungen gewonnen und Fehlerquellen vermieden werden können, was im Falle der Matrizen nur durch eine ad-hoc-Transponierung zu erreichen ist.

*H. Wolf.*

**Bjerhammar, Arne:** Application of calculus of matrices to method of least squares, with special reference to geodetic calculations. *Tekn. Högskol. Handl.*, Stockholm Nr. 49, 86 S. (1951).

Im Hintergrund der Arbeit zeichnen sich deutlich die Bedürfnisse von aktuellen numerischen Problemen der Geodäsie ab, wie sie z. B. in den neuesten Ausgleichungen von trigonometrischen Netzen kontinentalen Umfanges aufgetreten sind. Um so bedeutsamer, wenn darüber hinaus auch eine beachtenswerte Ausweitung der allgemeinen Relationen des Matrizenkalküls stattfindet: Nicht nur für die quadratische Matrix  $\mathfrak{M}$ , sondern auch für rechteckige Matrizen

$\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{U}$ , wobei  $s > r$ , werden die zugehörigen Reziproken definiert, nämlich  $(\mathfrak{N})^{-1} = \mathfrak{N}^{-1} = \mathfrak{N}^{-1} \mathfrak{N}$  und  $(\mathfrak{U})^{-1} = \mathfrak{U}^{-1} = \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{U}$ . Außerdem wird neben der „ordentlichen“ Einheitsmatrix  $\mathfrak{E}$  noch eine „außerordentliche“ Einheitsmatrix  $\mathfrak{N}^0$  fixiert, wobei  $\mathfrak{N}^{-1} \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{N} \mathfrak{N}^{-1} = \mathfrak{N}^0$ , so daß z. B.  $\mathfrak{N}^0(\mathfrak{N}^0 - \mathfrak{E}) = 0$  usw. Bei Anwendung auf die Methode der kleinsten Quadrate wird hiermit der Vorteil gewonnen, daß das System der übrigbleibenden Verbesserungen unmittelbar durch die Koeffizientenmatrix der Bedingungs- bzw. Fehlergleichungen aus-

gedrückt werden kann. In dieser Weise werden die Hauptformen der Methode der kleinsten Quadrate dargestellt, nämlich die Ausgleichung nach vermittelnden und die nach bedingten Beobachtungen, und zwar ohne die übliche Zuhilfenahme der Lagrangeschen Multiplikatoren (Korrelaten), sowie die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungengleichungen zwischen den Unbekannten und die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten. Das Hauptgewicht der Anwendungsmöglichkeiten liegt vor allem aber in der Zerlegung dieser rechteckigen Matrizen in mehrere Unter-Matrizen, wie sie gerade durch die Tatsache der sehr einfach gebauten Dreiecksbedingungen in den Triangulationsnetzen gegeben ist: Für diese Gleichungsgruppen kann man — unabhängig von der Dreiecksgestalt — die Kehrmatrizen der Normalgleichungssysteme angeben; für numerische Zwecke liegen solche Kehrmatrizen bereits in Tabellenform ausgerechnet vor (Boltz, Jenne). Es wird gezeigt, daß die Unterteilung nach Zeilen und in 2 Gruppen dem bekannten Entwicklungsverfahren von Boltz (1919) bzw. der Relation von Schur (1917) und dem Indizeskalkül von Reicheneder (1942) entspricht. Dagegen führt die gleichzeitige Unterteilung nach Zeilen und Spalten zu einer Rechenweise, die dem unter den Namen Eggerts (bzw. Asplunds) bekannt gewordenen Verfahren entspricht, welches — ohne Matrizen zu verwenden — zur Zerlegung nach Dreieckssystemen führt, ausgehend vom Begriff der partiell-äquivalenten Beobachtungen. In einem besonderen Abschnitt „Numerische Methoden“ wird für nicht allzu große symmetrische Systeme linearer Gleichungen ein besonderes Lösungsverfahren gezeigt, das etwa dem „modernisierten“ Gaußschen Algorithmus entsprechen dürfte oder auch der Cholesky-Methode, jedoch ohne die hier vorgeschriebenen Radizierungen. Weiterhin wird die Ausgleichung eines sechseckförmigen Triangulationsnetzes unter Benutzung von tabellierten Dreiecks- bzw. quadratischen Matrizen gebracht. Das abschließende Zahlenbeispiel besteht in der Lösung von 28 Normalgleichungen durch Zerlegung in 3 Gruppen. Genauigkeitsberechnungen, Vergleiche mit anderweitigen Verfahren, Formelzusammenstellungen usw. runden die Arbeit ab. *H. Wolf.*

Goldstine, Herman H. and John von Neumann: Numerical inverting of matrices of high order. II. Proc. Amer. math. Soc. 2, 188—202 (1951).

Im 1. Teil (dies. Zbl. 31, 314) wurde der Einfluß der Abrundungsfehler bei der Berechnung reziproker Matrizen und der Auflösung größerer linearer Gleichungssysteme streng abgeschätzt. In dieser ebenfalls sehr wichtigen Arbeit werden wahrscheinlichkeits-theoretische Gesichtspunkte herangezogen; es wird nicht nach optimalen numerischen Schranken, sondern nach Abschätzungen gesucht, die die Größenordnungen richtig erfassen. Den Ausgangspunkt bilden (z. T. längere) Formeln, welche die Verteilungsfunktion für die „obere Schranke“  $|A|$  einer  $n$ -reihigen Matrix oder für die Länge eines Vektors abschätzen, wenn man die Elemente  $a_{ij}$  der Matrix bzw. die Komponenten  $x_j$  des Vektors als voneinander unabhängige Veränderliche ansieht, für welche eine normale Gaußsche Verteilung mit der Streuung  $\sigma^2$  besteht. (Es ist  $|A|$  das kleinste  $c$ , so daß  $|A\xi| \leq c|\xi|$  für alle Vektoren  $\xi$  gilt). Z. B. ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit  $P$  dafür, daß  $|A| > \sigma\sqrt{2rn}$  ausfällt, wobei  $r > 0$  frei wählbar ist, die Abschätzung (ein bisher unveröffentlichtes Resultat von Bargmann, Montgomery und v. Neumann):

$$P(|A| > \sigma\sqrt{2rn}) < (2r/e^{r-1})^{n/4} (r-1) \sqrt{r\pi n}.$$

Die so aufgestellten Abschätzungen werden auf die Betrachtungen des 1. Teils angewendet, wobei sich für  $n \geq 10$  Aussagen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9% ergeben, die, wie zu erwarten, günstiger ausfallen, als die im 1. Teil aufgestellten. An Stelle der früheren strengen Aussagen (Erklärung der Bezeichnungen Zbl. 31, 314) treten hier  $|2\% A \bar{W}_0 - J| \leq 114 \frac{\lambda}{\mu} n \beta^{-s}$  und  $\mu < 80 n \beta^{-s}$ . Als kritische Schranke ergibt sich jetzt  $n < 0,04 \beta^{s/3}$  ( $n$  Anzahl der Gleichungen, Rechnung in  $\beta$ -al-System, im Dezimalsystem also  $\beta = 10$ ,  $s$  Anzahl der mitgeführten Dezimalstellen), z. B. für  $\beta^s \sim 10^{12}$  soll  $n < 400$  sein, d. h. bei zwölfstelliger Rechnung soll  $n$  nicht 400 übersteigen, und bei zehnstelliger Rechnung soll  $n < 86$  sein. *Lothar Collatz.*

Wegner, U.: Bemerkungen zu den Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Z. angew. Math. Mech. 31, 243—245 (1951).

Für ein lineares Gleichungssystem  $A \mathfrak{x} = \mathfrak{z}$  mit quadratischer Matrix  $A$  lautet das allgemeinste lineare Iterationsverfahren zur Bestimmung der  $(m+1)$ -ten

Näherung  $\mathfrak{x}_{m+1}$  aus der  $m$ -ten Näherung  $\mathfrak{x}_m$ :

$$\hat{\mathfrak{x}}_{m+1} = \mathfrak{x}_m - P_m (A \mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}), \quad \mathfrak{x}_{m+1} = Q_{m+1} \hat{\mathfrak{x}}_{m+1} + \mathfrak{a}_{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots,$$

wobei  $\mathfrak{x}_0$  willkürlich gewählt wird und die Matrizen  $P_m$  und  $Q_{m+1}$  und der Vektor  $\mathfrak{a}_{m+1}$  von den Elementen  $a_{jk}$  der Matrix  $A$  und von den  $\mathfrak{x}_m$  abhängen können. Es wird gezeigt, wie durch spezielle Wahl der  $P_m$ ,  $Q_m$ ,  $\mathfrak{a}_m$  die bekannten spezielleren Iterationsverfahren aus dem allgemeinen Ansatz entstehen. Verf. führt noch einige weitere, für die Praxis bedeutungsvolle Verfahren an und gibt einige Abschätzungsformeln für die charakteristischen Zahlen von Matrizen an, welche für die Bestimmung des Quotienten  $A_{\min}^C/A_{\max}^C$  nützlich sind; dieser Quotient (mit einer gewissen Matrix  $C$ ) bestimmt nämlich die Konvergenzgüte des Iterationsverfahrens; je größer dieser Quotient, desto besser ist die Konvergenz.

Lothar Collatz.

Vil'ner, I. A.: Das Problem der Anamorphose. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 177—180 (1951) [Russisch].

Verf. setzt eine frühere Arbeit über Nomogramme von Gleichungssystemen fort (dies. Zbl. 37, 211). Die dieser Arbeit zugrunde liegenden Hilfssätze werden wiederholt und ausführlicher formuliert. Weiterhin werden von einer Funktion  $f(x, y, z) = 0$  gefordert, daß (1) sie stetige partielle Ableitungen bis zur 4. Ordnung in einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  besitzt, (2)  $f_x f_y f_z \neq 0$  in  $\mathfrak{G}$ , (3) die durch  $f(x, y, z) = 0$  bestimmte mehrdeutige Funktion  $z(x, y)$  in einem in  $\mathfrak{G}$  enthaltenen zweidimensionalen Gebiet  $\mathfrak{G}_1$  eindeutige Zweige  $z_1(x, y)$  und  $z_2(x, y)$  besitzt und (4) die Funktionaldeterminante  $D(z_1, z_2)/D(x, y) \neq 0$  in dem Gebiet  $\mathfrak{G}_1^*$  der Ebene  $x \neq 0$   $y$ . Wenn die Bedingungen (1) bis (3) für  $z$  und analoge für  $x$  und  $y$  gelten, aber (4) nicht erfüllbar ist, gibt es entweder kein Fluchtliniennomogramm oder nur ein solches mit geradlinigen Skalen. Weitere Differentialbedingungen werden angegeben für die Fälle, daß eine oder zwei Skalen geradlinig sind und  $z$  krummlinig, oder daß die  $x$ - und  $y$ -Skala auf einem Kegelschnitt liegen und die  $z$ -Skala krummlinig ist. — Zum Schluß wird noch darauf hingewiesen, daß durch die Methode des Verf. die Frage nach der größten Anzahl der Kurven, die gleichzeitig zu Geraden werden können, einfach zu lösen ist. Verf. macht auch noch auf den Zusammenhang mit der Theorie der Gewebe (Blaschke) aufmerksam.

Rudolf Ludwig.

Turán, Paul: On approximative solution of algebraic equations. Publ. math., Debrecen 2, 26—42 (1951).

Das Verfahren von Bernoulli-Graeffe zur näherungsweise Berechnung der Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$  ( $|z_1| \leq \dots \leq |z_n|$ ) eines Polynoms  $f_0(z) = a_{00} + a_{01}z + \dots + a_{0n}z^n$  ( $a_{0n} = 1$ ) wird durch den Ansatz  $f_{v+1}(z) = (-1)^n f_v(\sqrt[n]{z}) f_v(-\sqrt[n]{z})$  gekennzeichnet. A. Ostrowski (dies. Zbl. 23, 334) beseitigte die praktischen Nachteile dieses Verfahrens, indem er die sog. Newtonschen Majoranten  $\sum_{j=0}^n T_{vj} z^j$  der  $f_v(z)$  systematisch heranzog. Verf. zeigt nun, daß man auch schon dann einige wesentliche Ergebnisse erzielen kann, wenn man nicht mit den Koeffizienten  $T_{vj}$ , sondern mit den leichter (Formeln von Newton-Girard) zu berechnenden Potenzsummen  $s_{vj}$  der Nullstellen der  $f_v(z)$  operiert. Aus einigen Abschätzungen über Potenzsummen wird gefolgert:

$$\text{I. } n^{-2^{-v}} \leq |z_n| \left/ \left( \max_{1 \leq j \leq 2^n} |\varepsilon_{vj}|^{1/j} \right)^{2^{-v}} \right. \leq 2^{2^{-v}}.$$

$$\text{II. } n^{-2^{-v}} \leq |z_n| \left/ \left( \max_{1 \leq j \leq n} |\varepsilon_{vj}|^{1/j} \right)^{2^{-v}} \right. \leq \left( \frac{1}{\lg 2} \left( \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right)^{2^{-v}}.$$

$$\text{III. } n^{-1/m} \leq |z_n| \left/ \max_{m \leq j \leq m+n} |\varepsilon_{vj}|^{1/j} \right. \leq \left( \frac{e^6 m}{n} \right)^{n/m} \text{ für } m \leq n. \text{ (Berichtigt!).}$$

$$\text{IV. Es ist } \frac{1}{2} \leq |z_1 \dots z_l| \left/ \max_{1 \leq k \leq 2^{\binom{m}{l}}} |a_{kl}|^{1/k} \right. \leq \binom{m}{l}.$$



V. Für die Imaginärteile der Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$  von  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  sei bei geeigneter Numerierung:  $|\Im z_1| \leq \dots \leq |\Im z_{n-1}| < |\Im z_n|$ . Mit dem Hermiteschen Polynom  $H_m(z)$  werde der (aus  $a_0, \dots, a_n$  rational berechenbare) Wert  $U_m = \sum_{\nu=1}^n H_m(z_\nu)$  gebildet. Dann ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2m}} \lg \left\{ \frac{\Gamma(1 + (m/2))}{\Gamma(1 + m)} |U_m| \right\} = |\Im z_n|.$$

Robert Schmidt.

Bogert, B. P.: Some roots of an equation involving Bessel functions. J. Math. Physics 30, 102—105 (1951).

Tafel I gibt die kleinste Wurzel  $x_0(k)$  der Gleichung  $F_1 = J_0(x) N_1(kx) - N_0(x) J_1(kx) = 0$  ( $J_n, N_n$  Zylinderfunktionen 1. bzw. 2. Art) für  $k = 1, 0$  (0,1) 2,1; 3,0 (1,0) 10,0; 20,0 mit 4 bzw. 5 gültigen Ziffern. Daneben ist die für die Berechnung notwendige Hilfsvariable  $y(k) = (2/\pi)(k-1)x_0$  für die gleichen  $k$ -Werte angegeben. Tafel II bringt  $x_0(k)$  mit 4 Ziffern für  $k' = 1, 00$  (0,01) 2,00; 2,1; 3,0 (1,0) 10,0; 20,0. In Tafel III findet man die Wurzeln  $x'_0(k')$  der Gleichung  $F_2 = N_1(x') \cdot J_0(k'x') - J_1(x') N_0(k'x') = 0$  für  $1/k' = 1, 00$  (0,01) 2,00; 2,1; 3,0 (1,0) 10,0; 20,0 mit 4 gültigen Ziffern. — Zur Berechnung der Nullstellen wurden nach Schätzung eines Wertes die Punkte  $x_1 + 0,2 = x_2 + 0,1 = x_3$  so gewählt, daß  $F_1(x_1) \leq 0 \leq F_1(x_3)$ . Unter Benützung von Tafeln der Zylinderfunktionen erfolgte die Nullstellenbestimmung durch quadratische Interpolation. Die Werte der Tafel II ergeben sich einfach aus denen der Tafel II durch Bildung von  $k' = 1/k$  und  $x' = kx$ .

Heinz Unger.

Birkhoff, G., D. M. Young and E. H. Zarantonello: Effective conformal transformation of smooth, simply connected domains. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 411—414 (1951).

Verff. kündigen einen ausführlichen Beitrag zur Praxis der konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete an, wobei besonders die Erfahrungen mit leistungsfähigen Rechenmaschinen besprochen werden sollen. Ist  $G_z$  das gegebene Gebiet und  $|t| < 1$  sein schlichtes konformes Bild, so führt die Bestimmung von  $t = f(z)$  auf eine lineare Integralgleichung. Die Bestimmung von  $z = g(t)$  führt nach Theodorsen-Garrick auf eine singuläre, nichtlineare Integralgleichung. Verff. unterstreichen die bekannte Schwierigkeit, die bei dieser Methode die rechnerische Behandlung Cauchyscher Hauptwerte macht.

Hans Wittich.

Gautschi, Walter: Ein Analogon zu Grammels Methode der graphischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 31, 242—243 (1951).

Während beim Grammelschen Orthopolarverfahren [Ing. Archiv 10, 395—411 (1939)] als Polarbild einer Funktion  $u(x)$  in Polarkoordinaten die Kurve  $r = u$ ,  $\varphi = x$  eingeführt wird, verwendet Verf. als Polarbild die Kurve  $r = u$ ,  $\varphi = x$  (für negative  $u$ :  $r = -u$ ,  $\varphi = x + \pi$ ). Verwendet man für die Ableitung  $u'(x)$  ein um  $\pi/2$  gedrehtes Bild, so steht die Tangentenrichtung des Polarbildes von  $u$  senkrecht auf der Verbindungslinie der zu  $u$  und  $u'$  gehörigen Punkte. Diese Beziehung kann zur angenäherten graphischen Integration bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung ausgenutzt werden; Verf. gibt eine gröbere Tangentenkonstruktion und eine Verfeinerung an; für Gleichungen 2. Ordnung findet sich die Idee bereits bei R. Neuendorff, Z. angew. Math. Mech. 2, 131—136 (1922).

Lothar Collatz.

Gomory, R. and D. E. Richmond: Boundaries for the limit cycle of van der Pol's equation. Quart. appl. Math. 9, 205—209 (1951).

Nach Umformung der Gleichung  $d^2x/dt^2 + \mu(x^2 - 1) dx/dt + x = 0$  durch  $dx/dt = y$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$  auf  $r dr/dx = \mu(1 - x^2)(r^2 - x^2)^{1/2}$  konstruiert Verf. Schranken  $r = f(x)$ ;  $f(-a) = f(a) = 0$  für den Grenzzykel, indem er den Be-

reich  $x = (-a, +a)$  unterteilt und im letzten Faktor der rechten Seite der Diff. Gl. für  $r(x)$  die Größe  $x$  abschnittsweise durch ihren größten oder kleinsten Wert ersetzt. Diese Kurven werden dann nur von außen nach innen (oder nur umgekehrt) von den Isoklinen durchsetzt. Schon mit drei Abschnitten erhält Verf. bessere Schranken für die Amplitude  $a$  des Grenzykels als LaSalle (1,77...2,21) mit seinem zwar eleganten, aber etwas abliegenden Verfahren, und die Genauigkeit kann leicht weiter gesteigert werden; Verf. gibt den Bereich (1,94...2,10) an.

Uwe Timm Bödequadt.

**Brock, J. E.:** An iterative numerical method for nonlinear vibrations. J. appl. Mech. 18, 1—11 (1951).

Das vom Verf. an Beispielen erläuterte Verfahren läßt sich allgemein wie folgt beschreiben: Für die Differentialgleichung  $d^2x/dt^2 + g(x, t) = 0$ , in welcher  $g(x, t) = \sum g_n(x, t)$  Summe endlichvieler in  $t$  homogener Funktionen ist:  $g_n(x, k t) = k^n g_n(x, t)$ , sei die Randwertaufgabe  $x(0) = A$ ,  $(dx/dt)(0) = B$ ,  $x(\tau) = C$  mit noch unbestimmtem  $\tau$  zu lösen. Durch die Substitution  $t = \tau u$  wird  $x(t) = z(u)$ ,  $g_n(x, t) = \tau^n g_n(x, u)$ . Zweimalige Integration nach  $t$  liefert

$$z(u) = C - \tau(1-u)B + \sum \tau^{n+2} \zeta_n(z; u) \quad \text{mit} \quad \zeta_n(f; u) = \int_u^1 \int_0^v g_n(f(w), w) dw dv.$$

Diese Integralgleichung wird durch Iteration gelöst, indem durch Einsetzen der  $i$ -ten Näherung  $z_i(u)$  in die  $\zeta_n(z; u)$  die  $(i+1)$ -te Näherung  $z_{i+1}(u)$  entsteht; der zunächst noch unbestimmte zugehörige Wert von  $\tau$  folgt aus der algebraischen Gleichung  $z(0) = A$ . Für  $B = C = 0$  ist als erste Näherung  $z_1(u) = A(1-u^2)$  oder auch  $A \cos(\pi/2)u$  geeignet. Wenn dabei  $g(x, t)$  homogen in  $t$  ist, kann die Bestimmung von  $\tau$  bis nach Beendigung der Iteration in  $z(u)$  aufgeschoben werden, da dann  $z_{i+1}(u) = A \zeta(z_i; u)/\zeta(z_i; 0)$  wird. Die Integrationen lassen sich numerisch sehr bequem nach der Trapezformel durchführen, wenn  $z$  und  $d^2z/du^2$  für die Stellen  $u = 2m/2k$ ,  $dz/du$  für  $u = (2m-1)/2k$  gebildet werden. — Ein Konvergenzbeweis wird in dieser Mitteilung nicht gebracht. Die praktische Konvergenz hängt von der Güte der ersten Näherung ab; dabei ist die Integrationsarbeit gering, da sie sich zur Hauptsache auf Additionen beschränkt, wenn man das angegebene Verfahren benutzt.

Uwe Timm Bödequadt.

**Leutert, Werner:** On the convergence of approximate solutions of the heat equation to the exact solution. Proc. Amer. math. Soc. 2, 433—439 (1951).

La solution de l'équation (1)  $u_{xx} = u_t$  satisfaisant à la condition initiale  $u(x, 0^+) = f(x)$ ,  $0 < x < 1$ , et aux conditions aux limites  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,  $t \geq 0$ , peut être représentée par le développement

$$(2) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \exp(-n^2\pi^2 t),$$

avec  $a_n = 2 \int_0^1 f(x') \sin n\pi x' dx'$ . — L'A. cherche une approximation de (2), constituant une solution de l'équation aux différences finies

(3)  $v(x, t + \Delta t) - v(x, t - \Delta t) = 2r[v(x + \Delta x, t) + v(x - \Delta x, t) - 2v(x, t)]$ , introduite autrefois par L. F. Richardson; on forme l'équation (3) en divisant l'intervalle  $(0, 1)$  en  $M$  parties égales  $x = M^{-1}$  et en posant  $t = r/M^2$ . — L'A. choisit une approximation de (2) sous la forme de la somme finie

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^M a_n \sin n\pi x [(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} + \alpha]^{-tM^2/r}$$

avec  $\alpha = 4r \sin^2(n\pi/M)$ ; la fonction  $v(x, t)$  satisfait à l'équation (3), on a, en outre  $v(0, t) = v(1, t)$ , mais, en général,  $v(x, 0) = u(x, 0)$ . Or, pour  $M \rightarrow \infty$ , la somme  $v$  converge vers la fonction  $u(x, t)$  qui figure dans (2). On peut de même chercher une approximation sous la forme plus générale

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^M b_n \sin n\pi x [(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} + \alpha]^{-tM^2/r},$$

à condition que l'on ait  $\lim_{M \rightarrow \infty} b_n(M) = a_n$ , uniformément (par rapport à  $n$ ).

M. Krzyżański.

McConnell, A. J.: The hypercircle method of approximation for a system of partial differential equations of the second order. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 54, Nr. 17, 263—290 (1951).

Auf Grund früherer Arbeiten von Prager und Synge (dies. Zbl. 29, 55, 235) wird die sog. Hyperkreismethode zur Lösung von Randwertproblemen für lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung geschildert; sie ist nicht auf Eigenwertprobleme anwendbar. Das Randwertproblem wird in zwei komplementäre Relaxationsprobleme aufgespalten, deren Lösungen  $U_1, U_2$  zwei lineare Unterräume des Funktionenraumes darstellen, wobei die gesuchte Lösung  $U$  auf der Hyperkugel über dem die Punkte  $U_1$  und  $U_2$  verbindenden Durchmesser oder genauer auf einem Hyperkreis als Schnittkurve dieser Hyperkugel mit Hyperebenen liegt. Die Methode, die für eine einzelne selbstadjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung und das selbstadjungierte System ausgearbeitet wird, steht in Beziehung mit einer Näherungsmethode von L. Trefftz (Proc. 2. internat. Congr. appl. Mech. 1926, 131), bei der die Konstanten einer Reihe von Lösungen der Relaxationsprobleme so gewählt werden, daß die Differenz gegen die gesuchte Lösung stationär wird.

Joachim Pretsch.

Él'sgol'c, L. É.: Über die angenäherte Integration von Differentialgleichungen mit retardiertem Argument. Priklad. Mat. Mech. 15, 771—772 (1951) [Russisch].

Weissinger, Johannes: Über das Iterationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. 31, 245—246 (1951).

In einem vollständigen metrischen Raum mit Elementen  $\xi, \eta, \dots$  und einem Abstand  $|\xi, \eta|$  sei  $H$  eine Halbgruppe von Abbildungen  $T$  des Raumes  $\Omega$  in sich. Es sei für Abbildungen  $T$  ein Betrag erklärt mit  $|T| \geq 0$  und  $|T\xi, T\eta| \leq |T| |\xi, \eta|$  für alle  $\xi, \eta$ . Dann konvergiert die Folge  $\xi_n = T^n \xi_0 = T \xi_{n-1}$  bei beliebigem  $\xi_0$ , und zwar gegen die eindeutig bestimmte Lösung  $\xi$  von  $\xi = T\xi$ , wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} |T^n|$  konvergiert; es gilt für  $|T| < 1$  die Fehlerabschätzung  $|\xi_n, \xi| \leq |\xi_n, \xi_{n-1}| |T| / (1 - |T|)$ . In diesem Satz sind die meisten der bekannten Konvergenzkriterien für Iterationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen und bei Fredholm'schen Integralgleichungen als Spezialfälle enthalten.

Lothar Collatz.

Ruderman, Harry D.: An extension of the nomogram instrument. Proc. Amer. math. Soc. 2, 262—263 (1951).

Eine Funktion der  $n$  Variablen  $s_i$  heißt dann eine  $N$ -Funktion (d. h. eine nomographisch darstellbare Funktion), wenn sie durch eine  $n$ -reihige Determinante  $(V_{ij})$  ausgedrückt werden kann, wobei die Funktionen  $V_{ij}$  nur von  $s_i$  allein abhängen sollen.  $R_i^k$  ( $k = 1, \dots, m$ ;  $i = 1, \dots, n$ ) sei auch nur eine Funktion von  $s_i$ ,  $g_j$  eine Funktion der  $m$  Variablen  $u_1, \dots, u_m$ . Es wird definiert, daß das Tripel  $(m, R_i^k, g_j)$  zu  $f$  gehöre, wenn  $f$  eine  $N$ -Funktion ist mit  $V_{ij} = g_j(R_i^1, \dots, R_i^m)$ . Zunächst wird das Lemma bewiesen: Jede  $N$ -Funktion hat wenigstens ein solches Tripel. Verf. beweist dann das Theorem: Das Tripel  $(m, R_i^k, g_j)$  gehöre zu  $f$ .  $T_1, \dots, T_m$  seien  $m$  willkürliche Funktionen einer einzigen Variablen und  $C_1, \dots, C_n$   $n$  Kurven der Dimension  $m$  mit der Parameterdarstellung  $x_k = T_k^{-1}(R_i^k(s_i))$ , ( $k = 1, \dots, m$ ;  $i = 1, \dots, n$ ).  $F$  seien die  $\infty^n$  Hyperflächen:  $A_1 g_1(T_1(X_1), \dots, T_m(x_m)) + \dots + A_n g_n(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m)) = 0$ . Dann gibt es für jedes Wertesystem  $(s_1, \dots, s_n)$ , für das  $f$  verschwindet, Punkte  $(x_1, \dots, x_m)_i$  auf  $C_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), die auf einer einzigen Fläche von  $F$  liegen. Die Koordinaten kann man aus der Parameterdarstellung der Kurven erhalten. Und umgekehrt, wenn eine einzige Fläche von  $F$  die Kurven  $C_1, \dots, C_n$  in den  $n$  Punkten  $(x_1, \dots, x_m)_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) schneidet, die aus  $s_1, \dots, s_n$  bei der Konstruktion der Kurven hervorgehen, dann verschwindet  $f$  für  $(s_1, \dots, s_n)$ .

Rudolf Ludwig.



**Urcelay, José Maria:** Rhomboidale Nomogramme. *Gac. mat., Madrid* **3**, 183—194 (1951) [Spanisch].

**Laible, Theodor:** Höhenkarte des Fehlerintegrals. *Z. angew. Math. Phys.* **2**, 484—486 (1951).

**Fletcher, Alan:** Tables of two integrals and of Spielrein's inductance function. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **4**, 223—235 (1951).

Unter gewissen Voraussetzungen kann die Selbstinduktivität  $L$  von dünnen ebenen Spulen (Innenradius  $a$ , Außenradius  $A$ ,  $\alpha = a/A < 1$ , Windungszahl  $N$ ) durch  $L = N^2 A f(\alpha)$  ausgedrückt werden. Ein exakter Ausdruck für  $f(\alpha)$  wurde zuerst von J. Spielrein [*Arch. Elektrotechn.* **3**, 187—202 (1915)] angegeben:

$$f(\alpha) = 16\pi (I - \alpha^3 J) / [3(1 - \alpha)^2] \quad \text{mit} \quad I = \int_{\alpha}^1 (K - E) dk, \quad J = \int_{\alpha}^1 (K - E) k^{-3} dk,$$

( $K$  und  $E$  vollständige elliptische Integrale 1. und 2. Gattung,  $k$  Modul). — Einleitend wird über den Stand des Problems und die Berechnungsmöglichkeiten berichtet. Ausführlicher wird dabei auf die Integration vollständiger elliptischer Integrale eingegangen. Es folgt eine kritische Betrachtung der ungenauen und fehlerhaften Spielreinschen Tafeln. — Vorliegende Arbeit enthält für  $\alpha = 0(0,01)1$  die Tafeln von  $I$  und  $J$  mit 10 Dezimalen und von  $f(\alpha)$  mit 6 Dezimalen und teilweise zweiten modifizierten Differenzen. Daneben sind einige Hilfsfunktionen und Koeffizienten vertafelt, die für die Berechnung benutzt wurden. Die Berechnung der Funktionswerte in den einzelnen Intervallen wird ausführlich beschrieben. Die wesentliche Grundlage bildeten Manuskripte mit 12 Dezimalen der vollständigen elliptischen Integrale (die Verf. 1940 mit 10 Dezimalen veröffentlicht hat; vgl. dies. Zbl. **26**, 212), aus denen ein beträchtlicher Teil der Werte von  $I$  und  $J$  durch numerische Quadratur gewonnen werden konnte. Heinz Unger.

**Eagle, E. L.:** The log log scales of the slide rule. *Math. Mag.* **25**, 101—104 (1951).

**Artobolevskij, I. I.:** Ein Mechanismus zur Lösung quadratischer Gleichungen von der Form  $x^2 - px + q = 0$ . *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **79**, 401—403 (1951) [Russisch].

Ein aus fünf Stäben bestehender Mechanismus. Von den Stäben sind zwei mit Skalen versehen und liegen im Abstand 1 fest. Die Verbindungslinie der Skalen-nullpunkte steht senkrecht zu diesen beiden Stäben. Ein dritter Stab dreht sich um den Nullpunkt der Skala des ersten, ein vierter um den Punkt  $1/p$  dieser Skala. Der letzte Stab führt den Schnittpunkt von Stab 3 und 4 auf einem Kreis, dessen Durchmesser die Verbindung der beiden Skalenanfangspunkte ist. Schneidet dann der vierte Stab auf der Skala des zweiten den Wert  $q/p$  aus, so geht der dritte Stab durch den gesuchten Wurzelpunkt  $x$  der Skala des zweiten Stabes. Es gibt zwei solche Lagen des Mechanismus. Friedrich-Adolf Willers.

**Erismann, Th.:** Einige neue mechanische Integriergeräte. *Z. angew. Math. Mech.* **31**, 253—254 (1951).

Selbstreferat eines Vortrages auf der GAMM-Tagung 1951 in Freiburg i. B. Es wird über einige Verbesserungen an Planimetern und Integratoren berichtet und auf eine im Bau befindliche Integrieranlage der Firma Amsler in Schaffhausen hingewiesen, die durch Kugelintegratoren gekennzeichnet ist. Hans Bückner.

**Kilburn, T.:** The new universal digital computing machine at the University of Manchester. *Nature* **168**, 95—96 (1951).

Auf Grund der mit einer früheren Maschine (dies. Zbl. **33**, 192) gewonnenen Erfahrung wurde eine große im Dualsystem in Serie arbeitende neue Maschine gebaut. Sie benutzt Kathodenstrahlröhren als Innenspeicher (Kapazität 10240 Ziffern) und magnetische Aufzeichnung auf rotierender Trommel (vorläufig 150 000 geplant bis zu mehr als 600 000 Ziffern Fassungsvermögen) als Außenspeicher. Dieser nimmt z. B. die Unterprogramme auf. Während fast alle Operationszeiten

die gleichen geblieben sind (z. B. Additionszeit für zwei 40-stellige Zahlen 1,2 m/sec) ist die Konstruktion so geändert, daß die Multiplikation wesentlich schneller als früher erfolgt (2,16 m sec für zwei 40-stellige Zahlen). Die Durchschnittsgeschwindigkeit der eigentlichen Rechenoperationen wird dadurch auf das zwei- bis dreifache erhöht. Dafür wird eine etwa zehnprozentige Vergrößerung der Anlage, die jetzt 1600 Pentoden und 2000 Dioden hat, in Kauf genommen, da dadurch auch die Anpassungsfähigkeit und die Oekonomie der Programmierung erhöht wird. Eingabe und Ausgabe (erstere etwa zwanzigmal so schnell als letztere) erfolgt mittels Fernschreiber, die Papierstreifen mit fünf Lochreihen verwenden. Ein geplantes Arbeitsprogramm wird angegeben.

*Friedrich-Adolf Willers.*

● **Wilkes, Maurice V., David J. Wheeler and Stanley Gill: The preparation of programs for an electronic digital computer.** Cambridge (Mass.) Addison-Wesley Press 1951. 167 p.

Die programmgesteuerte Ziffernmaschine der Universität Cambridge (England), unter dem Namen EDSAC bekannt, ist mit einem aus Quecksilberröhren bestehenden Speicherwerk versehen, welches Zahlen in der Darstellung von Ultraschallimpulsfolgen bewahrt. Es ist für eine Kapazität von 1024 17-stelligen Dualzahlen geplant, besitzt zur Zeit aber nur die halbe Kapazität. Die Befehle werden als Dualzahlen dargestellt und im Speicherwerk deponiert. Sie sind vom Einadressentyp, können durch die Maschine selbsttätig abgeändert werden und ermöglichen den bedingten und unbedingten Sprung in einem Programm von Befehlen. Insgesamt sind 22 Befehle vorhanden. — Mit Bezug auf diese spezielle Maschine beschreiben Verf. den Entwurf von Programmen. Wichtig sind dabei die Unterprogramme für gewisse, bei vielen Problemen immer wiederkehrende Elementaraufgaben. Das EDSAC besitzt ein Archiv von Unterprogrammen, z. B. für die Division, die numerische Quadratur, die Berechnung der Werte wichtiger Funktionen und zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren, um nur einige von vielen Beispielen zu nennen. Alle diese Unterprogramme und ihr Einbau in Hauptprogramme bilden den wesentlichen Inhalt des Buches. — Das Buch wird allen von Nutzen sein, die sich mit dem Betrieb einer programmgesteuerten Maschine, insbesondere vom Einadressentyp, beschäftigen, auch wenn zur Zeit noch keine zwei Maschinen dieses Typs mit den gleichen Befehlen existieren.

*Hans Bückner.*

**Booth, Andrew D.: A signed binary multiplication technique.** Quart J. Mech. appl. Math. 4, 236—240 (1951).

Bei einem Teil der programmgesteuerten Ziffernmaschinen wird mit positiven Dualzahlen der Form  $\xi = \sum_{r=0}^n \xi_r 2^{-r} = \xi_0 \cdot \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ ;  $\xi_r = 0$  oder 1 operiert;  $\xi$  repräsentiert die Dualzahl  $x = \xi - 2\xi_0$ , so daß  $\xi_0 = 0$  eine positive,  $\xi_0 = 1$  eine negative Zahl  $x$  bedeutet. Sei  $\eta_j$  der Repräsentant einer weiteren Dualzahl  $y = \eta - 2\eta_0$ . Dann ist im allgemeinen der Repräsentant von  $x y$  nicht kongruent  $\xi \eta_j \bmod 2$ . Die Maschine muß daher  $\xi \eta$  korrigieren, um einen Repräsentanten für das Produkt zu schaffen. Um diese Korrektur zu vermeiden, schlägt Verf. das folgende einfache und einheitliche Schema vor. Man berechne nacheinander die Zahlen  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = \frac{1}{2} [p_0 + (\xi_{n+1} - \xi_n) y]$ ,  $\dots$ ,  $p_n = \frac{1}{2} [p_{n-1} + (\xi_2 - \xi_1) y]$  und schließlich  $p_{n+1} = p_n + (\xi_1 - \xi_0) y$  mit  $\xi_{n+1} = 0$ . Dann ist  $p_{n+1} = x y$ . Maschinell wird nun aus  $\eta$  und dem Repräsentanten von  $p_i$  der Repräsentant von  $p_{i+1}$  gewonnen, so daß die gesamte Rechnung am Schlusse den Repräsentanten von  $x y$  ergibt. (Das Fehlen des Faktors  $\frac{1}{2}$  bei der Formel für  $p_{n+1}$  ist zu beachten.)

*Hans Bückner.*

**Ramsayer, Karl: Funktionsrechenmaschinen mit ein- und mehrstufiger Interpolation.** Z. angew. Math. Mech. 31, 301—309 (1951).

Verf. beschreibt ein digitales Rechenggerät, mit dessen Hilfe sich zu jedem vorgegebenen Argument der Funktionswert berechnen läßt. Vorgesehen sind speziell trigonometrische und zyklometrische Funktionen. Dem Gerät liegt folgendes Prinzip zugrunde: Der totale Argumentbereich der Funktionen wird in kleine — nicht notwendig gleich lange — Intervalle unterteilt und  $f(x)$  in jedem dieser Intervalle durch ein Polynom dargestellt. Verf. gewinnt diese Polynome durch eine sogenannte „vermittelnde“ Interpolation, die indessen stark an die zu diesem Zweck meist verwendete Entwicklung nach Tschebyscheffschen Polynomen erinnert [vgl. Harri-

son, Math. Tables Aids Comput. 3, 400ff. (1949)] und wohl auch besser durch diese Methode ersetzt würde. — Technisch wird die Berechnung von  $f(x)$  so realisiert, daß die Koeffizienten der Interpolationspolynome ein für allemal durch entsprechend ausgeschnittene Bleche mechanisch gespeichert werden. Bei einem gegebenen  $x$  wird dann zunächst das Intervall bestimmt, worauf die Koeffizienten des in Frage kommenden Polynoms abgegriffen und auf eine Rechenmaschine (Vollautomat mit Rückübertragung) übertragen werden, die die Berechnung von  $f(x)$  übernimmt.

*Heinz Rutishauser.*

**Bückner, Hans:** Bericht über die modernen Rechenggeräte. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 55, 1. Abt., 15—38 (1951).

Die vorliegende Übersicht über den derzeitigen Stand der Rechenggeräte behandelt im ersten, den Analogie-Geräten gewidmeten Teil zunächst Funktions-triebe und Integratoren. Anschließend erfolgt eine Beschreibung der Servo-Technik, welche in vielen modernen Analogie-Geräten eine zentrale Rolle spielt, und schließlich wird in kurzen Zügen das Prinzip der Integrier-Anlage erläutert. — Der zweite Teil behandelt die programmgesteuerten Maschinen. Nach einigen historischen Bemerkungen wird die Gliederung einer Maschine sowie die Liste einiger möglicher Befehle gegeben. Leider entspricht die als Beispiel gewählte Organisation des Rechenwerkes und damit die Natur der Befehle nicht mehr der heute üblichen Art. Anschließend erfolgt an Hand einiger Beispiele eine lehrreiche Erläuterung des Prinzips der Rechenplanfertigung, wobei die sogenannten Sprungbefehle die ihrer hohen Wichtigkeit entsprechende Würdigung erfahren. Die verschiedenen Möglichkeiten der Steuerung (ein oder mehrere Streifen-Abtaster, Speicher-Steuerung) werden diskutiert. Schließlich sind einige kurze Erläuterungen über die verwendeten elektronischen Schaltungen gegeben, und es werden die heute üblichen elektronischen Speicherverfahren erwähnt. Ein Literaturverzeichnis weist auf die wichtigsten Veröffentlichungen auf diesem Gebiet hin. — Die Arbeit stellt eine in ihrer Knappheit sorgfältig ausgewählte und mathematisch einwandfrei fundierte Zusammenfassung dar.

*Ambros P. Speiser.*

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● **Mises, Richard von:** Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. 3. neu bearbeitete Aufl. Wien: Springer-Verlag 1951. IX, 278 S. DM 18.—.

In der dritten Auflage des bekannten Buches hat Verf. zu neueren inzwischen erschienenen Arbeiten und Monographien über die Wahrscheinlichkeitsrechnung kritisch Stellung genommen. An seiner Grundkonzeption, die Wahrscheinlichkeit als Limes der relativen Häufigkeit zu definieren, wurde nichts geändert. Besonders ausführlich hat sich Verf. mit der Kritik an dem von ihm formulierten Regellosigkeitsaxiom auseinandergesetzt. Wenn Verf. es auch nicht explizit ausspricht, so kann man doch feststellen, daß er die Berechtigung dieser Kritik anerkennt. In einer im üblichen mathematischen Sinne axiomatisch aufgebauten, widerspruchsfreien Theorie bedeutet Existenz Nachweis eines arithmetischen Modells. Ergebnisse u. a. von Copeland und Feller haben gezeigt, wie man die allgemeine Regellosigkeitsforderung einzuschränken hat, um in diesem Sinne Widerspruchsfreiheit zu erzielen. — Bei einer späteren Neuauflage wäre es wünschenswert, die von Misessche Definition der Wahrscheinlichkeit mit der von Kolmogoroff initiierten Auffassung der Wahrscheinlichkeit als additiver Mengenfunktion ausführlicher zu konfrontieren; das um so mehr, als in neuerer Zeit von der Kolmogoroffschen Auffassung weitgehend Gebrauch gemacht wird. Auch dem bekannten Lehrbuch von Cramér, Mathematical methods in statistics (Princeton 1946)



wurde diese Definition zugrunde gelegt. In den Buchdarstellungen der Kolmogoroff'schen Richtung wird der Zusammenhang zwischen der abstrakt definierten Wahrscheinlichkeit und ihren Gesetzmäßigkeiten und dem, was bei einer beobachteten Ereignisreihe vorliegt, zu kursorisch behandelt. Auf der anderen Seite erweist sich die Kolmogoroff'sche Auffassung in der allgemeinen Theorie, falls der Merkmalraum nicht mehr endlich viele Merkmale aufweist, als unerlässlich. Neu aufgenommen wurde in der jetzigen Auflage u. a. eine Besprechung der Theorie der Plausibilität von Aussagen, die Gesetze der großen Zahlen für statistische Funktionen und ein kritisches Referat über die „small sample“-Theorie.

Kurt Schröder.

**Pompili, Giuseppe:** Lineamenti di una teorica della persuasione. Archimede 3, 135—143 (1951).

Elementare Ausführungen über die Bayessche Formel und ihre Anwendbarkeit auf ursächliche Deutung, insbesondere ärztliche Diagnose und Gerichtsurteile.

Maria-Pia Geppert.

**Kanellos, S. G.:** On the probability of a sum of infinitely many events. Bull. Soc. math. Grèce 25, 103—112 und engl. Zusammenfassg. 112—114 (1951) [Griechisch].

Usually the axiom is taken as granted that the probability of a sum of an infinite number of mutually exclusive events equals the „sum“ of their probabilities. In this paper a proof is provided for that axiom within a certain domain of problems. The proof is based upon the following: 1. The statistical definition of the probability as the limit of the relative frequency; a probability for an event does or does not exist according as that limit does or does not exist. 2. The concept of the „equivalent event“. We call equivalent event of the compound event  $e_1, e_2, \dots, e_k$  and denote by  $[e_1, e_2, \dots, e_k]$  the „sum“ of all infinite „products“ of the form (1)  $e_1, e_2, \dots, e_k A_1, A_2, \dots, A_n \dots$  where any of the  $A$ 's is an  $e$  or a complementary of an  $e$ . Of course the set of all such products is non-countable. Thus the event  $[e_1, e_2, \dots, e_k]$  appears if and only if a product of the form (1) appears. But  $[e_1, e_2, \dots, e_k]$  can be thought of as appearing in a conceivable infinite sequence of events with probability equal to that of  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . Hence  $P([e_1, e_2, \dots, e_k]) = P(e_1, e_2, \dots, e_k)$ . 3. Theorem II by which „If (a)  $S$  is the sum of an infinite number of events  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$  having probabilities  $P(\gamma_1), P(\gamma_2), \dots, P(\gamma_n), \dots$ ; (b) the series  $P(\gamma_1) + P(\gamma_2) + \dots + P(\gamma_n) + \dots$  converges; (c)  $R_n = \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} + \dots \subset b_n$  where the probability of  $b_n$  converges to 0 as  $n \rightarrow \infty$  then (α) the event  $S$  has a definite probability  $P(s)$  and (β)  $P(s) = P(\gamma_1) + P(\gamma_2) + \dots + P(\gamma_n) + \dots$ “. But obviously

$$R_n \underbrace{[A \dots A A B]}_{2n+2} + \underbrace{[A A \dots A A A B]}_{2n+4} + \dots \subset \underbrace{[A A \dots A A]}_{2n+2} = b_n$$

Hence, assuming the independence of the consecutive events, we have by the above mentioned theorem II

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \{P(A)\}^{2n} \cdot (P(B)).$$

The examples which are similar to this are embodied in theorem III of § 6 where, on similar grounds, the fact is established that every infinite sum of events exhibiting a certain periodicity has a probability equal to the sum of the probabilities of its summands.

(Aus der engl. Zusammenfassg.)

**Toledo Piza, Alfonso P. de:** Betrachtungen über das geometrische Verteilungsgesetz. Trabajos Estadist. 2, 79—102 und spanische Zusammenfassg. 102—104 (1951) [Portugiesisch].

**Ramabhadran, V. K.:** A multivariate gamma-type distribution. Sankhyā 11, 45—46 (1951).

Verf. dehnt eine von Cherian 1941 für zweidimensionale Verteilungen vom Gammatypus gefundene Formel für eine spezielle Funktion („die momenterzeugende“) auf mehrere Dimensionen aus.

Paul Lorenz.

**Tricomi, Francesco G.:** Applicazione della funzione gamma incompleta allo studio della somma di vettori casuali. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 189—194 (1951).

Im  $R_k$ , dem euklidischen Raum der Dimensionszahl  $k = 2, 3, \dots$  mögen mit  $\nu = 1, 2, \dots, n$  und  $r_\nu^2 = 1$  die Mittelwerte  $n^{-1} \left| \sum_{\nu=1}^n r_\nu \right| = m$  gebildet werden.

Ihre asymptotische Bestimmung für  $n \rightarrow \infty$  und insbesondere die 2. Näherung

$$(1) \quad m = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)} \sqrt{\frac{2}{kn}} \left[ 1 + \frac{1}{4(k+2)n} + O(n^{-2}) \right],$$

welche für biologische Massenversuche gebraucht wird, ist das Vorhaben der Untersuchung. Die Frage nach einer relativen Häufigkeit hatte Kluyver und Watson (Bessel functions 1944, p. 421) zum Größenausdruck

$$(2) \quad P_n(r) = \left\{ \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \right\}^{n-1} 2^{(n-1)(k/2-1)} r^{k/2} \int_0^\infty dt t^{(1-n)k/2} [J_{k/2}(tr)]^n$$

geführt. Durch Entwicklung der potenzierten Zylinderfunktion im Integranden (2) gewinnt man Näherungen steigender Ordnung etwa in der Hilfsgröße  $kr^2/2n = x$

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) P_n(r) = \int_0^x dt e^{-t} t^{k/2-1} + \frac{1}{n} e^{-x} x^{k/2} \left( \frac{x}{k+2} - \frac{1}{2} \right) + O(n^{-2});$$

für  $r \rightarrow 1$  entsteht die Aussage (1).

Wilhelm Maier.

Cansado, Enrique: A study of bivariate distributions. Trabajos Estadist. 2, 149—177 und engl. Zusammenfassg. 178 (1951) [Spanisch].

Für die zweidimensionalen Verteilungen

$$\begin{aligned} 1) \quad & (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)/2\pi}, & 2) \quad & (x+y) e^{-(x+y)/2}, \\ 3) \quad & x^{m_1+m_2-1} y^{m_1-1} e^{-x(1+y)/\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)} \end{aligned}$$

( $x \geq 0, y \geq 0$ ) werden Rand- und bedingte Verteilungen, Momente, Regressionen und charakteristische Funktionen berechnet. Bei 3) sind in der Bestimmung der Regressionsgeraden, der Trägheitsellipse und deren Hauptachsentransformation Rechenfehler unterlaufen, und in der Bestimmung der charakteristischen Funktion der  $y$ -Randverteilung die Singularitäten der  $\Gamma$ -Funktion nicht beachtet.

Maria-Pia Geppert.

Sapogov, N. A.: Das Stabilitätsproblem für den Satz von Cramér. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 15, 205—218 (1951) [Russisch].

Cramér hat im Jahre 1936 einen Beweis dafür gegeben, daß jede von zwei unabhängigen zufälligen Veränderlichen, deren Summe dem Gesetz der Normalverteilung gehorcht, ebenfalls normal verteilt ist. Aber weder dieser Beweis noch eine Modifikation desselben durch Bernstein gestatten unmittelbar einen Schluß auf das Verteilungsgesetz der Summanden, wenn bekannt ist, daß die Summe dem Gesetz der Normalverteilung nur näherungsweise gehorcht, oder wenn die Summanden nicht vollständig voneinander unabhängig sind. Verf. zeigt, daß auch in diesen Fällen die Summanden noch etwa näherungsweise normal verteilt sind. Ist die absolute Abweichung des Integrals der Verteilung der Summe von  $-\infty$  bis  $x$  von dem Integral der Normalverteilung für jedes  $x$  kleiner als eine positive Größe  $\varepsilon < 1$  (nach Normierung der Veränderlichen), dann ist für jeden der Summanden die absolute Abweichung des Integrals seiner Verteilung von dem Integral der Normalverteilung mit gleichem Mittelwert und gleicher Streuung immer kleiner als eine gewisse Größe, die allerdings, wie es Ref. scheint, auch bei sehr kleinem  $\varepsilon$  nicht gerade klein zu sein braucht, so daß die Abweichungen der Verteilungen der Summanden von der Normalverteilung auch dann noch erheblich sein können. — Verf. bemerkt zum Schluß, daß ähnliche Beweise wie für die Gaußverteilung auch für die Poissonsche und die Binomialverteilung geführt werden können.

Paul Lorenz.

Gumbel, E. J. and L. H. Herbach: The exact distribution of the extremal quotient. Ann. math. Statistics 22, 418—426 (1951).

Verff. stellen sich die Aufgabe, für eine Reihe von unabhängigen Beobachtungen aus derselben „Urne“ die exakte Verteilung des Quotienten  $Q$  des größten durch den kleinsten Beobachtungswert zu berechnen, nachdem die asymptotische Verteilung

von  $Q$  schon in einer früheren Arbeit von Gumbel und Keeney (dies. Zbl. 40, 74) untersucht worden war. Ist  $F(x)$  die Verteilung der zwischen  $-\omega_1$  und  $\omega_2$  liegenden Zufallsvariablen, so folgt eine allgemeine Formel für die Verteilung von  $Q$ . Natürlich ist  $Q$  von der Skala unabhängig und (ebenso natürlich) äußerst empfindlich gegen Verlegung des Anfangspunktes. Spezialfälle, insbesondere gleichförmige Verteilung  $F(x)$  in beschränktem Intervall, werden genau betrachtet, auch symmetrische Verteilung in nicht begrenztem Intervall. Die Resultate sind im ganzen recht kompliziert. — Es scheint Ref., daß man mit der in solchen Schlüssen erreichbaren Genauigkeit die Information (mindestens), die aus der Betrachtung von  $Q$  folgt, auch aus der des größten und kleinsten Wertes gesondert erlangen kann.

*Hilda Geiringer.*

Schelling, Hermann von: Distribution of the ordinal number of simultaneous events which last during a finite time. Ann. math. Statistics 22, 452—455 (1951).

Aus einer Urne, die weiße und schwarze Kugeln im Verhältnis  $p:q = 1-p$  enthält, wird in jeder Sekunde eine Kugel gezogen und nachher wieder zurückgelegt; wenn die gezogene Kugel weiß ist, wird das Spiel für  $k$  Sekunden unterbrochen und dann wieder aufgenommen. Man fragt nach der Wahrscheinlichkeit  $w(m;n)$ , daß, falls die in der  $n$ -ten Sekunde gezogene Kugel weiß ist, diese die  $m$ -te Kugel, von Beginn an gerechnet, ist. — Setzt man  $x = p/q^{k-1}$ , so ergibt sich:  $w(m;n) =$

$\binom{n-1-k}{m-1} x^{m-1/s_n(x)}$ ; dabei ist  $s_n(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\gamma_i^n}{(k+1)\gamma_i - k}$  und die

$\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$  sind die  $k+1$  verschiedenen Wurzeln der Differenzengleichung  $\gamma^{k+1} - \gamma^k - x = 0$ . Für diese — der Bernoullischen Verteilung verwandte — Wahrscheinlichkeit werden Erwartungswert und Streuung berechnet, wobei sich für letztere auch gute Näherungsformeln für große  $n$  angeben lassen. Erwähnt sei

das Resultat  $\frac{\text{Var}(m/n)}{[E(m/n)]^2} \sim \frac{1}{n} \frac{1-p}{p^2}$ . Anwendungsbeispiele zu dieser Aufgabe werden nicht angegeben.

*Hilda Geiringer.*

Fraser, D. A. S.: Generalized hit probabilities with a gaussian target. Ann. math. Statistics 22, 248—255 (1951).

Verf. verallgemeinert ein von Cunningham und Hynd behandeltes Problem, die Wahrscheinlichkeit zu finden, daß wenigstens ein Treffer erzielt wird, wenn ein automatisches Gewehr gegen eine bewegte Scheibe feuert, auf einen Treffbereich von  $k$  Dimensionen, im Hinblick auf die Möglichkeit von Anwendungen auf andere Probleme. Er setzt voraus, daß die Wahrscheinlichkeit eines „Treffers“ bis auf einen konstanten Faktor durch eine Gaußsche Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichte der Lage der „Flughahn“ in  $k$  Dimensionen gegeben ist. In abstrahierter Form kann man das Problem so aussprechen: In einer Reihe von  $n$  Voraussagen mit gemeinsamer Verteilung die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zahl  $R$  der eintreffenden Voraussagen zu bestimmen. Das Problem wird mit Hilfe einer „Erfolgskfunktion“ mit Wahrscheinlichkeitscharakter behandelt. Es wird ein Ausdruck gefunden für die Wahrscheinlichkeit von  $r$  „Treffern“ als lineare Kombination der Wahrscheinlichkeiten aller „Treffer“ bei jeder möglichen Folge von  $n$  „Runden“ sowie Grenzverteilungen bei unbegrenzt zunehmender Rundenzahl.

*Paul Lorenz.*

Koopman, B. O.: Exponential limiting products in Banach algebras. Trans. Amer. math. Soc. 70, 256—276 (1951).

Die grundlegende Exponentialbeziehung  $(1 + a/n)^n \rightarrow e^a = 1 + a/1! + a^2/2! + \dots$  besteht — wie aus der Gruppentheorie bekannt — auch in Banachschen Algebren mit Einheitsselement. Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen führten Verf. zu der Feststellung, daß dies auch für bestimmte Verallgemeinerungen dieser

Beziehung behauptet werden kann. So z. B. nicht nur bezüglich  $\prod_{s=1}^n \left(1 + \frac{a_s}{n}\right) \rightarrow e^m$



bei  $(a_1 + \dots + a_n)/n \rightarrow m$  sowie  $(|a_1| + \dots + |a_n|)/n \rightarrow \infty$  natürlicherweise mit der Norm  $\|a_j\|$  an Stelle von  $|a_j|$ , sondern auch bezüglich jener Verallgemeinerungen, bei welchen einerseits  $a_s$  durch  $a_n + c_{ns}$  mit  $(|c_{n1}| + \dots + |c_{nn}|)/n \rightarrow 0$  ersetzt wird, andererseits an Stelle des Nenners  $n$  ein  $\omega_n$  mit  $\omega_n \uparrow \infty$  und  $\omega_{n+1}/\omega_n \rightarrow 1$  angewendet wird. Dagegen gelingt die Übertragung der zusammengesetzten Beziehung  $\prod_{s=1}^n \left(b_s + \frac{a_n + c_{ns}}{\omega_n}\right) \rightarrow p e^m$  bei  $\prod_{s=1}^n b_s \rightarrow p \neq 0$  in nichtkommutative

Algebren nur unter den zusätzlichen Bedingungen  $\|b_j\| \leq \beta < \infty$ ,  $b_j \dots b_{j+v-1} \Rightarrow B_j$ ,  $a_j/\omega_j \rightarrow 0$  und  $(a_1 B_2 + \dots + a_n B_{n+1})/\omega_n \rightarrow m$ . Dann können die  $b_s$  allerdings auch durch solche  $b_{ns}$  ersetzt werden, für welche  $\|b_{nj}\| \leq \beta < \infty$  und  $b_{nj} \dots b_{n,j+v-1} \Rightarrow B_j$  bei  $v$  und  $n \rightarrow \infty$ , aber  $j + v - 1 \leq n$  gelten. Im reellen und komplexen Zahlenkörper können die angegebenen Beziehungen nach Übergang auf die Logarithmen mit Hilfe des Taylorschen Satzes bewiesen werden. In Banachschen Algebren, in welchen die Multiplikation i. a. weder kommutativ noch umkehrbar ist, sind aber die Beweise nicht mehr elementar.

Tibor Szentmártony.

**Koopman, B. O.:** A law of small numbers in Markoff chains. Trans. Amer. math. Soc. **70**, 277—290 (1951).

Es bezeichne  $U_{11}, (U_{21}, U_{22}), \dots$  eine Folge von wachsenden einfachen Markovschen Ketten mit  $U_{nk} = 1$  oder 0. Und zwar 1 mit der absoluten Wahrscheinlichkeit (W.)  $p_{nk}$  und mit den durch  $U_{n,k-1} = 1$  bzw. 0 bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten  $a_{nk}$  bzw.  $b_{nk}$ . Es bezeichne ferner  $P_n(s)$  die W. dafür, daß 1 in der  $n$ -ten Kette genau  $s$ -mal, erwartungsmäßig

also  $m(n) = \sum_{k=1}^n p_{nk} = \sum_{s=1}^n s P_n(s)$ -mal erscheint. Wegen  $p_{nk} = (a_{nk} - b_{nk}) p_{n,k-1} + b_{nk}$  ist  $p_{nk}$  rekursiv durch  $p_{n1}$  bestimmt. Verf. sagt nun, daß ein Gesetz der „kleinen Zahlen“ vorliegt, wenn unter geeigneten Bedingungen, welche a)  $p_{n1} \rightarrow 0$  sichert  $\max p_{nk} \rightarrow 0$  und b)  $p_{n1} \rightarrow p_1$

sichert  $m(n) \rightarrow m$  umfassen,  $P_n(s) \rightarrow P(s)$  gilt. Er zeigte nämlich früher [Proc. Amer. math. Soc. **1**, 813—823 (1950)], daß bei zeilenweise unabhängigen  $U_{nk}$ , d. h.  $a_{nk} = b_{nk} = p_{nk}$ , die in a) und b) gesicherten Teilbedingungen notwendig und hinreichend für  $P(s) = e^{-m} m^s/s!$  sind — und dieses Verteilungsgesetz wird, nur diese Erzeugung beachtend, bedauerlicherweise noch oft das Gesetz der kleinen Zahlen genannt (Bemerkung des Ref.). Verf. zeigte später (dies. Zbl. **37**, 85), daß bei stationären Ketten, d. h.  $a_{nk} = a_n$ ,  $b_{nk} = b_n$  die Bedingungen a), b') die Teile von b) gesondert, c)  $a_n \rightarrow a < 1$  eine „Laguerresche“ Grenzverteilung  $P(s)$  sichern. Er gab gleichzeitig auch einen Grenzwertsatz für möglicherweise nichtstationäre Ketten an, der nun in folgender Fassung bewiesen wird: unter den Bedingungen a), b), b'')

$p_{n1} \rightarrow p_1$  sichert  $\sum_{k=0}^{n-v} E(U_{nk} U_{n,k+v}) \rightarrow R_v$ , c')  $a_{nk} \Rightarrow a_k \leq a < 1$ , d)  $b_{n2}:b_{n3}:\dots \Rightarrow c_2:c_3:\dots$  mit mindestens einem  $c_j \neq 0$  strebt  $P_n(s)$  gegen eine Grenzverteilung  $P(s)$ . Und zwar, was die Wahrscheinlichkeitenerzeugenden anbelangt, gemäß  $\varphi_n(t) \Rightarrow \varphi(t) = [1 - f(t)] \exp \{-(1-t)[m - (1-t)\psi(t)] + f(t)\}$  innerhalb  $T: |t| < \tau < 1$ , mit in  $T$  konvergenten  $\psi(t) = \sum_{v=1}^{\infty} R_v t^{v-1}$  und  $f(t) = (1-t)p_1 \sum_{v=0}^{\infty} a_2 \dots a_{2+v-1} t^v$ . Der Beweis stützt sich auf die Übertragung von elementaren Exponentialbeziehungen in Banachsche Algebren mit Einheitsselement (s. vorsteh. Referat). Die Wahl  $a_2 = a_3 = \dots = r$  ergibt das im stationären Fall gefundene  $P(s)$ , dessen Bild bei  $p_1 = 0$ ,  $m = 3$  und verschiedenen  $r$ -Werten angegeben wird.

Tibor Szentmártony.

**Lehan, Frank W.:** Expected number of crossings of axis by linearly increasing function plus noise. J. appl. Phys. **22**, 1067—1069 (1951).

Gegeben ist eine Signalfunktion  $e_S(t) = at$ , die von einem Zufallsgeräusch  $e_N(t)$  überlagert ist. Es wird die zu erwartende Zahl der Schnittpunkte der Funktion  $e(t) = at + e_N(t)$  mit der  $t$ -Achse in positiver Richtung berechnet, die vor einer vorgeschriebenen Zeit  $T$  stattfindet. — Nach den Arbeiten von S. O. Rice, Bell Syst. Techn. J. **23**, 282—332 (1944); **24**, 46—156 (1945) und Harald Cramér, Mathematical methods of statistics, Princeton 1946, p. 208 ergibt sich die Zahl der Kreuzungen der  $t$ -Achse von der negativen zur positiven Seite dieser Achse

vor der Zeit  $T$  zu  $C = F(\gamma) \Phi(\varphi)$ ,

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{-x^2/2} dx, \quad F(\gamma) = \frac{\Phi'(\gamma)}{\gamma} + \Phi(\gamma), \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{d\gamma},$$

mit  $\Phi = T/\tau$  und  $\tau = \sqrt{\mu}/a$ , wo  $a$  die Steigung der  $e_S$ -Linie und  $\sqrt{\mu}$  der quadratische Mittelwert der Geräuschfunktion  $e_N(t)$  ist.

*W. O. Schumann.*

Sherman, Seymour: Games and sub-games. Proc. Amer. math. Soc. 2, 186—187 (1951).

Dans le calcul d'un jeu à deux personnes avec un nombre fini de stratégies pures, les développements de matrices auxquels on est conduit peuvent être des opérations assez laborieuses. L'A. présente un artifice qui peut simplifier ce calcul: celui de „dominance“ ou „majorization“ (pour la terminologie, voir J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton 1947). La solution d'un jeu est ainsi ramenée à celle d'un jeu plus restreint ou „sous-jeu“. Le résultat obtenu est égal, soit à la valeur cherchée, soit à une limite de celle-ci. La multiplication et la complexité des notations nécessaires pour énoncer le résultat ne permettent pas de faire figurer ici le théorème obtenu et les deux conséquences qui en découlent.

*Albert Sade.*

Karlin, Samuel: Continuous games. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 220—223 (1951).

Es seien  $A, B$  beschränkte lineare Operatoren, welche einen Banachschen, kurz B-Raum  $\mathfrak{E}$  von Maßen  $f$  auf einen Raum  $\mathfrak{R}$  von Funktionen mit dem konjugierten B-Raum  $\mathfrak{R}^*$  von linearen Funktionalen  $g$  als Maßen abbilden. Durch die Halbkugel  $P$  bzw.  $K$  in  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{R}$ , welche bei  $\lambda, \mu \geq 0$  mit  $x, y$  auch  $\lambda x + \mu y$  als Element enthalten, werden  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{R}$  teilweise dadurch geordnet, daß  $x \geq y$  oder  $x - y \geq 0$  betrachtet wird, wenn  $x - y$  in  $P$  bzw.  $K$  liegt. Der duale Kegel  $K^*$  in  $\mathfrak{R}^*$  wird durch jene  $g$  gebildet, deren Werte  $(x, g) \geq 0$  für  $x \in K$  sind. Sind dann  $P_v, Q_u$  geeignete Teile von  $P$  bzw.  $K^*$ , so bezeichne  $\bar{\lambda}$  bzw.  $\lambda$  die obere bzw. untere Grenze jener  $\lambda$ , für welche  $Af \geq$  bzw.  $\leq \lambda Bf$  ist und  $\bar{\mu}$  bzw.  $\mu$  die entsprechenden Grenzen jener  $\mu$ , für welche sich  $(g, Af) \geq$  bzw.  $\leq \mu(g, Bf)$  ergibt bei  $f \in P_v$  und  $g \in Q_u$ . Schließlich seien  $\bar{\lambda}^*, \underline{\lambda}^*, \mu^*, \mu^*$  die entsprechenden Größen, welche sich bei den zu  $A$  bzw.  $B$  konjugierten Operatoren  $A^*$  bzw.  $B^*$  einstellen. Dann wird zunächst behauptet, daß  $\mu \geq \lambda^* \geq \bar{\lambda} \geq \mu^*$  ist. Es werden aber unmittelbar zwei Bedingungen angegeben, welche einzeln die in der Spieltheorie wichtige Wertgleichheit

$$\sup_f \inf_g (g, Af)/(g, Bf) = \bar{\lambda} = \underline{\lambda}^* = \inf_g \sup_f (g, Af)/(g, Bf)$$

eines streng determinierten, d. h. durch die Kenntnis der Strategie des Gegners unverbesserten Spieles sichern. Diese sind die Bikompaktheit von  $Af - \lambda Bf$  bzw.  $A^*g - \mu B^*g$  für festes  $\lambda, \mu$  bei der durch  $Q_u$  bzw.  $P_v$  induzierten Topologie, da sie  $\mu = \lambda$  bzw.  $\lambda^* = \mu^*$  sichern. Ein dritter Komplex von Sätzen bezieht sich auf die Perturbation der Spiele. — Einige Beispiele veranschaulichen sowohl diese Sätze als auch einige durch geeignete Wahl der Kegel erhaltbaren qualitativen Ergebnisse. Andere, insbesondere auf die Theorie der statistischen Entscheidungsfunktionen und die Prüfung von statistischen Annahmen sich beziehende Anwendungen sowie — sehr wünschenswerte — Einzelausführungen obiger Feststellungen sollen später veröffentlicht werden.

*Tibor Szentmártony.*

Dresher, Melvin: Games of strategy. Math. Mag. 25, 93—99 (1951).

Gavrik, V. Ja.: Ein Gerät zur Demonstration von Wahrscheinlichkeitsgesetzen. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 5 (45), 185—189 (1951) [Russisch].

## Statistik:

• Rios, Sixto: Einführung in die statistischen Methoden. 1. Teil. Madrid: Lit. I. Diez-Olivar 1951. 205 p. 60 pts. [Spanisch].

A mimeographed text-book which contains the lectures given by the author in University courses. The following topics have been covered: univariate and bivariate distributions, sampling theory, tests of hypotheses, confidence limits,

asymptotic distributions and central limit theorem. There are 13 lessons, and exercises without solutions are attached. The last two lessons contain the mathematical theory, which is needed for the proofs of the rules used in earlier chapters. This arrangement was chosen because of the heterogeneity of the audience to whom these lectures were addressed. It would appear, however, that the students were expected to know the fundamentals of the Calculus. The author states that analysis of variance, theory of estimation, and sequential analysis will be included in the second part of the treatise. *Stefan Vajda.*

Cox, D. R.: Some systematic experimental designs. *Biometrika* 38, 312—323 (1951).

Novožilov, V. V.: Über die Prinzipien der Bearbeitung der Ergebnisse von statistischen Untersuchungen isotroper Materialien. *Priklad. Mat. Mech.* 15, 709—722 (1951) [Russisch].

Galvani, Luigi: Révision critique de certains points de la méthode représentative. *Revue Inst. internat. Statist.* 19, 1—12 (1951).

Long, W. M.: Quality control systems based on inaccurately measured variables. *Biometrika* 38, 472—475 (1951).

Shrikhande, S. S.: On the non-existence of certain difference sets for incomplete group designs. *Sankhyā* 11, 183—184 (1951).

The author proves the following theorem: Let  $v = mn$ , where  $n$  is a prime of form  $4t + 3$ . Let also non-negative integers  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  satisfy the relation  $k(k-1) = (m-1)\lambda_1 + (n-1)m\lambda_2$ . Let further  $\theta = k + (m-1)\lambda_1 - m\lambda_2$  and  $\Phi$  be a prime factor of  $\theta$  occurring in it to an odd degree. Then, if  $-n$  is not a quadratic residue of  $\Phi$ , there does not exist a set of  $k$  positive integers  $d_1, \dots, d_k$  incongruent mod  $mn$  such that among the  $k(k-1)$  differences of this set all integers  $< v$  and congruent to multiples of  $n$  (mod  $mn$ ) occur  $\lambda_1$  times and all positive integers belonging to other classes of congruence mod  $mn$  and  $< v$  occur  $\lambda_2$  times. — This theorem shows that certain incomplete block designs are impossible. *Stefan Vajda.*

Shrikhande, S. S.: On the non-existence of affine resolvable balanced incomplete block designs. *Sankhyā* 11, 185—186 (1951).

The design mentioned in the title is defined by the following equations:

$$r = n^2 t + n + 1, \quad k = n[(n-1)t + 1], \quad b = rn, \quad v = kn, \quad \lambda = nt + 1.$$

The author proves that such design is impossible if a design  $r = k = nt + 1$ ,  $v = b = rn + 1$ ,  $\lambda = t$  exists, but a design  $r = k = n^2 t + n + 1$ ,  $v = b = rn + 1$ ,  $\lambda = nt + 1$  does not exist. *Stefan Vajda.*

Nelder, J. A.: A note on the statistical independence of quadratic forms in the analysis of variance. *Biometrika* 38, 482—483 (1951).

Hartley, H. O. and E. S. Pearson: Moment constants for the distribution of range in normal samples. *Biometrika* 38, 463—464 (1951).

Rider, Paul R.: The distribution of the range in samples from a discrete rectangular population. *J. Amer. statist. Assoc.* 46, 375—378 (1951).

Rider, Paul R.: The distribution of the quotient of ranges in samples from a rectangular population. *J. Amer. statist. Assoc.* 46, 502—507 (1951).

Woolf, Barnett: Computation and interpretation of multiple regressions. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* 13, 100—119 (1951).

Alder, K.: A note on the theory of directional correlation. *Phys. Review, II. Ser.* 83, 1266—1267 (1951).

Stevens, W. L.: Mean and variance of an entry in a contingency table. *Biometrika* 38, 468—470 (1951).

Smith, C. D.: Some probability estimates from contingency tables. *Math. Mag.* 25, 59—62 (1951).



**Evans, W. Duane:** On the variance of estimates of the standard deviation and variance. *J. Amer. statist. Assoc.* **46**, 220—224 (1951).

Verf. gibt, ausgehend von mehreren ähnlichen Untersuchungen, einige Formeln für die Streuung der stichprobenweisen Schätzung der Streuung von solchen Populationen, die weder normal verteilt noch unendlich sind, und zwar hauptsächlich deswegen, weil die im sozial-ökonomischen Gebiet vorkommenden Populationen oft nicht die genannten Bedingungen erfüllen.

*Paul Lorenz.*

**Seal, K. C.:** On errors of estimates in various types of double sampling procedure. *Sankhyā* **11**, 125—144 (1951).

The author gives expressions for estimates and for their variances for various types of double sampling procedures with one or more auxiliary variables. For one case of the latter kind the optimum number of units to be allocated to the two stages is given, under the assumption that the total cost is a linear function of the number of units. — An Appendix contains formulae for the expectation of a value in the sample covariance matrix and for the joint distribution of the regression coefficients, when the parent population is multivariate normal.

*Stefan Vajda.*

**Bose, Chameli:** Some further results on errors in double sampling technique. *Sankhyā* **11**, 191—194 (1951).

In continuation of an earlier paper [*Sankhyā* **6**, 329 (1943)] the author gives formulae for the error in a variable  $y$ , estimated by double sampling, when a variable  $x$ , correlated with  $y$ , is (i) constant in both stages or (ii) constant in the first stage only.

*Stefan Vajda.*

**Matthai, Abraham:** Estimation of parameters from incomplete data with application to design of sample surveys. *Sankhyā* **11**, 145—152 (1951).

Suppose that a sample from a population with three variables  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) is such that in  $n_{123}$  items all  $x_i$  could be measured, in  $n_{120}$  only  $x_1$  and  $x_2$ , in  $n_{100}$  only  $x_1$ , etc. The author derives an expression for the maximum likelihood estimate of the variable means, when the covariance matrix is known, and he adds some remarks about the efficiency of estimates for the case of three and also of two variables [this latter case was considered by Wilks; cf. this *Zbl.* **5**, 73]. The last chapter deals with applications to sampling investigations.

*Stefan Vajda.*

**Cohen jr., A. C.:** Estimation of parameters in truncated Pearson frequency distributions. *Ann. math. Statistics* **22**, 256—265 (1951).

Verf. hat schon in mehreren Arbeiten (dies. *Zbl.* **35**, 215, **38**, 97, **42**, 386) das praktisch häufig auftretende Problem behandelt, unbekannte Parameter insbesondere einer Normalverteilung aus einer verkürzten Stichprobe zu schätzen. Hierbei hat er sich des Maximum-likelihood-Prinzips bedient. Hier handelt es sich um dieselbe Problemstellung für die Pearsonschen Verteilungstypen (I). Diesmal erweist sich die Pearsonsche Momentenmethode als geeigneter, wozu Verf. aus der die Verteilungen (I) kennzeichnenden Differentialgleichung Beziehungen zwischen den Momenten sowohl für die vollständige als auch für die verkürzte Verteilung herleitet. In den Kreis der Betrachtungen werden einfach und doppelt verkürzte Stichproben mit bekannten Verkürzungspunkten gezogen, wenn die außerhalb der Verkürzungspunkte fallenden Beobachtungen unbekannt sind. Es folgen einige Bemerkungen und ein durchgerechnetes Beispiel.

*Leo Schmetterer.*

**Sandelius, Martin:** Truncated inverse binomial sampling. *Skand. Aktuarietidskr.* **1951**, 41—44 (1951).

Let an infinite population be given and assume that a proportion  $p$  exhibits a certain characteristic. Individuals are drawn until  $M$  of the latter are found or until the number drawn reaches  $N$ . Let  $n$  be the number actually drawn and  $m$  those with the given characteristic. The author proves that  $p' = m/N$  if  $m < M$  and  $p'' = (M - 1)/(n - 1)$  otherwise is an unbiased estimate of  $p$  if  $M > 1$  and that  $p'(1 - p')/(N - 1)$  if  $m < M$  and  $p''(1 - p'')/(n - 2)$  otherwise is an

unbiased estimate of the variance of  $p$ , if  $M > 2$ . It will be seen that these expressions are precisely those for direct sampling and for unrestricted ( $N = \infty$ ) inverse sampling respectively. [Compare, for the latter, Haldane, *Biometrika* **33**, 222—225 (1945), and Finney, this Zbl. **33**, 389]. *Stefan Vajda.*

**Pillai, K. C. S.:** On the distribution of an analogue of Student's  $t$ . *Ann. math. Statistics* **22**, 469—472 (1951).

Auf Grund der von J. F. Daly [Ann. Math. Statistics **17**, 71—74 (1946)] bewiesenen Unabhängigkeit von Mittelwert  $\bar{x}$  und Spannweite  $w$  einer Stichprobe aus normaler Gesamtheit bestimmt Verf. aus der von ihm selber (dies. Zbl. **42**, 381) in Reihenentwicklung angegebenen Verteilung der Halbspanne  $W = w/2$  für  $n$ -gliedrige Stichproben aus mit Streuung 1 und Mittelwert  $a$  normal verteilter Gesamtheit die Verteilung des dem Student-Kriterium  $t$  analog gebauten Quotienten  $G = (\bar{x} - a)/2W$  in der Form

$$p(G) dG = k \sqrt{n/2\pi} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} C_i \cdot \Gamma(i + n/2) / [2nG^2 + (n+4)/6]^{i+n/2} dG.$$

Aus den hieraus mittels  $\int_0^{\lambda} p(G) dG = \frac{1-\alpha}{2}$  zu gewinnenden Confidenzgrenzen  $\lambda$  von  $G$  und den von L. H. C. Tippett tabulierten Erwartungswerten  $E(w)$  der Spannweite  $w = 2W$  berechnet Verf. für verschiedene  $n$  und Confidenzniveaux  $\alpha$  die mittlere Länge des auf  $G$  fußenden Confidenzintervalls für  $a$ ,  $J(G) = 2\lambda E(w)$ , und vergleicht sie mit der entsprechenden, auf Students  $t$  fußenden. Es zeigt sich, daß für kleine  $n$  die Verwendung des bequemerem Quotienten  $G$  sich bewährt.

*Maria-Pia Geppert.*

**Blackwell, David:** On the translation parameter problem for discrete variables. *Ann. math. Statistics* **22**, 393—399 (1951).

Let  $x_1, \dots, x_N$  be chance variables with known joint distribution, and let  $h$  be an unknown parameter. The translation parameter problem consists in estimating  $h$  from a sample  $y_1, \dots, y_N$ , where  $y_i = x_i + h$ . For any loss function  $f(d)$  depending only on the error  $h^* - h$ , Girshick and Savage (Proc. II. Berkeley Sympos. Math. Statist. Probability 1951) have given a solution, which under certain hypotheses is minimax. The author shows that this solution is admissible — in the sense of the theory of decision functions — if the  $x_i$ 's take only bounded integer values and if  $f(d)$  is strictly convex and assumes its minimum value. He also gives examples where the Girshick-Savage estimate is not admissible.

*Gustav Elfving.*

**Chown, L. N. and P. A. P. Moran:** Rapid methods for estimating correlation coefficients. *Biometrika* **38**, 464—467 (1951).

Zur Schätzung des unbekannten Korrelationskoeffizienten  $\rho$  einer binormal verteilten Gesamtheit auf Grund einer  $n$ -gliedrigen Stichprobe  $\{x_i, y_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) schlagen Verff. an Stelle des asymptotisch effizientesten Stichprobenkorrelationskoeffizienten und der für große  $n$  noch mühsamer zu berechnenden Kendallschen Rangkorrelation den konsistenten Schätzparameter

$$r_g = \sin \frac{\pi g}{2} \quad \text{mit} \quad g = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\text{sgn}(x_i - x_{i+1}) \text{sgn}(y_i - y_{i+1})}{(n-1)}$$

vor, mit Effizienz  $\frac{1}{3}$  für  $\rho$  nahe bei 0; für die Schätzung der Serienkorrelation  $\rho$  einer durch ein einfaches Markoff-Schema  $x_{t+1} - m = \rho \cdot (x_t - m) + \varepsilon_t$  ( $\{\varepsilon_t\}$  = Folge unabhängiger um Mittelwert 0 mit gleicher Streuung normal verteilter Variablen) erzeugten Zeitreihe wird  $\hat{\rho} = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi S}{2}\right)$  mit  $S = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{X_i}{n-2}$ ,  $X_i = \text{sgn}(x_{i+1} - x_i) \text{sgn}(x_{i+2} - x_{i+1})$  empfohlen, dessen relative Effizienz, gemessen an derjenigen der entsprechenden Maximum-likelihood-Schätzung, 0,19 be-

trägt für  $q$  nahe 0. Im Anhang leitet D. E. Barton eine Rekursionsformel für die ungeraden Momente von  $S$  ab.

*Maria-Pia Geppert.*

**Neyman, J. and Elizabeth L. Scott:** On certain methods of estimating the linear structural relation. *Ann. math. Statistics* **22**, 352—361 (1951).

Let the random variables  $x$  and  $y$  be defined by  $x = \xi + u$ ,  $y = \alpha + \beta \xi + v$ , where  $\xi$ ,  $u$  and  $v$  are random variables with certain conditions regarding their first two moments,  $\xi$  is independent of  $u$  and  $v$ , and  $\alpha$  and  $\beta$  are unknown constants.  $\eta = \alpha + \beta \xi$  is called the linear structural relation between  $x$  and  $y$ . The authors consider two simple methods for estimating  $\beta$  and investigate the necessary and sufficient conditions for the consistency of the estimates. They then add remarks about the construction of confidence regions for  $\beta$  suggested by Hemelrijk [Nederl. Akad. Wet., Proc. **52**, 374—384 (1949)] and weaken his conditions so that now the confidence region covers any slope, true or not true, with the same probability.

*Stefan Vajda.*

**Anderson, T. W.:** Estimating linear restrictions on regression coefficients for multivariate normal distributions. *Ann. math. Statistics* **22**, 327—351 (1951).

Anschließend an frühere Arbeiten (u. a. Verf. und H. Rubin, dies. Zbl. **33**, **80**, **39**, **360**) untersucht Verf. für  $p$  von  $q$  unabhängigen Variablen abhängende, normal verteilte Zufallsvariablen den Rang der zugehörigen  $p \times q$ -Matrix  $B$  der Regressionskoeffizienten. Ist  $B_2$  die bezüglich nur  $q_2$  der unabhängigen Variablen in der Gesamtheit gebildete  $p \times q_2$ -Regressionsmatrix, so werden für eine  $I'' B_2 = 0$  erfüllende  $m \times p$ -Matrix  $I'$  Maximum-likelihood-Schätzungen und Confidenzbereiche ermittelt und nach Neymans Likelihood-Verhältnis-Prinzip Signifikanzkriterien zur Prüfung des Ranges von  $B_2$  entwickelt, deren Logarithmen asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt sind. Bei diesen Herleitungen spielen die Wishart-Verteilung und die aus der Snedecorschens  $F$ -Verteilung zu gewinnende Verteilung von Quotienten der Form  $[1 + q_2 F / (N - q)]^{-1}$  eine wichtige Rolle. Die gewonnenen Intervallschätzungen werden auf Consistenz und weitere wünschenswerte Eigenschaften untersucht. Die Resultate und Methoden werden auf einige ökonomische Modelle sowie auf den Fall von  $q$   $p$ -dimensionalen Normalverteilungen mit beliebigen Mittelwertvektoren, aber gleicher Covarianzmatrix angewandt, in welchem zu prüfen ist, ob die  $q$   $p$ -dimensionalen Mittelwertvektoren in einem  $r$ -dimensionalen Unterraum liegen.

*Maria-Pia Geppert.*

**Berkson, Joseph:** Relative precision of minimum chi-square and maximum likelihood estimates of regression coefficients. *Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability*, California July 31—August 12, 471—479 (1951).

**Watson, G. S. and J. Durbin:** Exact tests of serial correlation using non-circular statistics. *Ann. math. Statistics* **22**, 446—451 (1951).

For testing the independence of observations  $x_1, \dots, x_n$ , different statistics of form  $r = x'Ax/x'x$  have been proposed; here,  $x$  denotes the column vector  $(x_1, \dots, x_n)$  and  $A$  one or another symmetric matrix. Even for normally distributed  $x_i$ -s, the exact distribution of  $r$  is known only for particular forms  $x'Ax$ , such as the circular form  $x_1 x_2 + \dots + x_n x_1$ , whereas for the simple product sum  $x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n$  this is not the case. The introduction of the „closing“ term  $x_n x_1$  being in most applications artificial, the author proposes several other modifications of the product sum, such as  $x_1 x_2 + \dots + x_{m-1} x_m + x_{m+1} x_m + \dots + x_{n-1} x_n$  ( $n = 2m$ ) for which the distribution of  $r$  can be computed.

*Gustav Elfving.*

**Rao, C. Radhakrishna:** Statistical inference applied to classificatory problems. *Sanhkyā* **11**, 107—116 (1951).

Es seien  $p$  den (eventuell mehrdimensionalen) Verteilungen  $f_\lambda(x|\theta_\lambda)$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, p$ ) mit den (eventuell jeweils mehreren) Parametern  $\theta_\lambda$  folgende Gesamtheiten gegeben. Von den  $n$  Gliedern einer Stichprobe  $x_1, \dots, x_n$  sollen  $n_1$  der Gruppe 1,  $n_2$  der



Gruppe 2, ...,  $n_p$  (mit  $n_1 + \dots + n_p = n$ ) der Gruppe  $p$  zugeordnet werden, wobei entweder I. die Stichprobe aus einer im bekannten Verhältnis  $\pi_1:\pi_2:\dots:\pi_p$  aus den  $p$  Gruppen gemischten Population entnommen ist, oder II. die Stichprobe aus  $n_1$  der Gruppe 1,  $n_2$  der Gruppe 2, ...,  $n_p$  der Gruppe  $p$  entnommenen Gliedern besteht. Die beiden Fragen lassen sich unter verschiedenen Zusatzbedingungen über Risikofunktionen u. a. mit Hilfe von Walds Theorie der Entscheidungsfunktionen lösen. Für  $p = 2$  führt I, unabhängig vom angenommenen Risiko, auf das Likelihood-Verhältnis, und bei II ist das der Anzahl falscher Einordnungen proportional gesetzte Risiko einer Aufteilung am kleinsten für die Aufteilung größter Wahrscheinlichkeit (maximum-likelihood). Der Fall  $p = 3$  wird analog gelöst unter Heranziehung eines nicht verallgemeinerungsfähigen elementaren geometrischen Kunstgriffs. Anschließend wird unter verschiedenen Zusatzbedingungen die Aufgabe gelöst, aus  $N$  Individuen mit den je  $p$  Meßwerten  $x_{i1}, \dots, x_{ip}$  von  $p$  Variablen ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) die bezüglich einer anderen Variablen  $x_i = \Phi(y_{i1}, \dots, y_{ip})$  beste Auswahl einer gegebenen ( $n$ ) oder maximalen Anzahl von Individuen zu treffen.

Maria-Pia Geppert.

Gronow, D. G. C.: Test for the significance of the difference between means in two normal populations having unequal variances. *Biometrika* 38, 252—256 (1951).

Zur Prüfung der Hypothese, daß die Mittelwerte  $\xi_1, \xi_2$  von zwei mit verschiedenen Varianzen normal verteilten Populationen, denen zwei Stichproben  $x_{ti}$  ( $t = 1, 2; i = 1, 2, \dots, n_i$ ) entnommen sind, gleich seien, verwendet B. L. Welch [*Biometrika* 29, 350—362 (1938); dies. Zbl. 18, 226] die auf Mittelwert  $\bar{x}$  und Streuung  $s$  der Stichprobe fußenden, im Falle  $n_1 = n_2$  sich deckenden Kriterien:

$$u = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \left\{ \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad v = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \left( \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

deren Potenzfunktion (power function) P. L. Hsu (dies. Zbl. 20, 149) untersucht hat. Verf. approximiert dieselbe, indem er die durch Fishers  $k$ -Parameter in der Form  $b(k_1 - k'_1)(k_2 + a k'_2)^{-\frac{1}{2}}$  ausdrückbaren ( $k_1, k_2$  bzw.  $k'_1, k'_2$  entsprechen  $t = 1$  bzw. 2) Größen  $u, v$  und ihre Potenzen um die Kumulanten der beiden Populationen in Taylor-Reihen entwickelt und durch Bildung der Erwartungswerte Näherungen der ersten 4 Momente erhält. Mit Hilfe dieser werden die Verteilungen von  $u$  und  $v$  durch geeignete Pearson- bzw. Gram-Charlier-Typ A-Verteilungen approximiert. Die auf diese Weise für verschiedene Varianzenverhältnisse  $\kappa'_2/\kappa_2$  tabellierten Spezialfälle  $n_1 = n_2 = 10; n_1 = 15, n_2 = 5$  bestätigen die bereits bekannten Eigenschaften der Potenzfunktionen von  $u$  und  $v$ , sowie die Unbrauchbarkeit des Student-Tests für  $u$  oder  $v$ , wenn  $n_1 \neq n_2$ .

Maria-Pia Geppert.

James, G. S.: The comparison of several groups of observations when the ratios of the population variances are unknown. *Biometrika* 38, 324—329 (1951).

In Anlehnung an Methoden von B. L. Welch (dies. Zbl. 29, 408) zum Vergleich der Mittelwerte zweier Normalverteilungen bei unbekanntem Verhältnis der Streuungen befaßt sich Verf. mit der Ausdehnung dieses Problems auf  $k \geq 2$ . Die Variablen  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) seien voneinander unabhängig normal verteilt mit Mittelwerten  $\mu_i$  und Varianzen  $\alpha_i$ , für deren Schätzungen  $a_i$  die Größen  $v_i a_i/x_i$  mit  $v_i$  Freiheitsgraden  $\chi^2$ -verteilt seien. Zur Prüfung der Hypothese  $\mu_1 = \dots = \mu_i = \dots = \mu_k$  benutzt Verf. den Stichprobenparameter  $\sum w_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2/w$  mit  $w_i = 1/a_i$ ,  $w = \sum w_i$ , der, wenn alle  $v_i$  groß sind, näherungsweise  $\chi^2$ -verteilt ist; hingegen, wenn nicht alle  $v_i$  groß sind, mit einer Funktion  $h(a, \chi_p^2)$  zu vergleichen ist, derart, daß die Wahrscheinlichkeit für  $\sum w_i (x_i - \bar{x})^2 \leq 2 h(a, \chi_p^2)$  gleich dem bis  $\chi_p^2$  erstreckten Integral  $P$  der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $k - 1$  Freiheitsgraden ist. Für den Nenner dieses studentisierten Kriteriums gewinnt Verf. mittels symbolischer Taylorentwicklung und Orthogonal-

transformation sukzessive Approximationen, von denen die erste bis auf Glieder der Ordnung  $\nu^{-2}$

$$2 h(a, \chi_P^2) = \chi_P^2 \cdot [1 + (3 \chi_P^2 + k + 1) 2^{-1} (k^2 - 1)^{-1} \Sigma (1 - w_i/w)^2/\nu_i]$$

lautet.

*Maria-Pia Geppert.*

**Welch, B. L.:** On the comparison of several mean values; an alternative approach. *Biometrika* 38, 330—336 (1951).

Das gleiche Problem wie das von G. S. James (vgl. vorsteh. Referat) behandelt Verf., indem er durch symbolische Entwicklung der Moment-Erzeugenden der Verteilung von  $\Sigma w_i (x_i - \hat{x})^2$  im Falle der Nullhypothese  $\mu_1 = \dots = \mu_k$  nachweist, daß sie in erster Näherung mit derjenigen der  $F$ -Verteilung übereinstimmt. Daraus ergibt sich zur Prüfung der Nullhypothese als approximatives Kriterium

$$\nu^2 = \Sigma w_i (x_i - \hat{x})^2 / (k - 1) [1 + 2 (k - 2) (k^2 - 1)^{-1} \cdot \Sigma (1 - w_i/w)^2/\nu_i],$$

welches näherungsweise der  $F$ -Verteilung mit  $\hat{f}_1 = k - 1$  und

$$\hat{f}_2 = (k^2 - 1)/3 \Sigma [(1 - w_i/w)/\nu_i]$$

folgt. Bis auf Glieder der Ordnung  $\hat{f}_2^{-1}$  ist dieser Test dem von James angegebenen äquivalent.

*Maria-Pia Geppert.*

**Ljapunov (Liapounoff), A. A.:** Über die Auswahl aus einer endlichen Anzahl von Verteilungsgesetzen. *Uspechi mat. Nauk* 6, Nr. 1 (41), 178—186 (1951) [Russisch].

Die Neyman-Pearsonsche Testtheorie für zwei Hypothesen wird verallgemeinert auf den Fall einer endlichen Anzahl von Hypothesen. Die diesbezüglichen Untersuchungen des Verf. sind auf Anregung von Kolmogoroff 1942 entstanden und infolge der Ungunst der Zeit erst jetzt veröffentlicht worden. Es sei darauf hingewiesen, daß gewisse Zusammenhänge mit den erst vor kurzem entstandenen Theorien von Wald u. a. bestehen. — Gegeben sei eine Menge  $X$  und in ihr ein Borelscher Körper  $K$  von Untermengen, welche als meßbar bezeichnet werden. Auf  $K$  seien nicht negative Mengenfunktionen  $F_1, \dots, F_n$  definiert, welche jede bez. der andern absolut stetig ist. Die  $F_i$  seien nicht atomhaft und linear unabhängig. [Genauer: Zu  $E \subset K$  mit  $F_i(E) > 0$  existiert stets  $E' \subset E$ , so daß  $F_i(E)/F_j(E) \neq F_i(E')/F_j(E')$  für  $i \neq j$ .] Nun

werden meßbare Mengen  $E_i$  konstruiert mit  $\sum_{i=1}^n E_i = X$ , so daß  $F_i(E_i) = F_j(E_j)$  für  $i$ ,

$j = 1, \dots, n$ , und falls für den „Stichprobenpunkt“  $x \in E_i$  gilt, wird die Hypothese  $F_i$  angenommen.  $\min F_i(E_i)$  heiße der Sicherheitsgrad. Verf. zeigt, daß für die konstruierten  $E_i$  der Sicherheitsgrad maximal ist und die  $E_i$  (bis auf Nullmengen) eindeutig bestimmt sind. — Liegt insbesondere eine Dichte  $\varphi(x, \alpha)$  vor und soll unter den Hypothesen  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha = \alpha_n$ ,  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$  entschieden werden, dann heiße  $\varphi(x, \alpha)$  regulär, wenn die  $E_i$  Intervalle

sind, die linear mit wachsendem  $i$  angeordnet sind. Hierfür ist hinreichend  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} \log \varphi(x, \alpha) > 0$ .

Verf. untersucht auch, inwiefern sich die Voraussetzungen über die Mengenfunktionen abschwächen lassen. Wir erwähnen noch das für die Beweise grundlegende Haupt-Lemma: In einem  $(n-1)$ -dimensionalen offenen Simplex  $R$  seien  $n$  stetige Funktion  $f_1(x), \dots, f_n(x)$

definiert,  $0 \leq f_i(x) \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^n f_i(x) \geq q > 0$ .  $y = f(x)$  sei die Abbildung von  $R$  in die ab-

geschlossene Hülle von  $R$ , für welche die baryzentrischen Koordinaten von  $y$  sich wie  $f_1:f_2:\dots:f_n$  verhalten. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  soll man eine Umgebung jedes beliebigen  $k$ -dimensionalen begrenzenden Simplexes von  $R$  ( $k = 0, 1, \dots, n-2$ ) finden, so daß  $f(x)$  Werte aus der  $\varepsilon$ -Umgebung des „gegenüberliegenden“  $[(n-1)-k]$ -dimensionalen begrenzenden Simplexes annimmt. Dann gibt es zu jedem  $y \in R$  ein  $x \in R$ , so daß  $f_1, \dots, f_n$  proportional sind zu den baryzentrischen Koordinaten von  $y$ . — Einige Druckfehler (z. B. beim Beweis des Haupt-Lemmas) erschweren die Lektüre.

*Leo Schmetterer.*

**Dresselaers, Céline et Paul P. Gillis:** Tests de signification pour hypothèses composées unilatérales. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 37, 449—458 (1951).

Let  $f(x, \theta)$  be a distribution function, continuous in  $x$ , and  $p(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$ . In order to test the hypothesis  $\theta = \theta_0$  against the alternatives  $\theta > \theta_0$ , the author considers a critical region defined by  $dp/d\theta|_{\theta=\theta_0} \geq c p|_{\theta=\theta_0}$ .

where  $c$  depends on the significance level. The test is denoted by  $I$ . Its power function has a derivative which is positive in  $\theta_0$  and is not exceeded there by the derivative of the power function of any other unilateral test of the same hypothesis, having the same significance level. If a uniformly most powerful test exists,  $I$  is equivalent to it. This is, in particular, the case when  $d^2 \log p/d\theta^2$  has the form  $A(\theta) d \log p/d\theta + B(\theta)$ . [Wald has shown (this Zbl. 24, 429) that  $I$  is asymptotically most powerful.] Special cases are mentioned and examples for various distribution functions are given.

*Stefan Vajda.*

**Walsh, John E.: Some bounded significance level properties of the equal-tail sign test.** Ann. math. Statistics 22, 408—417 (1951).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 33, 76) hat Verf. unter der Voraussetzung, daß die  $n$  Populationen, denen unabhängig voneinander  $n$  Werte  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  entnommen sind, 1. den gleichen Medianwert  $\mu$  haben, 2.  $\mu_0$  in jeder Population die Wahrscheinlichkeit  $\Pr(x = \mu_0) = 0$  zukomme, den „Gleichschwanzzeichen-test“  $E$  mit Signifikanzniveau

$$(1) \quad \Pr(x_i < \mu_0 | \mu = \mu_0) + \Pr(x_{n+1-i} > \mu_0 | \mu = \mu_0) = 2^{-(n-1)} \sum_{s=i}^n \binom{n}{s}$$

vorgeschlagen, nach welchem die Nullhypothese  $\mu = \mu_0$  abgelehnt wird, wenn entweder  $x_i < \mu_0$  oder  $x_{n+1-i} > \mu_0$ . Unter Verzicht auf die beiden Ausgangsvoraussetzungen verallgemeinert Verf. die zu prüfende Nullhypothese auf die Form „ $\mu_0$  enthalten in  $h(\mu_1, \dots, \mu_n)$ “ mit  $\mu_i$  = Zentralwert der  $i$ -ten Population, und ermittelt hinreichende Bedingungen, unter denen bei Anwendung des Testverfahrens  $E$  das Signifikanzniveau desselben,

$$(2) \quad \Pr(x_i < \mu_0 | \mu_0 \text{ in } h) + \Pr(x_{n+1-i} > \mu_0 | \mu_0 \text{ in } h),$$

durch (1) gut approximiert wird. Zu dem Zweck werden obere und untere Schranken von (2) in Abhängigkeit von der Größe

$$\beta = \max_j \left\{ \max_j |\Pr(y_j < \mu_0 | \mu_0 \text{ in } h) - \tfrac{1}{2}|, \quad \max_j |\Pr(y_j > \mu_0 | \mu_0 \text{ in } h) - \tfrac{1}{2}| \right\}$$

bestimmt und für  $n = 4, 5, \dots, 15$  und verschiedene  $\beta$  tabuliert.

*Maria-Pia Geppert.*

**Basu, D.: A note on the power of the best critical region for increasing sample size.** Sankhyā 11, 187—190 (1951).

Mit Hilfe von Khintchines Grenzwertsatz beweist Verf.: Sind die stochastischen Variablen  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) einer unendlichen Folge voneinander unabhängig und nach dem gleichen Gesetz verteilt, und ist eine einfache, die Folge  $\{X_i\}$  betreffende Nullhypothese  $H_0$  gegen eine einfache Alternativhypothese  $H_1$  auf Grund einer Stichprobe von je 1 Wert der Variablen  $X_1, \dots, X_n$  zu testen, so strebt die entsprechende maximale Potenz (power)  $\beta_n$  des entsprechenden besten kritischen Bereichs  $w_n$  von der Größe  $\alpha$  (im  $n$ -dimensionalen Stichprobenraum  $R_n$ ), welche bekanntlich monoton zunimmt, für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1. An einem Gegenbeispiel (alle  $X_i$  normal verteilt mit  $\sigma = 1$ , aber laut  $H_0$  mit Mittelwert 0, laut  $H_1$  mit Mittelwerten  $\mu_i$ ) wird gezeigt, daß bei Verzicht auf die obigen Voraussetzungen  $\beta_n$  gegen eine unterhalb 1 gelegene Konstante konvergieren kann.

*Maria-Pia Geppert.*

**Walter, Edward: Über einige nichtparametrische Testverfahren. II.** Mitteil.-Bl. math. Statistik 3, 73—92 (1951).

Fortsetzung der vom Verf. (dies. Zbl. 42, 143) begonnenen Übersicht über nicht-parametrische Tests der Unabhängigkeits-, Zufälligkeits-, Zweistichproben- und Anpassungshypothese für beliebig verteilte stetige Ausgangsgesamtheiten. Aus der Fülle der zumeist in den letzten 12 Jahren entwickelten Prüfgrößen hebt Verf. einige charakteristische Klassen von Kriterien heraus: Verwendung des Bravais'schen Korrelationskoeffizienten  $r$  für die beobachteten  $n$  Wertepaare  $(x_i, y_i)$



ohne vorausgesetzte Normalverteilung und dessen Beurteilung auf Grund der durch die Beobachtungswerte  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $y_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) bedingten, unter der Annahme, daß alle Zuordnungen gleich wahrscheinlich seien, kombinatorisch gewonnenen Verteilung von  $r$ ; Rangordnungstests (darunter Spearmans Rangkorrelation); Kriterien, die auf den Anzahlen der positiven Vorzeichen aller (darunter Kendalls  $\tau$ ) bzw. nur der sukzessiven Differenzen der den nach steigender Größe geordneten  $y$  zugeordneten Rangzahlen der  $x$  fußen; Prüfmaße, die die Anzahl der Iterationen der Vorzeichen der sukzessiven Differenzen benutzen, ferner solche, die an die Anzahl der Iterationen bzw. an ihre größte Länge anknüpfen, wobei die Anordnung der Paare durch  $x$ , die einfache Alternative durch die Lage des Paares bezüglich des  $y$ -Medianwertes bestimmt ist; schließlich werden noch Kolmogoroff-Smirnoffs mit Hilfe der kumulativen Verteilungsfunktion in der Stichprobe gebildete Kriterien skizziert. Für alle dargestellten Kriterien werden aus der Literatur Resultate über ihre asymptotischen Verteilungen, Konsistenz- und Invarianzeigenschaften und ihre Trennschärfe zusammengestellt, ferner die für ihre Benutzung brauchbaren Tabellen genannt.

*Maria-Pia Geppert.*

**Graf, Ulrich und Hans-Joachim Henning:** Der Einfluß der Meßgenauigkeit auf Streuung und Spannweite bei kleinen Stichproben. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* 3, 113—118 (1951).

Die genaue Wahrscheinlichkeit  $w$  dafür, bei Entnahme einer  $N$ -gliedrigen Stichprobe aus einer mit Mittelwert  $\mu$  und Streuung  $\sigma$  normal verteilten Gesamtheit bei gegebener Klassenbreite  $\varepsilon$   $\sigma$  eine in einer einzigen Klasse enthaltene Stichprobe, also  $s^2 = 0$ , zu erhalten, ist von Ch. Eisenhart (Effects of rounding or grouping data, S. 213, in „Selected techniques of statistical analysis“, New York, London 1947) tabuliert worden. Verff. approximieren sie unter Verwendung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung durch  $w \approx \varepsilon^{N-1} / \sqrt{N(2\pi)^{N-1}}$  und stellen sie in doppelt logarithmischem Netz durch Geraden (Scharparameter  $N$ ) dar.

*Maria-Pia Geppert.*

**Murteira, Bento:** Note on the variate differences of autoregressive series. *Biometrika* 38, 479—480 (1951).

### Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

**Bourgeois-Pichat, J.:** Les limites de la démographie potentielle. *Revue Inst. internat. Statist.* 19, 13—27 (1951).

In der potentiellen Demographie von Liebmann Hersch (*Revue Inst. internat. Statist.* 1940, 1942, 1944) wird als Lebenspotential einer Bevölkerung des Integral  $\int_0^\omega c(x) e(x) dx$  definiert, wo  $c(x)$  die Zahl der Bewohner zwischen  $x$  und  $x + dx$  Jahren ist,  $e(x)$  die Lebenserwartung der  $x$ -jährigen. Verf. stellt fest, daß die Lebenserwartung angenähert eine lineare Funktion des Alters ist, das Lebenspotential also näherungsweise gleich  $e(a_0^w) \cdot \int_0^\omega c(x) dx = e(a_0^w) P$ , wo  $a_0^w$  das mittlere Alter der Bevölkerung ist,  $P$  die Bevölkerungszahl. Daraus ergibt sich als Näherung für das durchschnittliche Lebenspotential je Bewohner  $e(a_0^w)$ , also gleich der Lebenserwartung für das mittlere Alter. — Hersch zerlegt die jährliche Variation des Lebenspotentials in die Erhöhung durch die Neugeburten um  $N \cdot e(0,5)$  mit  $N$  als Zahl der Neugeburten, in die Minderung  $\int_0^\omega D(x) e(x) dx = H_1$  durch die Sterbenden und in die Minderung  $\int_0^\omega S(x) [e(x) - e(x+1)] dx = H_2$  durch die Alterung der Überlebenden mit  $D(x)$  und  $S(x)$  als Anzahlen der Sterbenden und der Überlebenden. Verf. stellt fest, daß diese Zerlegung sinnlos ist; sie hätte nur Sinn, wenn für Sterbende und Überlebende die gleiche durchschnittliche Lebenserwartung gälte. Tatsächlich wird das Lebenspotential durch die Toten nur um  $D/2$  vermindert, durch die Überlebenden um  $S$ , zusammen um  $S + D/2 = P - D/2 = H_1 + H_2$ . In  $H_1$  erkennt er den Überschuß des Lebenspotentials, wenn die Toten eines Jahres nicht gestorben und gealtert wären; in  $H_2$  den Überschuß, wenn für die Überlebenden am Ende des Jahres eine so geänderte Sterblichkeit

gelte, daß die Lebenserwartung mit der am Anfang des Jahres übereinstimmt. Entgegen der Auffassung von Hersch handelt es sich also bei  $H_1$  und  $H_2$  nicht um jährliche Änderungen. — Mentha hatte den Verlust des Lebenspotentials durch die verschiedenen Todesursachen berechnet. Verf. wendet seine Überlegungen auf eine vereinfachte näherungsweise Berechnung der Menthaschen Tabelle an, indem er den Potentialverlust durch die Lebenserwartung ersetzt, die für das mittlere Sterbealter der betreffenden Todesursache gilt. *Hasso Härten.*

Skellam, J. G.: Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika* 38, 196—218 (1951).

Verf. entwickelt eine mathematische Theorie der räumlichen Verbreitung einer in der Zeit variierenden Population. Die Annahme, daß die räumliche Wanderung zufallsmäßig erfolge, führt auf die dem analogen Diffusionsproblem entsprechende Wärmeleitungsgleichung, die sodann mit der Differentialgleichung für das Malthus- bzw. logistische Wachstum der Bevölkerung zu einer partiellen Differentialgleichung vereinigt wird. Verf. gelangt für verschiedene biologisch wichtige Randbedingungen zu stationären Lösungen in Form von hyperbolischen Funktionen, Legendreschen elliptischen Integralen, Besselschen Funktionen u. a., und diskutiert mit Hilfe des Sturm-Liouvilleschen Satzes die Stabilität derselben. Der mit Hilfe von Differential- und Integralgleichungen durchgeführten kontinuierlichen Betrachtungsweise des Problems folgt die auf Differenzgleichungen vom Riccati-Typ fußende diskontinuierliche Behandlung desselben, durch welche Bevölkerungsdichte und Fruchtbarkeit zueinander in Beziehung gesetzt werden und der Konkurrenzkampf zweier Arten erfaßt wird. Die Theorie wird erläutert und geprüft an bekannten Beispielen aus der Tier- und Pflanzengeographie. *Maria-Pia Geppert.*

Hayashi, Chikio: Sampling design in the social survey of language at the city of Shirakawa. *Ann. Inst. statist. Math.* 2, 69—75 (1951).

Ludwig, W.: Die Zuverlässigkeit üblicher Vaterschaftsteste. *Z. angew. Math. Mech.* 31, 255—256 (1951).

Moran, P. A. P.: A mathematical theory of animal trapping. *Biometrika* 38, 307—311 (1951).

● Larson, Robert E. and Erwin A. Gaumnitz: Life insurance mathematics. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1951. 184 p. \$ 3,75.

Elementare Darstellung der einfachsten Fragen der Lebensversicherungsmathematik. Von Interesse sind die Angaben betr. die gesetzlichen Bestimmungen der Berechnung von Deckungskapitalien und Rückkaufswerten in den USA und der benutzten technischen Grundlagen. — Inhaltsverzeichnis: 1. The mortality table. 2. Interest and annuities certain. 3. Life annuities. 4. Life insurance. 5. Net level reserves. 6. Advanced topics. 7. Modified reserves. 8. Surrender values. 9. Gross premiums. — Appendix: 1. Net level terminal reserves. 2. Comparison of natural and net level premiums. 3. Tables. 4. Answers to problems. Index. Index to symbols. *Walter Saxer.*

Spoerl, Charles A.: Actuarial science — a survey of theoretical developments. *J. amer. statist. Assoc.* 46, 334—344 (1951).

Grootenboer, D.: Einige neue Gesichtspunkte bezüglich der Reserveberechnung für gemischte Versicherungen nach Lidstone. *Verzekerings-Arch.* 28, 409—424 (1951) [Holländisch].

Verf. berichtet über Lidstones Z-Methode und zeigt, daß sich in den drei Fällen der Bestimmung des mittleren Alters (1. aus der Verteilung der Versicherungssummen, 2. aus der der Versicherungssummen und der Reserveprämien, 3. nur aus den Reserveprämien) im Falle 2. höhere Reserven ergeben als im Falle 1., im Falle 3. höhere als im Falle 2. und daß die Reserven der Fälle 2. und 3. höher sind als die genaue. Diese beiden Fälle sind also als sicher anzusehen. Ferner berichtet Verf. über eine Arbeit von N. E. Andersen in der „Hafnia“-Festschrift von 1947, in der die Reserveberechnung mit einem mittleren Alter für alle künftigen Dauern erfolgt, welches als Mittel aus den mittleren Altern der einzelnen Dauern nach

Lidstone angesehen werden kann. Schließlich stellt er das Verfahren dar, das Bjoraa dem Institute of Actuaries zum hundertjährigen Bestehen vorgelegt hat, nach dem mit Hilfe von vier Konstanten die Reserve für einen ganzen Bestand gemischter Versicherungen ohne Gruppierung berechnet werden kann.

= Hasso Härten.

**Sibirani, Filippo:** Sopra alcuni metodi per il calcolo del valore attuale della rendita vitalizia unitaria frazionata. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 226—231 (1951).

Das Korrektionsglied für unterjährige ( $k$ -malige) Rentenzahlung wird berechnet, indem  $l_{x+h/k}$  in  $0 \leq h/k \leq 1$  als linear,  $v^{h/k}$  dagegen exakt angenommen wird. Die Formel lautet  $\varphi_k + \psi_k a_x$  ( $\varphi_k$  und  $\psi_k$  nur vom Zinsfuß  $i$  abhängige Konstanten); sie gibt eine bessere Annäherung als die übliche  $(k-1)/2k$ ; numerische Beispiele zeigen, daß (wenn  $x$  nicht zu hoch ist) die Übereinstimmung mit der verbesserten Formel  $(k-1)/2k + (k^2-1)(\delta + \mu_x)/12k^2$  gut ist.

Bruno de Finetti.

**Brunner, Karl:** Inconsistency and indeterminacy in classical economics. *Econometrica* 19, 152—173 (1951).

Kritischer Bericht über das „Patinkin-Problem“; vgl. drei Arbeiten von Patinkin [dies. Zbl. 33, 200, 34, 82 und *Econometrica* 19, 134—151 (1951)] und die kritischen Stellungnahmen von Hickman, Leontief und Phipps (dies. Zbl. 35, 217, 218). Das Problem lautet: Ein monetäres System (umfassend relative Preise, endliche Preise in Geld und einen von Null verschiedenen Geldvorrat) mit „Komplementär-Eigenschaft“ zu finden, d. h. ein solches, das aus einem von allen Geld-Beziehungen unabhängigen Teilsystem des Warenmarktes mit relativen Preisen besteht, welches durch eine Geldgleichung vervollständigt wird. Das setzt voraus, daß die Marktgleichungen des Warensystems homogen vom Grade Null in den Preisen sind. In Übereinstimmung mit Patinkin zeigt Verf. die Unmöglichkeit eines solchen Systems. Denn entweder wird eine explizite Geldgleichung angenommen: ist sie die einzige Funktion, die nichthomogen in allen oder in einem Teil der Preise ist, dann ergibt sich der von Patinkin festgestellte Widerspruch; nimmt man eine zweite Funktion an, die nichthomogen in allen oder in einem Teil der Preise ist, dann läßt sich, wie Verf. zeigt, die Komplementär-Eigenschaft nicht aufrechterhalten. Oder man hat eine implizite Geldfunktion; dann ergeben sich bei von Null verschiedenem Geldvorrat unendliche Preise oder bei endlichen Preisen ein Geldvorrat Null. — Die klassische Theorie zerfällt also in eine Theorie der Warenwirtschaft und in eine Geld-Theorie, zwischen denen es keine Brücke gibt. In einer einheitlichen Theorie können Nachfrage- und Angebotsfunktionen nicht homogen in den Geldpreisen sein. Verf. stellt eine solche Theorie durch sein Gleichungssystem (4.10)—(4.14) dar.

Hasso Härten.

**Boiteux, Marcel:** Le „revenu distribuable“ et les pertes économiques. *Econometrica* 19, 112—133 (1951).

Die durch wirtschaftliche, politische und soziale Mängel bedingten Unterschiede einer vorliegenden mit einer gegebenen optimalen ökonomischen Vergleichssituation sollen quantitativ erfaßt werden. Von einem wirtschaftlichen Leistungsmaximum wird gesprochen, wenn es unmöglich ist, durch Umstellung von Produktion oder Verteilung den Nutzen einiger wirtschaftender Individuen ohne Nachteil für andere zu vergrößern. Das gesuchte Maß für den Unterschied der Wirtschaftszustände, der „ökonomische Verlust“, wird in der Eigenschaft des (schon von Hicks in die Literatur eingeführten) „verteilbaren Einkommens“ gefunden, daß es  $> 0$  ist für eine vom Leistungsmaximum verschiedene Situation und  $= 0$  für dieses als Vergleichssituation. Ist  $Q$  der Güter- und  $P$  der Preisvektor, ferner  $r^k$  das Einkommen des  $k$ . Individuums, so heißt „verteilbares Einkommen“  $\delta_Q^k$  des letzteren die Einkommensänderung gegenüber  $r^k$ , die ihm bei den Preisen  $P$  des Angefandzustandes dieselbe Bedürfnisbefriedigung ( $S^k$ ) verschafft wie Preise und



Einkommen des Endzustandes  $(P + \delta P, r^k + \delta r^k)$ , d. h. also  $S^k(P + \delta P, r^k + \delta r^k) = S^k(P, r^k + \delta r^k)$ . Für das gesamte verteilbare Einkommen einer Wirtschaft wird (die Näherungsformel) gefunden:  $-\Delta Q = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \underline{(i j)} d\pi_i d\pi_j - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (i j) dp_i dp_j$ ,

wo  $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$  der Grenzkostenvektor,  $(i j) = \sum_k (i j)^k$ ,  $(i j)^k = \partial q_i^k / \partial p_j^k + q_j^k (\partial q_i^k / \partial r^k)$ ,  $\underline{(i j)} = \sum_h (i j)^h$  und  $\underline{(i j)}^h = \partial q_i^h / \partial \pi_j^h$  ist. Rudolf Günther.

**Simpson, Paul B.: Transformation functions in the theory of production indexes.** J. Amer. statist. Assoc. **46**, 225—232 (1951).

$q^I = (q_1^I, \dots, q_n^I)$  und  $q^{II}$  seien 2 — zeitlich oder räumlich — verschiedene, das wirtschaftliche Endprodukt charakterisierende Vektoren. Die Produktionsfunktion  $z = Q(q)$ , die homogen [d. h.  $Q(rq) = rQ(q)$ ] und konstant für jeden mit einem bestimmten Aufwand möglichen Ausstoß ist, gebe das Produktionsniveau an.  $Q(q) = \text{const.}$  möge als Kurve der  $n$ -dimensionalen Ebene interpretiert werden. Liegen die Endpunkte der Vektoren  $rq^I = q^{II}$  auf der Kurve  $Q(q^{II})$ , sind also die  $Q$ -Kurven homothetisch, so ist  $r = Q(q^{II})/Q(q^I)$  ein geeigneter Produktionsindex. Im allgemeinen Fall möge die Kurve  $Q(q^{II})$  durch ihren Punkt  $q^{II_0} = rq^{I_0}$  bestimmt sein. Weiter mögen in jeder Zeitperiode in der Produktion die Grenzraten der Substitution sich wie die Preise verhalten, d. h.  $Q_i(q)/p_i = \lambda$  sein ( $i = 1, \dots, n$ ,  $\lambda = \text{const.}$ ,  $Q_i = \partial Q / \partial q_i$ ). Durch Taylor-Entwicklung erhält man  $Q(r^I q^I) = Q(q^{II}) + \sum Q_i(q^{II}) (r^I q_i^I - q_i^{II}) + R_1$  und daraus  $r^I = (\sum p_i^{II} q_i^{II}) / (\sum p_i^{II} q_i^I - R_1/\lambda (\sum p_i^{II} q_i^I))$ . Vernachlässigung von  $R_1$  führt zum Paascheschen Index. Von  $q^{I_0} = q^{II_0}/r^{II}$  ausgehend gelangt man entsprechend zum Laspeyreschen Index. — Wirtschaftliche Erörterungen werden angeschlossen, die namentlich die Erreichung eines bestimmten Produktionsniveaus mit festgelegten Mitteln betreffen.

Rudolf Günther.

## Geometrie.

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

**Dirac, G. A.: Collinearity properties of sets of points.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **2**, 221—227 (1951).

Die untersuchte Figur besteht aus  $n$  nicht kollinearen Punkten einer projektiven Ebene  $\pi$  und allen ihren Verbindungsgeraden.  $t(n)$  ist die Anzahl der Geraden, die genau 2 Figurpunkte enthalten. Es wird bewiesen: I.  $t(n) \geq 3$ . II. Es gibt einen Figurpunkt, durch den mehr als  $\sqrt{n}$  Figurgeraden laufen. Für I ist wesentlich, daß  $\pi$  eine Geometrie über dem reellen Zahlkörper ist; in jeder endlichen Geometrie kann  $t(n) = 0$  sein. Der Beweis von II ist rein abzählend und in jeder Geometrie gültig. Verf. gibt an, daß er  $t(n) \geq 4$  bewiesen habe, doch ist der Beweis wegen seiner Umständlichkeit nicht veröffentlicht.

Friedrich Wilhelm Levi.

**Motzkin, Th.: The lines and planes connecting the points of a finite set.** Trans. Amer. math. Soc. **70**, 451—464 (1951).

Sylvester sprach 1893 folgende Vermutung aus: Enthält die Verbindungslinie von je zwei Punkten eines endlichen Punktsystems  $P$  der gewöhnlichen Ebene einen weiteren Punkt von  $P$ , so sind alle Punkte von  $P$  kollinear. Diese Vermutung wurde von P. Erdős erneut ausgesprochen und zuerst von T. Gallai bewiesen. (Vgl. H. S. M. Coxeter, The real projective plane, New York 1949; dies. Zbl. **32**, 113). Vorliegende Arbeit enthält eine Reihe von Ergebnissen, die sich an den obigen Satz anschließen. Es wird z. B. gezeigt: Besitzt ein System von endlich vielen Punkten  $P_i$  des gewöhnlichen Raumes die Eigenschaft, daß die von je drei Punkten  $P_i, P_j, P_k$  bestimmte Ebene einen weiteren, nicht auf  $P_i P_j, P_j P_k$  oder  $P_k P_i$  fallenden Punkt des Systems enthält, so ist das System koplanar. Ferner wird folgender

Satz bewiesen:  $n$  Punkte des  $d$ -dimensionalen Raumes, die nicht alle in einer  $((d-1)$ -dimensionalen) Ebene liegen, bestimmen wenigstens  $n$  Ebenen. Der Fall  $d = 2$  dieses Satzes war schon bekannt (s. z. B. N. G. de Bruijn und P. Erdős, dies. Zbl. 32, 244).

László Fejes Tóth.

Heltenstein, H.: Eine charakteristische Eigenschaft der Parabel. Elemente Math. 6, 108—110 (1951).

Wunderlich, Walter: Über ein spezielles Dreiecksnetz aus Kegelschnitten. Monatsh. Math. 55, 164—169 (1951).

Aus drei Strahlbündeln, deren Scheitel ein Dreieck bilden, lassen sich bekanntlich Dreiecksnetze aufbauen. Daraus folgt durch eine auf dieses Dreieck gestützte kubische Verwandtschaft das Hauptergebnis der Arbeit: „Sind  $(A_1 A_2 A_3)$  und  $(B_1 B_2 B_3)$  zwei Dreiecke in der Ebene und  $(C_1 C_2 C_3)$  die Schnittpunkte entsprechender Seiten, so erzeugen die den drei Büscheln  $(A_1 B_1 C_2 C_3)$ ,  $(A_2 B_2 C_3 C_1)$ ,  $(A_3 B_3 C_1 C_2)$  entnommenen Kegelschnitte ein Dreiecksnetz. Je drei zusammengehörige Kegelschnitte haben drei Punkte gemeinsam“. — Es wird weiter gezeigt: „Im Falle perspektiver Grunddreiecke  $(A_1 A_2 A_3)$  und  $(B_1 B_2 B_3)$  bilden die drei gemeinsamen Schnittpunkte dreier zusammengehöriger Netzkegelschnitte stets ein Poldreieck jenes festen Kegelschnittes, bezüglich dessen die Grunddreiecke polar liegen“. Ein metrisch spezielles, aus diskret angeordneten Hyperbeln gebildetes Dreiecksnetz erläutert als Beispiel diese Theoreme.

Karl Strubecker.

Hohenberg, Fritz: Eine reelle Darstellung der Hyperkegelschnitte. Monatsh. Math. 55, 146—152 (1951).

Als Hyperkegelschnitte bezeichnet man nach C. Segre den Inbegriff der komplexen Punkte  $P = (z_1, z_2) = (x_1 + i y_1, x_2 + i y_2)$  der komplexen euklidischen Ebene, welche einer hyperalgebraischen Gleichung 2. Grades  $w_{00} + w_{01} z_1 + \bar{w}_{01} \bar{z}_1 + w_{02} z_2 + \bar{w}_{02} \bar{z}_2 + w_{11} z_1 \bar{z}_1 + w_{12} z_1 \bar{z}_2 + w_{12} \bar{z}_1 z_2 + w_{22} z_2 \bar{z}_2 = 0$  genügen. Dabei sind  $w_{ik} = u_{ik} + i v_{ik}$ ,  $\bar{w}_{ik} = u_{ik} - i v_{ik}$  komplexe Konstanten und  $u_{ii} = \bar{w}_{ii} = u_{ii}$  reell. Von geometrischem Interesse ist vor allem der Fall, daß der Hyperkegelschnitt  $\infty^3$  komplexe Punkte hat, unter denen auch reelle Punkte vorkommen können. Ordnet man dem komplexen Punkte  $P$  mit E. Laguerre das geordnete Paar der Potenzpunkte  $P_1 = (\xi_1, \eta_1) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ ,  $P_2 = (\xi_2, \eta_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$  der elliptischen Involution zu, die ihn nach v. Staudt repräsentiert, so kann man das Problem stellen, eine Übersicht über die Bildpfeile  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  der  $\infty^3$  komplexen Punkte des Hyperkegelschnittes zu gewinnen. Verf. behandelt hier die Fälle 1) eines Hyperkegelschnittes mit Mittelpunkt, der das Konjugium gestattet, 2) eines allgemeinen Hyperkegelschnittes mit Mittelpunkt, 3) einige Sonderfälle davon, insbesondere singuläre Hyperkegelschnitte, 4) den Fall der Hyperparabeln. — [Bem. d. Ref.: Das Laguerresche Bild eines Hyperkreises, d. h. eines Hyperkegelschnittes, der die absoluten Punkte enthält, hat schon E. A. Weiss, J. reine angew. Math. 166, 193—200 (1932); dies. Zbl. 3, 360 ausführlich untersucht].

Karl Strubecker.

Pajares Diaz, E.: Bemerkungen über eine Quartik. Gaceta mat., I. Ser. 3, 156—162 (1951) [Spanisch].

Fabricius-Bjerre, Fr.: Über zyklodale Kurven in der Ebene und im Raum. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 26, Nr. 9, 75 S. (1951).

Zur Untersuchung stehen jene ebenen Kurven, auf deren Tangenten ein fester „Grundkreis“ Strecken  $P_1 P_2$  ausschneidet, die durch den Berührungspunkt  $P$  in einem konstanten Verhältnis  $PP_1:PP_2 = m$  geteilt werden. Es ergeben sich so für einen reellen Grundkreis die Epi-, Hypo- und Hyperzykloden, je nachdem  $m$  negativ, positiv oder komplex mit Einheitsbetrag ist; wird im letzten Fall der Grundkreis nullteilig angenommen, so stellen sich die Parazykloden ein, während ein Nullkreis auf die logarithmischen Spiralen führt. — Im I. Teil der Arbeit werden nun aus dieser gemeinsamen Wurzel die wichtigsten Eigenschaften der zyklodalen Kurven in sehr einfacher und übersichtlicher Weise hergeleitet, womit eine Art Monographie

der verschiedenen Zykloiden mit besonderer Betonung der Zusammenhänge geboten wird. Hervorgehoben seien insbesondere das Studium der Bewegung des durch die Strecke  $P_1 P_2$  repräsentierten ähnlich-veränderlichen Systems, dem auch der Krümmungsradius  $PP'$  der zugehörigen Zykloide angehört, ferner gewisse nichteuklidische Deutungen, denen die Auffassung des Grund- oder Scheitelkreises als absolutes Gebilde einer Cayley-Kleinschen Metrik zugrunde liegt: Jede zyklonale Kurve kann als Traktrix der Ferngeraden aufgefaßt werden, dual dazu die bezüglich des Grundkreises polarreziproke „Ährenkurve“ als Loxodrome des Durchmesserbüschels. — Der II. Teil bringt eine räumliche Erweiterung, indem der in der Ausgangsdefinition auftretende „Grundkreis“ durch eine „Grundkugel“ ersetzt wird. Die so gekennzeichneten Raumkurven haben ersichtlich die Eigenschaft, bei der Verebnung ihres Projektionskegels aus dem Kugelzentrum in eine ebene zyklonale Kurve überzugehen. Hierher gehören beispielsweise die Isogonaltrajektorien der Erzeugendenschar einer beliebigen, einer Kugel umschriebenen Torse, ebenso die Planevolventen der Torse; die zentralen Abwicklungen sind nämlich Hyperzykloiden bzw. Kreisevolventen. — Einen breiten Raum nimmt die Untersuchung der „polyzyklonalen Kurven“ ein, also solcher Raumkurven, deren zentrale Abwicklungen von wenigstens zwei Punkten  $O_1, O_2$  aus zyklonale Kurven ergeben. Es zeigt sich, daß diese Raumkurven in bezug auf sämtliche Punkte der Geraden  $O_1 O_2$  zyklonal sind und (abgesehen von Realitätsunterschieden) mit den „polykonischen Loxodromen“ Cesàros identisch sind. Auf diesem Wege ergeben sich neue Eigenschaften dieser merkwürdigen, unlängst auch vom Ref. betrachteten Kurven, die Loxodromen der Erzeugendenscharen dreier Kegel sind (vgl. dies. Zbl. 36, 113). Als Sonderfälle sind hier bekanntlich die sphärischen Kegelloxodromen und die Böschungslinien auf Drehflächen 2. Grades mit lotrechter Achse einzureihen. Bei dieser Gelegenheit wird eine interessante, aus dem Vermächtnis J. Hjelmslevs stammende Erzeugung der zugehörigen Böschungsflächen mitgeteilt: Zwei kongruente Drehkegel mögen gleichzeitig auf einem festen Drehkegel abrollen, so zwar daß sie stets symmetrisch zur Berührungsebene längs der gemeinsamen Wälzerzeugenden liegen; werden zwei symmetrische Punkte mitgenommen, so durchlaufen dieselben zwei sphärische Trochoiden (mit festem Geschwindigkeitsverhältnis), und ihre Verbindungsgerade (fester Neigung) beschreibt die Tangentenfläche einer Böschungslinie auf einem einschaligen Drehhyperboloid oder einem abgeplatteten Drehellipsoid. *W. Wunderlich.*

**Hohenberg, Fritz:** Die isolierten Punkte der gestreckten Zykloiden und Trochoiden. *Monatsh. Math.* 55, 242—249 (1951).

Es werden die reellen isolierten Punkte der gestreckten Zykloiden und Trochoiden, die für komplexe Werte der Rollwinkel erhalten werden, bestimmt und diskutiert. Ein Diagramm zur Bestimmung der isolierten Punkte der gestreckten Trochoiden und Näherungsformeln für sie sind angefügt. *Otto Volk.*

**Jackson, S. B.:** A class of spirals. *Duke math. J.* 18, 673—682 (1951).

Verf. betrachtet eine Kurve  $C$ , deren Gleichung in der komplexen Ebene gegeben ist durch  $z = \int_0^t r(u) e^{iu} du$  ( $0 \leq t < \infty$ ) mit: (a)  $r(t)$  stetig, nicht negativ, nichtabnehmend in  $(0, \infty)$  und  $r(t) = 0$  nur für  $t = 0$ ; (b)  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$ ; (c)  $r(t) \neq r(t + 2\pi)$ . — Wegen der monoton abnehmenden Krümmung  $r(t)$  ist  $C$  eine doppelpunktfreie, sich nach außen windende Spirale.  $C$  heißt vom Typ 1, wenn  $\lim_{t \rightarrow \infty} |z| = \infty$ ; andernfalls (wenn es also eine gegen  $\infty$  gehende Folge  $\{t_i\}$  gibt, für die  $\{z(t_i)\}$  beschränkt bleibt) vom Typ 2. Das Hauptergebnis besteht in dem Nachweis, daß (auf der Zahlenkugel gesehen) eine  $C$  vom Typ 1 sich dem Punkt  $\infty$  und eine  $C$  vom Typ 2 sich einem Kreis durch  $\infty$  asymptotisch anschmiegt. — Hinreichend für den Typ 1 ist die Existenz von  $T, \delta > 0$ , so daß für  $t > T$  gilt:  $r(t + \pi) - r(t) > \delta$ . Aus der Potenzordnung von  $t$  in  $r(t)$  kann nicht auf den Typ geschlossen werden. Zum Schluß wird ein etwas allgemeinerer Fall auf den betrachteten zurückgeführt. *Wilhelm Klingenberg.*

**Deaux, R.:** Sur deux coniques ayant un contact triponctuel. *Mathesis* 60, 185—187 (1951).

**Blanchard, René:** Sur la cubique de Mac Cay. *Mathesis* 60, 177—181 (1951).

**Farwell, H. W.:** The forms of Cartesian ovals in an optical range. *Amer. J. Phys.* 19, 454—458 (1951).



## Algebraische Geometrie:

**Segre, Beniamino:** Sull'esistenza, sia nel campo razionale che nel campo reale, di involuzioni piane non birazionali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 94—97 (1951).

Un classico teorema di Castelnuovo afferma la razionalità di tutte le involuzioni del piano proiettivo complesso [Math. Ann. 44, 125—155 (1894) riprod. nelle Memorie scelte, Bologna 1937, p. 273—304] estendendo così al corpo complesso un teorema fondamentale di Lüroth valido per ogni corpo commutativo (v. van der Waerden, Moderne Algebra, vol. I, 2<sup>a</sup> ed. Berlin 1937, p. 63). — È pur noto che il teorema di Lüroth non si estende già nel corpo complesso alle varietà a più di due dimensioni (v. Enriques, Rend. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V. Ser. 21, 81—83 (1912)). L'A. dimostra che l'estensione non sussiste neanche per le superficie definite sul corpo razionale o reale, mediante opportuni controesempi costruiti usufruendo delle sue ricerche sulle superficie cubiche definite su corpi generali [J. London math. Soc. 18, 24—31 (1943); Bull. Amer. math. Soc. 51, 157—161 (1945)]. Così, data una  $F^3$  reale, le coppie di tangenti nei punti di una retta reale  $r$  della superficie passanti per un punto generico della  $F^3$  descrivono una involuzione  $I$  del second'ordine entro la totalità birazionale delle tangenti ad  $F^3$  nei punti di  $r$ . Se la  $F^3$  fosse birazionale nel campo reale dovrebbe possedere una sola falda reale, invece è ben nota l'esistenza di superficie cubiche reali non singolari nello spazio proiettivo reale aventi due falde reali disgiunte (v. ad. es. B. Segre, The non singular cubic surfaces, Oxford 1942). Sopra una superficie reale siffatta l'involuzione  $I$  non è birazionale.

*Federico Gaeta.*

**Segre, Beniamino:** Sulla perfezione delle coincidenze isolate. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 335—336 (1951).

Soient  $V$  une variété analytique,  $T$  une correspondance entre les points de  $V$  et  $O$  un point de coïncidence de  $T$ , simple pour  $V$ . Si un point  $P$  de  $V$  tend vers  $O$  le long d'un chemin tracé sur  $V$ , un (au moins) de ses homologues  $P'$  tend également vers  $O$ . La limite de la droite  $PP'$  est une direction principale. Si  $O$  est une coïncidence isolée, toutes les tangentes à  $V$  en  $O$  sont des directions principales et  $O$  est dit point de coïncidence parfaite. L'A. donne une démonstration très simple de ce théorème, énoncé par Severi.

*Lucien Godeaux.*

**Godeaux, Lucien:** Recherches sur les points de diramation des surfaces multiples. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 111—120 (1951).

Dans de nombreuses notes, l'A. a déjà étudié la structure des points de diramation des surfaces multiples, établissant en particulier que si la surface est multiple cyclique d'ordre premier  $p$  et que si sur la surface possédant une involution cyclique dont la surface multiple est image, au point uni correspondant à notre diramation l'homographie engendrée par la transformation génératrice de l'involuzione est  $x':y':z' = x:\varepsilon y:\varepsilon^\alpha z$  ( $\varepsilon^p = 1$ ), la structure cherchée dépend des solutions entières et positives de l'équation  $l + \alpha m = 0 \pmod{p}$ . Si  $l$  et  $m$  sont les solutions telles que  $l + m$  soit minima et si l'on a  $l + \alpha m = h p$  avec  $h > 1$ , le cône tangent se compose au moins de trois parties. Dans cette note, l'A. étudie la congruence et détermine les conditions pour que  $h > 1$ . Pour cela, il faut qu'il existe deux nombres  $r$  et  $q$  tels que si  $p = a\alpha + b$  ( $b < \alpha$ ), on ait  $(r-1)(a+b) < \alpha - 1 < r(a+b)$ ,  $q(r-1)b < q\alpha < (q-r+1)b$ ,  $(q-r+1)(a+b) < q(\alpha-1) < p$ . Dans ces conditions, le cône tangent au point de diramation comprend un cône d'ordre  $a$ , un d'ordre  $b$  et un ou deux autres cônes. *Bruno d'Orgeval.*

**Godeaux, Lucien:** Sur les courbes-base d'un système linéaire de surfaces. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 202—206 (1951).

La représentation monoïdale d'une courbe  $C$ , sans points multiples,  $f_n(x, y, z) = 0$ ,

$u g_{m-1} = g_m(x, y, z)$  introduit la transformation birationnelle  $x':y':z':u' = x(u g_{m-1} - g_m):y(u g_{m-1} - g_m):z(u g_{m-1} - g_m):f(u h_{m-n} - h_{m-n+1})$ . Si l'on considère un système  $\infty^r$  ( $r \geq 3$ ) de surfaces algébriques pour lequel  $C$  est une courbe base ayant le comportement d'une courbe fondamentale de 2° espèce d'une transformation birationnelle,  $C$  sera fondamentale de 1° espèce pour la transformation birationnelle précédente, qui transformera  $|F|$  en un système  $|F'|$  coupant sur un cône équivalent à un cône projetant  $C$ , un système linéaire de courbes composées avec un faisceau. La réciproque établit donc l'existence de systèmes linéaires de surfaces possédant de telles courbes-base. Si  $r > 3$  le système des  $F$  représente dans l'espace dont les  $F$  sont les points, une variété à trois dimensions possédant une courbe rationnelle multiple d'ordre multiple de l'ordre de  $C$ . Bruno d'Orgeval.

**Nollet, Louis:** Sur les surfaces algébriques à système canonique réductible et sur quelques questions connexes. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **37**, 42—52 (1951).

Les surfaces algébriques dont le système canonique a la partie variable composée au moyen d'un faisceau irrationnel de courbes sont les surfaces elliptiques de genre  $p_g > 2$  et le faisceau est alors de genre  $p_g$  et formé de courbes elliptiques, ou des surfaces d'irrégularité  $q$ , le faisceau étant de genre  $q$  et formé de courbes de genre 1, 2, 3, 4 ou 5; on a alors  $p_g \geq 2$ ,  $p_a \geq 0$ . Existence de ces surfaces. Le système bicanonique d'une surface est régulier si  $p_g > 1$  et  $p^{(1)} > 1$ . Application à un résultat de Comessatti sur les surfaces telles que  $p_g \geq 2$  ( $p_a + 2$ ). Lucien Godeaux.

**Burniat, Pol:** Sur les surfaces canoniques de genres  $p_g = p_a = 4$ ,  $p^{(1)} \geq 11$ . Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **37**, 367—377 (1951).

Détermination des surfaces canoniques de genres  $p_a = p_g = 4$ ,  $p^{(1)} = 2n + 1 \geq 11$ , qui peuvent se réduire, par variation continue, à des surfaces rationnelles d'ordre  $n$ , doubles. Pour  $n = 5$ , on trouve trois types de telles surfaces. Détermination de leurs singularités et du nombre des modules dont elles dépendent. Lucien Godeaux.

**Orgeval, B. d':** Le diviseur de Severi de certaines surfaces irrégulières. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **37**, 34—41 (1951).

Une surface algébrique irrégulière, dépourvue de faisceau irrationnel de courbes, de diviseur de Severi  $s$ , est l'image d'une involution d'ordre  $s$ , privée de points unis, appartenant à une surface de même irrégularité et de diviseur un. Les deux surfaces ont même variété de Picard (au sens de Castelnuovo, c'est-à-dire représentant les systèmes linéaires appartenant à un système continu). Lucien Godeaux.

**Baldassarri, Mario:** Ricerche su certe classi di superficie d'ordine  $n$  dello  $S_{n-p+1}$ . Rend. Sem. mat. Univ. Padova **20**, 167—183 (1951).

Nel corso di ricerche per trovare le condizioni minime che occorrono per la caratterizzazione invariante delle superficie  $F^n$  a sezioni iperpiane di genere  $p$  di  $S_{n-p+1}$  per  $n > 2p - 2$  col metodo di Castelnuovo-Enriques basato sulla agguinzione l'A. dimostra che il sistema delle sezioni iperpiane di una  $F^n$  con  $n > 2p$  non rigata è somma di un certo numero ( $\geq 1$ ) di sistemi lineari infiniti di curve razionali più un sistema lineare di genere  $\pi$  ( $\geq 0$ ). Esiste sempre dunque un sistema lineare  $\infty^1$  almeno di curve razionali contenuto parzialmente nel sistema delle sezioni iperpiane. La dimostrazione fa uso della razionalità e l'A. osserva che se si riesce a dimostrare la proprietà indipendentemente di essa si compirebbe un passo notevole nelle sudette ricerche. Si caratterizzano inoltre le superficie per le quali  $\pi = 0$ . Federico Gaeta.

**Baldassarri, Mario:** Su alcune proprietà proiettive delle superficie d'ordine  $2p + 1$  dello  $S_{p+2}$ , non rigate. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **20**, 184—193 (1951).

Si dimostra che ogni superficie  $F^{2p+1}$  di  $S_{p+2}$  il cui sistema delle sezioni iperpiane sia scomponibile in somma di sistemi lineari infiniti di curve razionali (v. ref. preced.) possiede due curve razionali normali d'ordine  $p$  sghembe fra loro. Ne con-

seguono certe proprietà che estendono quelle della superficie cubica, v. gr. la proiezione sghemba e la generazione di Grassmann-Cremona mediante stelle d'iperpiani proiettive. Inoltre si vede facilmente con l'A. che tali superficie sono resti di un certo numero di quadriche aventi in comune un opportuno sistema di spazi.

*Federico Gaeta.*

**Segre, B.:** On the inflexional curve of an algebraic surface in  $S_4$ . Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 216—220 (1951).

Die  $\infty^1$  Hyperebenen eines Raumes  $S_4$ , die eine gegebene Fläche  $F$  allgemeiner Art in einem Punkt  $P$  berühren, schneiden auf  $F$   $\infty^1$  Kurven aus, die in  $P$  einen Doppelpunkt aufweisen, und deren beide Tangenten in  $P$  in der Tangentialebene  $\pi$  von  $F$  in  $P$  liegen und eine Involution  $I$  beschreiben. Inflexionalkurve, oder asymptotische Kurve, der Fläche  $F$  ist der Ort  $\Gamma$  aller Punkte  $P$  von  $F$ , in denen die Involution  $I$  parabolisch ist, d. h. in denen die Doppelgeraden der Involution  $I$  zusammenfallen.  $F$  heißt parabolisch, wenn  $I$  für alle Punkte von  $F$  parabolisch ist. Für die Segresche  $F^4$ , Schnitt von zwei Quadriken, besteht  $\Gamma$  aus den 16 Geraden von  $F^4$  selbst und kann als vollständiger Schnitt von  $F^4$  mit einer gewissen Hyperfläche 4. Ordnung  $g$  konstruiert werden. Im allgemeinen ist, wenn  $F$  die vollständige Schnittfläche von zwei Hyperflächen der Ordnungen  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  des Raumes  $S_4$  ist,  $\Gamma$  die vollständige Schnittkurve von  $F$  mit einer Hyperfläche  $g$  der Ordnung  $6m + 6n - 20$ . Noch allgemeiner: Ist  $F$  eine Fläche des Raumes  $S_4$ , die algebraisch, irreduzibel, nicht parabolisch, und frei von mehrfachen Linien ist, so hat man auf  $F$  die Äquivalenz  $\Gamma \sim 10C + 6K$ , wo  $C$  eine hyper ebene Schnittkurve und  $K$  eine (virtuelle) kanonische Kurve von  $F$  ist. Es folgt schließlich die Ausrechnung der Kovariante  $g$  der Fläche  $F$ , falls sie der vollständige Schnitt der beiden Hyperflächen  $\alpha_x^m = 0$ ,  $\alpha_x^n = 0$  ist.

*Eugenio Giuseppe Togliatti.*

**Godeaux, Lucien:** Remarques sur les surfaces du quatrième ordre contenant une sextique de genre trois. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 419—426 (1951).

Les surfaces du quatrième ordre dotées de sextique de genre 3 étudiées en 1913 par l'A. (Bull. internat. Acad. Sci. Cracovie. Cl. Sci. math. nat., Sér. A 1913, 529—547) et récemment par Room (ce Zbl. 36, 375) possèdent deux systèmes  $|C_1|$  et  $|C_2|$  de telles sextiques. résidu l'un de l'autre par rapport à des surfaces cubiques. En rapportant projectivement les  $|C_1|$  aux plans de  $S_3$  on transforme une  $F$  en une autre  $F'$  de même module, donc homographique. Le produit de l'homographie qui fait passer de  $F$  à  $F'$  par la transformation birationnelle génératrice (transformation cubique) donne une transformation  $T_1$  de  $F$  en elle-même. Le système  $|C_2|$  introduit de même une transformation  $T_2$ . Les transformations  $(T_1 T_2)^k$  sont non périodiques, les  $(T_1 T_2)^k T_2$  sont involutives. Dans la note de Cracovie ces transformations étaient obtenues par application des théories de M. Severi sur la base minima que forment  $C_1$  et  $C_2$  sur  $F$ .

*Bruno d'Orgeval.*

**Simple, J. G.:** A property of projected Segre varieties. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 212—215 (1951).

Es werden einige Eigenschaften der Projektionen einer Segreschen Mannigfaltigkeit betrachtet, die bekannten Eigenschaften der Projektion einer Veronesischen Fläche auf einen Raum  $S_4$  ähnlich sind. Es sei  $V(r)$  die Segresche  $V_{2r}$  des Raumes  $S_{r^2+2r}$ , die die Punkthyperebenenpaare  $(P, II)$  eines Raumes  $S_r$  darstellt;  $\Omega(r)$  sei die Projektion von  $V(r)$  aus einem Punkt  $O$  allgemeiner Lage auf einen Raum  $S_{r^2+2r-1}$ . Zwei Paare  $(P, II)$ ,  $(P', II')$  werden verbunden genannt („related“), wenn  $P$  in  $II'$ , und  $P'$  in  $II$  liegt. Die mit  $(P, II)$  verbundenen Paare führen zu einer in  $\Omega(r)$  enthaltenen Segreschen  $V(r-1)$ ,  $w$ , die als Polare des dem Paare  $(P, II)$  entsprechenden Punktes  $W$  bezeichnet wird. Nun: Der Pol  $W$  einer solchen  $w$  ist der einzige weitere Schnittpunkt von  $\Omega(r)$  mit dem Einbettungsraum von  $V(r-1)$ ; die Räume  $S_{r-1}$ , die  $\Omega(r)$   $(r-1)$ -mal treffen, liefern die Abbildung



der Paare  $(P, \Pi)$ , die in einem Simplex des Raumes  $S_r$  enthalten sind; usw. — Diese allgemeinen Eigenschaften werden dann im Falle  $r = 2$  als Beispiel wiederholt. Liegt  $P$  in  $\Pi$ , so hat man auf  $\Omega(2)$  eine  $V_3^6$ , deren Punkte die Punktgeradenelemente einer Ebene eindeutig darstellen; und man findet, daß diese  $V_3^6$  die Mannigfaltigkeit  $\Omega(2)$  eindeutig bestimmt (ebenso wie die Fläche  $F^4$  des Raumes  $S_4$ , Projektion einer Veroneseschen Fläche, durch ihre inflexionale Raumkurve 4. Ordnung eindeutig bestimmt wird.)

*Eugenio Giuseppe Togliatti.*

**Roth, L.: On a class of unirational varieties.** Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 496—503 (1951).

Si sviluppano i risultati richiamati in una nota previa (questo Zbl. 38, 320) relativa alle varietà algebriche  $V_r$  contenenti un sistema algebrico di curve ellittiche od iperellittiche, tale che per un punto generico di  $V_r$  passano semplicemente  $\infty^1$  di esse. Si ottengono „in generale“ varietà unirazionali. La precisazione dei diversi casi possibili diventa sempre più difficile col crescere di  $r$ . Si considera una generalizzazione del metodo sostituendo le curve ellittiche con varietà di un sistema  $\{W_i\}$  ( $1 < i \leq r-1$ ) che gode delle due proprietà seguenti: a) La  $W_i$  generica contiene una serie razionale di gruppi di  $n$  ( $> 2$ ) punti tali che il punto generico  $P$  di  $W_i$  è  $(n-1)$ -plo per un unico gruppo della serie. Il punto residuo  $Q$  viene chiamato coniugato di  $P$  rispetto ad  $\{W_i\}$ . b) Una successione di punti ciascuno dei quali è coniugato del precedente è sempre infinita. Analogamente si possono sostituire le curve iperellittiche con varietà possedenti una involuzione razionale del second' ordine.

*Federico Gaeta.*

**Roth, Leonard: Sugli invarianti d'una varietà algebrica a tre dimensioni.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 468—472 (1951).

Die Invarianten einer algebraischen Mannigfaltigkeit  $V_3^n$  von drei Dimensionen und die Beziehungen, die sie miteinander verbinden, sind schon viel betrachtet worden (Pannelli, Severi, B. Segre, Roth, Todd, Welchman). Hier gibt Verf. eine neue projektive Systematisierung dieser Theorie. Zunächst betrachtet er eine  $V_3^n$  des Raumes  $S_4$ , die nur gewöhnliche Singularitäten aufweist: eine nodale Doppelfläche  $D$  (Ordnung  $\alpha_0$ , Rang  $\alpha_1$ , Klasse  $\alpha_2$ , Stand  $\beta_2$ ); eine dreifache Kurve  $C$  (Ordnung  $t$ , Rang  $r$  und Immersionsklasse  $t_1$  in  $V_3^n$ ), die auch für  $D$  dreifach ist;  $\xi$  vierfache Punkte, die für  $C$  vierfach und für  $D$  sechsfach sind; eine Kuspalkurve  $C'$  von  $D$ , welche mit  $C$  eine gewisse Anzahl  $\tau$  von Punkten gemein hat. Die bekannten Beziehungen, die  $n, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2, t, r, t_1, \xi, \tau$  miteinander verbinden, und die Betrachtung des Linearsystems der Flächen, die auf  $V_3^n$  von den adjungierten Hyperflächen der Ordnung  $n-5$  ausgeschnitten werden, liefern die Werte der Charaktere  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, P_a$  und die Beziehungen von Pannelli und Severi. — Für eine  $V_3^n$  eines Raumes von mehr als drei Dimensionen werden in der Reihe der sieben projektiven Charaktere  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_2, \nu_3, \nu_{21}$  von Severi die Zahlen  $\nu_3$  und  $\nu_{21}$  durch  $\varrho = 3\nu_3 + 2\nu_{21} - 2\nu_2$ ,  $\zeta = 4\nu_3 + 2\nu_{21} - 2\nu_2$  ersetzt, welche für jeden Wert von  $r \geq 4$  eine geometrische Bedeutung haben. Die expliziten Ausdrücke von  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$  durch  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_2, \varrho, \zeta$  für eine singularitätenfreie  $V_3^n$  können durch Projektion der  $V_3^n$  auf einen Raum  $S_4$  erhalten werden.

*Eugenio Giuseppe Togliatti.*

**Koizumi, Shoji: On the differential forms of the first kind on algebraic varieties. II.** J. math. Soc. Japan 2, 267—269 (1951).

Verf. beweist in Ergänzung zu einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 38, 322) zwei Theoreme mit folgendem (gekürzten) Inhalt: 1. Eine Differentialform 1. Gattung  $\omega$  auf einer Produktmannigfaltigkeit  $U \times V$  besitzt eine Darstellung  $\omega = \sum \sigma_i \tau_i$ , wo  $\sigma_i, \tau_i$  Differentialformen 1. Gattung auf  $U, V$  bedeuten. 2. Eine Differentialform 1. Gattung  $\omega$  auf  $U$  induziert eine ebensolche  $\omega'$  auf jeder einfachen Untermannigfaltigkeit  $V$  von  $U$ .

*Wolfgang Gröbner.*

## Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● Kočín, N. E.: **Vektorrechnung und Grundzüge der Tensorrechnung**. 7. Aufl. Moskau: Verlag der Akad. d. Wiss. d. UdSSR 1951. 426 S. R. 20.— [Russisch].

Das vorliegende Werk ist hauptsächlich auf die Bedürfnisse der klassischen theoretischen Physik zugeschnitten und scheint sich großer Beliebtheit zu erfreuen, wie aus der Auflagenhöhe hervorgeht. Die Vektorrechnung wird ähnlich wie in vielen anderen Büchern eingeführt. Von den 4 Teilen behandeln Teil I und II auf 283 Seiten die Vektoralgebra und die Vektoranalysis, wobei die Analysis jedoch einen viel größeren Platz einnimmt, in dem sich auch viele physikalische Anwendungen der Begriffe grad, div, rot und der zugehörigen Integralsätze finden. Die beiden letzten Teile III und IV beschäftigen sich dann mit der Tensorrechnung und bringen beide für die Anwendungen wichtige Tensorbegriffe. Teil III betitelt sich „affine orthogonale Tensoren“. Dort werden die Tensoren oder Affinoren nach Gibbs als Vektortripel eingeführt, was bekanntlich mathematisch auf eine Behandlung der affinen Transformationen bezüglich der orthogonalen Gruppe hinausläuft. Der IV. Teil bringt dann den in der Riemannschen Geometrie wichtigen Tensorbegriff. Die Tensoralgebra dieses Teils unterscheidet sich also von derjenigen des Teils III dadurch, daß allgemein lineare Transformationen des Grundsystems zugelassen sind. Dann werden der metrische Fundamentaltensor und die Grundbegriffe der Riemannschen Geometrie bis zum Krümmungstensor entwickelt. Bis auf wenige Stellen im letzten Teil wird der dreidimensionale Standpunkt nicht verlassen. Es findet sich daher auch nicht die allgemeine alternierende Multiplikation.

Werner Burau.

Craig, Homer V.: **Vector analysis**. Math. Mag. 25, 67—86 (1951).

Fedorov, V. S.: **Monogene Vektorfunktionen**. I. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 177—184 (1951) [Russisch].

Verf. gibt in Abänderung und Verallgemeinerung seiner früheren Definition (dies. Zbl. 38, 324) folgende Erklärung:  $\mathbf{f}$  sei eine Vektorfunktion des Radiusvektors  $\mathbf{r}$  der Punkte eines dreidimensionalen Gebietes  $G$ .  $\mathbf{f}$  heißt  $A$ -monogen in  $G$ , wenn es 1. zu jedem Punkt aus  $G$  eine abgeschlossene Menge  $A$  von Richtungen gibt, die jeweils verschieden sein kann, so daß die Richtungsableitung  $\mathbf{f}_m$  für alle Richtungen  $m$  aus  $A$  existiert und stetig von  $m$  abhängt.  $\mathbf{f}$  selbst ist stetig als Funktion in  $G$ . 2.  $\mathbf{f}_m^2$  und  $m \mathbf{f}_m$  hänge nicht von  $m$ , sondern nur von der betrachteten Stelle in  $G$  ab. 3. Für  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A$ , die nicht kollinear sind, folgt aus  $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = 0$  stets  $\alpha \mathbf{f}_a + \beta \mathbf{f}_b + \gamma \mathbf{f}_c = 0$ . — Nun werden folgende Sätze gezeigt: I.  $G$  sei ein achsenparalleler Würfel,  $G'$  die Projektion auf die  $XY$ -Ebene.  $A$  enthalte für jede Stelle aus  $G$  alle Richtungen orthogonal zur  $z$ -Achse. Sei  $\mathbf{f} = (u, v, w)$ . Dann gilt:  $u + iv = h(x + iy, z)$ ,  $w = F(z)$ , so daß für jedes feste  $z$   $u + iv$  analytisch in  $G'$  ist. II. Wenn  $A$  überdies noch den Richtungsvektor der  $z$ -Achse sowie eine von dieser und den dazu orthogonalen Richtungen linear unabhängige Richtung enthält, dann ist  $\mathbf{f}$  linear von  $\mathbf{r}$  abhängig.

Leo Schmetterer.

Gardner, G. H. F.: **Canonical coordinates at a point for two skew-symmetric tensors**. Proc. Amer. math. Soc. 2, 328—334 (1951).

Es seien bei vier Veränderlichen  $P_{ik}$  und  $Q_{rs}$  zwei alternierende Tensoren. Es wird nach den Bedingungen gefragt, unter denen es eine topologische Transformation  $x \rightarrow \bar{x}$  mit positiver Transformationsdeterminante  $|\partial x_i / \partial \bar{x}_r|$  in einem gegebenen Punkte gibt, bei welcher  $\bar{P}_{12}, \bar{P}_{13}, P_{14}, \bar{P}_{34}, \bar{P}_{42}, \bar{P}_{23}$  übergehen in  $\bar{Q}_{34}, \bar{Q}_{42}, -\bar{Q}_{23}, -\bar{Q}_{12}, -\bar{Q}_{13}, \bar{Q}_{14}$ . Von besonderen Fällen abgesehen wird  $\Sigma P_{12} P_{34} + \Sigma Q_{12} Q_{34} = 0$  als notwendig und hinreichend gefunden. Das Problem hängt zusammen mit einer durch J. L. Synge (dies. Zbl. 40, 249) aufgeworfenen Frage.

Roland W. Weitzenböck.

Bereis, R.: Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen. Österreich. Ingenieur-Arch. 5, 246—266 (1951).

Stellt  $z = z(t) = x(t) + i y(t)$  eine Kurve der Gaußschen Ebene dar, so ist  $\zeta = z + 2z' \frac{z''}{z' \bar{z}''} - \frac{z''}{\bar{z}''} z''$ , die komplexe Koordinate des Krümmungsmittelpunktes. Die Spitze des in  $z$  befestigten Vektors  $z''$  und der Punkt  $\zeta$  sind daher konjugiert bezüglich des Kreises um  $z$  mit  $|z'|$  als Radius. Eine ähnliche einfache Kennzeichnung läßt sich für die Affinnormale und die Schmiegeparabel einer Kurve geben. Auch die Mitte des (fünfpunktig berührenden) Schmiegekegelschnittes kann komplex sehr einfach formuliert werden. Die Bedingung für sextaktische Punkte lautet z. B.  $(z' z'')^2 [(z' z''') + 5 (z'' z''') - 5 (z' z'') (z' z''') [(z' z''') + 2 (z'' z''')]] + \frac{4!}{9} (z' z''')^3 = 0$ , wobei  $(z' z'') = -(z'' z') = \frac{i}{2} (z' \bar{z}'' - \bar{z}' z'')$  usw. ist. — Besonders wertvoll

ist die Beschreibung der ebenen Kurventheorie durch „Minimalkoordinaten“  $z, \bar{z}$  für die ebene Kinematik. Davon haben schon viele Autoren Gebrauch gemacht. (Bem. d. Ref.: Zu der angeführten Literatur ist manche wichtige Ergänzung möglich, z. B. W. Blaschke, dies. Zbl. 19, 39.) Ist  $\zeta = \xi + i \eta$  ein fester Punkt des Gangsystems  $\Sigma$ ,  $z = x + i y$  ein fester

Punkt des Ruhsystems  $\Sigma_0$ , ist weiter  $\varphi$  der Winkel, um den  $\Sigma$  gegen  $\Sigma_0$  verdreht ist, und  $A_0 \vec{A} = a$  der komplexe Vektor, der die Anfangspunkte  $A_0$  und  $A$  der Systeme verbindet, so ist die Bewegung  $\mathfrak{B}$  von  $\Sigma$  über  $\Sigma_0$  festgelegt, wenn man die Bahn  $z = a(\varphi)$  von  $A$  in ihrer Abhängigkeit vom Drehwinkel  $\varphi$  kennt. Die Bahn eines beliebigen Punktes  $\zeta$  von  $\Sigma$  lautet dann (in  $\Sigma_0$ )  $z = a(\varphi) + \zeta e^{i\varphi}$ . Diese Gleichung der Bewegung  $\mathfrak{B}$  (von  $\Sigma$  auf  $\Sigma_0$ ) und die Gleichung  $\zeta = -a e^{-i\varphi} + z e^{i\varphi}$  der inversen Bewegung  $\mathfrak{B}^*$  (von  $\Sigma_0$  über  $\Sigma$ ) bildet die einfache Grundlage der weiteren Behandlung der hauptsächlichsten Fragen der klassischen ebenen geometrischen Kinematik. Wesentlich für die Einfachheit der Ergebnisse ist dabei die Wahl des Drehwinkels  $\varphi$  als Parameter der Bewegung  $\mathfrak{B}$ . Als Beispiel der erhaltenen einfachen Sätze erwähnen wir folgenden Satz: Hängt man an jeden Punkt  $z$  die um  $(2-n)$  rechte Winkel geschwenkten Ableitungsvektoren  $z^{(n)}$  an, so fallen deren Spitzen für jedes  $n$  in einem Punkt  $P_n$  zusammen, dem Pol  $n$ -ter Ordnung  $P_n$  der Bewegung; insbesondere ist dabei  $P_1$  das Momentanzentrum,  $P_2$  der Wendepol, die Gerade  $P_1 P_3$  trägt (als Lotfußpunkt aus  $P_2$ ) den Ballschen Punkt der Bewegung (Punkt mit mindestens vierpunktig berührender Bahntangente) usw. Die zu einem bestimmten Augenblick gehörige Polkette  $P_1, P_2, P_3, \dots$  ist vom Koordinatensystem unabhängig und bestimmt die (analytisch gedachte) Bewegung vollständig; sie ist mit der schon von R. Müller [Z. Math. Physik 42, 250 (1897)] betrachteten Kette der Wendepole identisch. Die ersten  $n$  Glieder der Polkette sind ein Äquivalent für  $(n+1)$  zusammengerückte Lagen des Gangsystems  $\Sigma$ . Es wird ausführlich gezeigt, wie sich mit diesen Hilfsmitteln eine einfache theoretische und konstruktive Behandlung der ebenen Kinematik ergibt, wie man z. B. die Schmiegekreise und Affinnormalen der Bahn- und Hüllkurven finden kann. Es ergeben sich weiter sehr einfach die bekannte kubische Kreiskurve (Ort der Punkte, die gerade einen Scheitel ihrer Bahn durchlaufen), die Quartik der Punkte mit fünfpunktiger Bahnschmiegeparabel, die Quintik der Punkte, die sich gerade in einem sextaktischen Punkte ihrer Bahn befinden. Darüber hinaus werden noch septaktische und oktaktische Punkte (mit sieben- und achtpunktig berührenden Bahnschmiegekegelschnitten) betrachtet. Mit Hilfe der Polkurven erster und höherer Ordnungen lassen diese Dinge auch eine konstruktive Behandlung zu. Abschließend wird gezeigt, wie durch Verwendung der Polkette eine beliebig genaue Approximation einer Bewegung durch eine geeignete andere für den betrachteten Augenblick ermöglicht wird. Stimmen nämlich zwei Bewegungen in einem Augenblick in den ersten  $n$  Polen überein, so berühren die Bahnkurven jedes Punktes der Ebene einander von  $n$ -ter Ordnung. Z. B. kann man jede genügend reguläre ebene Bewegung (auf mannigfache Weise) in jedem Augenblick überall auf diese Art durch Planetenbewegungen  $n$ -ter Stufe in  $n$ -ter Ordnung approximieren.

Karl Strubecker.

Steward, G. C.: On the cardinal points in plane kinematics. Philos. Trans. roy. Soc. London, Ser. A 244, 19—46 (1951).

Verf. charakterisiert die Punkte der festen Ebene  $S$  durch komplexe Zahlen  $z$  (wie in der geometr. Funktionentheorie). Die Punkte der beweglichen Ebene  $\Sigma$  bestimmt er ebenfalls durch komplexe Zahlen  $\zeta$ . Als Bewegungsparameter wählt er den Winkel  $\varphi$  zwischen den reellen Achsen der beiden Ebenen. Er beschreibt die Bewegung durch Angabe des Ortes  $\bar{z}(\varphi)$ , den der Punkt  $\zeta = 0$  im Augenblick  $\varphi$  einnimmt. Für den Ort  $z$  irgendeines Punktes  $\zeta$  zur „Zeit“  $\varphi$  gilt  $z = \bar{z} + \zeta e^{i\varphi}$ . Nun sei  $\varphi = \varphi_0$  festgehalten.  $n$ -ten Pol (cardinal point) der Bewegung bezeichnet Verf. den (einzigen) Punkt  $A_n(z_n, \bar{z}_n)$  der Ebene, für den  $z^{(n)} = d^n z / d\varphi^n = 0$  ist. Es ist  $z_n = \bar{z} - (-i)^n \bar{z}^{(n)}$ ,  $\bar{z}_n = (-i)^n e^{-i\varphi} (\bar{z} e^{i\varphi})^{(n)}$ . Für beliebige  $z$  gilt  $z^{(n)} = i^n (z - z_n)$ . Die „Polkette“  $A_1, A_2, A_3, \dots$  [so nennt R. Bereis (s. vorsteh. Referat) die Menge dieser Punkte. Die beiden Arbeiten unterscheiden sich vor allem durch die Auswahl



der höheren Eigenschaften der Bahnkurven, welche behandelt werden] charakterisiert also die Bewegung vollständig, denn für die Bahn eines beliebigen Punktes gilt  $z(q_0 + \Delta q) = z(q_0) + \sigma_1 \Delta q + \sigma_2 (\Delta q)^2 + \dots$  mit  $n! \sigma_n = i^n (z - z_n)$ . Die Betrachtung der umgekehrten Bewegung ergibt analog die zweite Polkette  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n (z'_n, \zeta'_n)$ . Es ist  $A_1 = A'_1$  das Momentanzentrum,  $A_2$  der Wendepol,  $A'_2$  der Rückkehrpol,  $A_i$  und  $A'_i$  für  $i > 2$  sind die höheren Wende- und Rückkehrpole. Es bestehen die Beziehungen  $z'_n - \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \binom{n}{r} z_r$  und  $\zeta'_n = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \zeta_r$ .

Ist  $q_0$  der (als komplexe Zahl geschriebene) Vektor von einem Punkt  $P$  zum Krümmungsmittelpunkt seiner Bahn und analog  $q_n$  der Vektor von  $P$  zum Krümmungsmittelpunkt der  $n$ -ten Evolute seiner Bahn, so ist  $\theta^{2n-1} q_n = i^n \omega(n) P A_1$  mit reellem  $\theta$  und  $\omega(n)$ . Werden  $\xi_\mu, \eta_\mu$  durch  $PA_\mu = (\xi_\mu + i \eta_\mu) PA_1$  definiert, so ergibt sich  $\theta = \xi_2$ ,  $\omega(0) = 1$  und  $\omega(n)$  kann rekursiv aus  $\omega(n-1)$  berechnet werden.  $\omega(n)$  ergibt sich so als Polynom in  $\xi_2, \eta_2, \dots, \xi_{n+2}, \eta_{n+2}$ , linear in  $\xi_{n+2}, \eta_{n+2}$ . Es können also, wenn zu zwei Punkten die Bahntangenten und die Krümmungsradien  $q_0, q_1, \dots, q_n$  bekannt sind,  $A_1, \dots, A_n$  durch Auflösen linearer Gleichungen berechnet, also auch konstruiert werden. Die Kurve, auf der  $q_n = \omega(n) = 0$  ist, ist algebraisch von der Ordnung  $4n-1$ , geht  $(2n-1)$ -fach durch die Kreispunkte,  $2n$ -fach durch  $A_1$  und auch durch den Ballschen Punkt. Besonders genau wird die „Burmester cubic“  $\Gamma$  untersucht, das ist die Kurve  $q_1 = 0$ , deren Punkte gerade Scheitel ihrer Bahn durchlaufen. Die Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurven ihrer Punkte liegen auf der zur umgekehrten Bewegung gehörigen „Burmester-cubic“.  $\Gamma$  ist durch  $A_1, A_2, A_3$  eindeutig bestimmt, nicht aber umgekehrt. Eingehend behandelt werden die Burmester-Punkte (B. P.), das sind die Punkte  $x \in \Gamma$ , für die auch  $q_2 = 0$  ist, deren Bahnkurven also von den Krümmungskreisen fünfpunktig berührt werden. Es gibt ihrer 4, sie hängen von  $A_4$  ab. Wird ein B. P. festgehalten, so wird dadurch  $A_4$  auf eine Gerade beschränkt. Zu jedem möglichen  $A_4$  gehören dann drei weitere B. P.; sie bestimmen einen Kreis. Alle diese Kreise schneiden sich in zwei Punkten der Geraden  $A_1 A_2$ . Das ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Müller, daß drei B. P. auf einer Geraden liegen, wenn der vierte in den Ballschen Punkt fällt. In diesem Falle entarten nämlich die Kreise. Es werden auch noch die Punkte von  $\Gamma$  studiert, für die  $q_3 = 0$  ist, insbesondere, wann sie in B. P. fallen. Es würde wohl den Rahmen dieser Zeitschrift übersteigen, näher auf die vielen Einzelheiten und behandelten Sonderfälle einzugehen. Gustav Lochs.

**Federhofer, Karl:** Über den Trägheitspol des eben bewegten starren Systems und die Trägheitspolkurve des zentrischen Schubkurbelgetriebes. Österreich. Ingenieur-Arch. 5, 240—245 (1951).

Ist der augenblickliche Drehpol und Wendepol einer eben bewegten Scheibe mit gegebenem Schwerpunkt und Trägheitshalbmesser bekannt, so ist die Lage des Trägheitspols vollkommen bestimmt. Im allgemeinen kann man mit Hilfe einfacher zeichnerischer Verfahren den Trägheitspol ermitteln. — Verf. gibt zur rechnerischen Festlegung der Lage des Trägheitspols eine einfache Formel an, mit der auch der Ort aller Lagen des Trägheitspols eines Getriebegliedes, die Trägheitspolkurve, im bewegten und festen System festgelegt ist. — Bei Anwendung auf das zentrische Schubkurbelgetriebe zeigt sich, daß die Trägheitspolkurve der Koppel mit großer Näherung durch eine zu ihr senkrechte Gerade ersetzt werden kann, auf der innerhalb eines ganz bestimmten Bereiches die Trägheitspole für den vollen Umlauf der Kurbel liegen. Bekir Dizioğlu.

**Meyer zur Capellen, Walther:** Über die Koppelkurven des Zwillingkurbeltriebes. Z. angew. Math. Phys. 2, 189—207 (1951).

Gewisse Koppelkurven des Gelenkvierecks im Falle eines Zwillingkurbeltriebes werden als Umriß von Tragflügel- oder Schaufelprofilen benützt. Verf. untersucht die fertigungstechnisch wichtigen Eigenschaften dieser Kurven eingehend. Behandelt werden: die Koppelkurven des Antiparallelkurbelgetriebes, des gleichläufigen Kurbelgetriebes und des symmetrischen Schleifschiebers.

Bekir Dizioğlu.

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

**Giannopoulos, Alex. I.:** Study of curves in reference to their Mayer ( $M_r$ ) trihedron. Bull. Soc. math. Grèce 25, 82—103 und engl. Zusammenfassg. 103 (1951) [Griechisch].

In § 1 the definition is given of the  $M_r$ -trihedron at a point on a curve [cf. O. Mayer, Bul.

Fac. Ști. Cernăuți 2, 208—228 (1928)]. In § 3 the definitions are given of the  $M_r$ -curvature and  $M_r$ -torsion of the curve. In § 4 the definition is given of the  $M_r$ -center of curvature. In § 5 formulas corresponding to those of Darboux are established as a foundation of the kinematical geometry and several applications are given thereof. In § 6 the study is carried out of curves corresponding to Bertrand's, of a formula corresponding to Shell's, of a theorem and curves corresponding to Mannheim's. In § 7 the question is examined about the envelopes of the  $M_r$ -coordinate planes along the curve. — Throughout the paper systematic use is made of the vector calculus. (Autoreferat.)

**Graue, Louis C.:** A necessary and sufficient condition that a curve lie on a hyperquadric. Proc. Amer. math. Soc. 2, 607—612 (1951).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu finden, daß eine Kurve  $\Gamma$  eines Euklidischen Raumes  $R_n$  mit  $n$  Dimensionen auf einer zentralen Hyperquadrik  $Q$  liege; es handelt sich also um eine Verallgemeinerung der Bedingung für die sphärischen Kurven des dreidimensionalen Raumes. Es sei  $\sum a_{ij}(x^i - c^i)(x^j - c^j) = \gamma_0 d^2$  die Gleichung von  $Q$ . Verf. betrachtet zunächst die Kurve  $\Gamma$  unter der Voraussetzung, daß für die Vektoren die von dem symmetrischen Tensor  $a_{ij}$  definierte Metrik gilt. Man kann so einen zu  $Q$  relativen Bogen  $S$  definieren; in jedem Punkt von  $\Gamma$  hat man dann gewisse  $n - 1$  Krümmungen  $K_i$ , die als Koeffizienten in den Frenetschen Formeln auftreten; und es ist leicht, eine Bedingung dafür aufzustellen, daß  $\Gamma$ , in einer solchen Metrik, auf der gegebenen Quadrik  $Q$  liege. Der Schritt zur gegebenen Euklidischen Metrik geschieht durch eine Parametertransformation des relativen Bogens  $S$  zum Euklidischen Bogen  $s$  und durch Betrachtung des invarianten  $(K_1^{n-1} K_2^{n-2} \dots K_{n-2}^2 K_{n-1})^{2/n(n+1)} dS$ . Es wird auch der Fall  $d = 0$  betrachtet, in welchem  $Q$  ein Hyperkegel wird.

*Eugenio Giuseppe Togliatti.*

**Scherrer, W.:** Stützfunktion und Radius. I. II. Commentarii math. Helvet. 20, 366—381 (1947), 25, 11—25 (1951).

I. Es wird ein System von Beziehungen aufgestellt, die zwischen der bekannten Stützfunktion, der neu eingeführten Funktion des Stützvektors und dem Radiusvektor einer Fläche gelten, und in denen außer den Beltramischen Differentialparametern Operatoren eine Rolle spielen, die jenen analog für die zweite und dritte Grundform der Fläche gebildet sind. Das Hauptziel ist die Aufstellung verschiedener Systeme von Integrabilitätsbedingungen und ihre Verwertung zum Beweise der Sätze: Eine Fläche ist nach Vorgabe eines geeigneten Streifens eindeutig bestimmt, wenn außer einer ihrer drei Hauptformen die zu ihr passende Krümmungsfunktion — mittlere Krümmung oder Gaußsche Krümmung oder harmonische Krümmung — gegeben ist.

II. Im Anschluß an Teil I, der zunächst einige Ergänzungen erfährt, wird die „Normalinversion“ einer Fläche betrachtet [d. i. das, was man erhält, wenn man die vektorielle Zusammenfassung der Linienkoordinaten der Berührebenen der Fläche als Ortsvektor der Punkte einer zweiten Fläche deutet; vgl. Math. Z. 49, 432 (1943)]. Dann wird bewiesen, daß eine Fläche nach Vorgabe eines nicht asymptotischen Streifens eindeutig bestimmt ist, wenn ihre Gaußsche Krümmung als Funktion der Stützfunktion und des Radius (Radiusvektor) gegeben ist. *Frank Löbell.*

**Sakellariou, Nilos:** Some observations on geodesic lines and curvatura integra. Bull. Soc. math. Grèce 25, 120—128 und engl. Zusammenfassg. 128—129 (1951) [Griechisch].

In § 1 the geodesic curvature at a point  $X$  of a curve  $(\gamma)$  upon a surface  $(\varepsilon)$  is defined as the curvature of the curve  $(\gamma^*)$  which is the orthogonal projection upon the tangent plane at  $X$  of  $(\varepsilon)$  of the portion of  $(\gamma)$  in the neighborhood of  $X$ , and its known expression is given. A geodesic line upon a surface  $(\varepsilon)$  is defined as the curve for which the osculating plane on every one of its points  $X$  contains the normal straight line at  $X$ , and its differential equations are given. In § 2 by use of an equation relating the curvatura integra with the geodesic curvature and the curvature  $K$  at a point of  $(\varepsilon)$  it is deduced that two geodesics on  $(\varepsilon)$  of negative  $K$  cannot meet in two points of a contour area and that the number of angular points of a contour of a geodesic line on  $(\varepsilon)$  for  $K \leq 0$  cannot be  $\leq 3$ . In § 3 is shown that the geodesics departing from



a point of  $(\epsilon)$  can cover completely  $(\epsilon)$  if  $K \leq 0$ . In § 4 is shown that a geodesic can be considered as function of its arc length and two of its points. In § 5 the relation of a curve  $(\gamma)$  on a surface to a geodesic tangent is studied, analogously to the relation of a plane curve to its tangent straight line with the use of its curvature. (Autoreferat.)

**Pan, T. K.:** Hypergeodesics and dual hypergeodesics. Amer. J. Math. 73, 556—568 (1951).

Sopra una superficie  $S$  descritta dal punto  $x^i = x^i(u^1, u^2)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e riferita alle asintotiche le curve integrali di un'equazione del tipo:

$$(1) \quad d^2u^2/du^1 = A + B du^2/du^1 + C (du^2/du^1)^2 + D (du^2/du^1)^3$$

formano una famiglia  $\infty^2$  di ipergeodetiche: per un punto  $P$  di  $S$  ne passano  $\infty^1$  e i loro piani osculatori generano un cono-inviluppo di 3<sup>a</sup> classe a cui appartiene come piano doppio il piano tangente in  $P$  ad  $S$  (le generatrici di contatto essendo le tangente asintotiche in  $P$ ). Inoltre i piani tangenti ad  $S$  lungo una ipergeodetica formano una sviluppabile e a ciascun punto dell'ipergeodetica è associato un punto dello spigolo di regresso della sviluppabile: così al punto  $P$  di  $S$ , considerato sulle  $\infty^1$  ipergeodetiche uscenti da esso, sono associati  $\infty^1$  punti dei relativi spigoli di regresso e il luogo di tali punti è una cubica situata nel piano tangente in  $P$ , avente in  $P$  un punto doppio e le tangenti asintotiche come tangenti nodali. Il cono di 3<sup>a</sup> classe e la cubica piana così associati in  $P$  alla famiglia (1) di ipergeodetiche non si corrispondono però per dualità, il che significa che la famiglia (1) di ipergeodetiche, considerate come striscie, ossia come sistemi  $\infty^1$  di punti di  $S$  e relativi piani tangenti, non è generalmente autoduale: l'A. riconosce l'ente duale in un'altra famiglia di ipergeodetiche di cui egli determina l'equazione differenziale, che risulta differire dalla (1) solo per il cambiamento di  $A$  e  $D$  rispettivamente in  $-A$  e  $-D$ . Se su una superficie ogni famiglia di ipergeodetiche è autoduale si deve avere identicamente  $A = D = 0$  e allora la superficie è una quadrica. Per una famiglia di ipergeodetiche con  $AD \neq 0$  l'A. ricerca le eventuali ipergeodetiche comuni a detta famiglia e a quella duale: esse soddisfano oltre che alla (1) anche all'equazione:

$$(2) \quad A + D (du^2/du^1)^3 = 0$$

che l'A. chiama equazione differenziale delle curve di Segre generalizzate associate alla famiglia (1): dei tre valori di  $du^2/du^1$  dati dalla (2) possono soddisfare alla (1) tutti, o uno solo, o nessuno. I due coni di 3<sup>a</sup> classe associati in uno stesso punto  $P$  a una famiglia di ipergeodetiche e alla sua duale hanno in comune, oltre al piano tangente ad  $S$  in  $P$ , altri tre piani contenenti ciascuno una delle tre direzioni di Segre generalizzate date dalla (2). In ogni punto  $P$  di una ipergeodetica  $C$  si può considerare la retta  $L'$  lungo cui il piano osculatore in  $P$  a  $C$  è tangente al cono-inviluppo associato alla famiglia (1) cui appartiene  $C$ : supposto che  $C$  non sia un'asintotica, l'A. ricerca la condizione perchè la rigata descritta da  $L'$ , al variare di  $P$  su  $C$ , sia sviluppabile e dimostra che la stessa condizione esprime pure che  $C$  è piana: il numero delle famiglie  $\infty^1$  di curve piane contenute in una famiglia  $\infty^2$  di ipergeodetiche è  $\leq 6$  e non è in relazione con l'analogo numero relativo alla famiglia duale.

Piero Buzano.

**Dekker, David B.:** Generalizations of hypergeodesics. Pacific J. Math. 1, 53—57 (1951).

In un precedente lavoro (questo Zbl. 35, 375) l'A. ha espresso l'equazione differenziale di un sistema  $\infty^2$  di ipergeodetiche di una superficie  $S$ , riferita a coordinate curvilinee  $u^1, u^2$ , sotto la forma:  $K_g - \Omega = 0$  dove  $K_g$  è l'ordinaria curvatura geodetica e  $\Omega$  è un polinomio omogeneo di 3° grado in  $u'^1$  e  $u'^2$  (essendo  $u^\alpha = u^\alpha(s)$  le equazioni di una ipergeodetica): ciò ha condotto l'A. all'introduzione di una curvatura ipergeodetica  $K_g - \Omega$  e di una torsione ipergeodetica di una linea su  $S$ . Nel presente lavoro il polinomio  $\Omega$  viene sostituito da una funzione razionale  $W = U/V$  ancora omogenea di 3° grado (essendo  $U$  e  $V$  polinomi omogenei rispettivamente di grado  $n$  e  $n - 3$  nelle  $u^\alpha$ ): le curve che soddisfano all'equazione  $K_g - W = 0$  vengono chiamate supergeodetiche e all'espressione  $K_g - W$  è dato il nome di curvatura supergeodetica. Alcune considerazioni già svolte dall'A. sulle ipergeodetiche (come quella del cono involupato dai piani osculatori alle ipergeodetiche uscenti da un punto di  $S$ ) si lasciano estendere immediatamente alle supergeodetiche.

Piero Buzano.

**Pinl, M.:** Über einen Satz von L. Berwald und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen. Monatsh. Math. 55, 188—199 (1951).

Im ersten Teile der Arbeit gibt Verf., anschließend an einen mündlichen Hinweis von L. Berwald, einen sehr einfachen Beweis des folgenden Satzes von Berwald: „Auf einer Fläche des euklidischen  $R_3$ , die zwei verschiedene Scharen krummer isotroper Linien besitzt, lassen sich die Vessiot-Studyschen natürlichen Parameter dieser isotropen Linien nur dann als



reguläre Flächenparameter einführen, wenn die Fläche feste mittlere Krümmung  $H = \text{const.}$  (und demgemäß auch einen festen Betrag ihres mittleren Krümmungsvektors  $|\mathfrak{H}| = \text{const.}$ ) hat“. Diese Bedingung  $H = \text{const.}$  ist nur notwendig, aber keineswegs hinreichend, wie das Gegenbeispiel der Kugel zeigt, deren isotrope Erzeugenden keine natürlichen Parameter besitzen. — Nach der Vermutung des Verf. ist eine solche Einschränkung schon im  $R_4$  und bei allen mehrdimensionalen euklidischen Räumen nicht mehr notwendig. Jedenfalls gelingt es ihm, im  $R_{12}$  eine zweidimensionale Fläche anzugeben, die auf die natürlichen Parameter ihrer krummen isotropen Linien bezogen werden kann, aber variablen mittleren Krümmungsvektor  $\mathfrak{H}$  mit nicht konstantem Betrag hat ( $|\mathfrak{H}| \neq \text{const.}$ ). — Die Berwaldsche Bedingung ist für die Minimalflächen des  $R_3$  erfüllt, die man tatsächlich auf die natürlichen Parameter ihrer isotropen Linien beziehen kann, wie zuerst Study gezeigt hat. Die Gaußsche Krümmung nimmt dann die Gestalt  $K = -1/g_{12}^2$  an. Bei reellen Minimalflächen des  $R_4$  ist diese Darstellung von  $K$  nur dann möglich, wenn die Minimalfläche in einem dreidimensionalen linearen Unterraum des  $R_4$  liegt. Ist die Gaußsche Krümmung  $K$  einer reellen oder komplexen Minimalfläche des  $R_3$  konstant, so ist sie notwendig Null. Eine Klassifikation der Minimalflächen verschwindender Gaußscher Krümmung in höheren euklidischen Räumen hat Verf. gegeben (dies. Zbl. 38, 331). Z. B. gibt es schon im  $R_4$  abwickelbare Minimalflächen mit zwei nicht geradlinigen Scharen isotroper Schiebkurven. Es wird gezeigt, daß es unter den komplexen Minimalflächen des  $R_4$  mit ebenen, nicht linearen isotropen Schiebkurven keine mit konstanter nicht verschwindender Gaußscher Krümmung gibt. Die isotropen Schiebkurven der genannten Flächen liegen in vollisotropen Ebenen des  $R_4$ ; sind sie konjugiert komplex, so erhält man die (reellen) Eisenhartschen Minimalflächen des  $R_4$ , unter denen es daher ebenfalls keine mit konstanter nichtverschwindender (also negativer) Gaußscher Krümmung gibt. Auf Eisenhartschen Minimalflächen des  $R_4$  gibt es (wegen der obigen Erzeugung) auch keine Study-Vessiotischen Flächenparameter. Man kann dies alles der analytischen Darstellung dieser Flächen entnehmen, die, wenn  $U + iV = f(u + iv)$  eine komplexe analytische Funktion bedeutet, nach Eisenhart [Amer. J. Math., IV. Ser. 34, 215–236 (1912)] lautet:  $x_1 = u$ ,  $x_2 = v$ ,  $x_3 = U(u, v)$ ,  $x_4 = V(u, v)$ .

Karl Strubecker.

**Reade, Maxwell O.: A characterization of minimal surfaces in isothermic representation.** Proc. Amer. math. Soc. 2, 47–54 (1951).

Die drei nicht konstanten, im Einheitskreis  $D$  ( $|z| < 1$ ) dreimal stetig ableitbaren Funktionen  $x_j = x_j(u, v) = x_j(z)$ ,  $z = u + iv$ , bestimmen eine Fläche  $S$ , für die  $u, v$  isotherme Parameter sind, wenn  $\sum \left[ \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) x_j \right]^2 = 0$ , d. h.  $E(u, v) = G(u, v)$ ,  $F(u, v) = 0$  ist, und die regulär ist für  $EG - F^2 \neq 0$ . Die Fläche  $S$  ist dann konform auf  $D$  abgebildet. Sind die drei Funktionen  $x_j(u, v)$  harmonisch, so spricht man von einem Tripel konjugierter harmonischer Funktionen. Nach Weierstraß ist die Fläche  $S$  dann (und nur dann) eine Minimalfläche in isothermer Darstellung. Verf. beweist, in Verallgemeinerung eines Ergebnisses von V. Fedoroff [C. R. Acad. Sci., Paris 193, 512–513 (1931); dies. Zbl. 3, 15], zunächst die folgenden beiden Sätze: 1) Unter den obigen Voraussetzungen ist die Fläche  $S$  dann und nur dann isotherme Darstellung eines Stücks einer Kugel, wenn für alle Punkte  $z$  in  $D$

$$\sum \left[ \iint_{D(z, r)} (\zeta - z) x_j(\zeta) d\xi d\eta \right]^2 = o(r^6)$$

und wenigstens für ein  $z_1$  in  $D$

$$\sum \left[ \iint_{D(z_1, r)} (\zeta - z_1) x_j(\zeta) d\xi d\eta \right]^2 \neq o(r^8)$$

ist. Dabei ist  $\zeta = \xi + i\eta$  gesetzt, und  $D(z, r)$  bezeichnet die abgeschlossene Kreisscheibe in  $D$  vom Mittelpunkt  $z$  und Radius  $r$ . — 2) Unter denselben Bedingungen ist die Fläche  $S$  dann und nur dann ein Stück einer Minimalfläche in isothermer Darstellung, wenn für jedes  $D(z, r)$  in  $D$  gilt:

$$\sum \left[ \iint_{D(z, r)} (\zeta - z) x_j(\zeta) d\xi d\eta \right]^2 = 0.$$

Eine Minimalfläche entsteht übrigens auch schon dann (und nur dann) wenn für jeden Punkt  $z$  in  $D$  gilt

$$\sum \left[ \iint_{D(z, r)} (\zeta - z) x_j(\zeta) d\xi d\eta \right]^2 = o(r^8).$$

Die Beweise dieser Sätze benützen die Taylorentwicklung des Summenausdrucks. — Schließlich wird noch der folgende Satz bewiesen, der eine Kennzeichnung der ebenen isothermen Abbildungen enthält, und als räumliche Verallgemeinerung des Satzes von Cauchy und Morera aufgefaßt werden kann: 3) Unter denselben Voraussetzungen wie oben ist die Fläche  $S$  dann und nur dann die isotherme Darstellung einer Ebene, wenn für jede geschlossene Jordan-Kurve  $\gamma$  in  $D$  gilt

$$\sum \left[ \int_{\gamma} x_j(\zeta) d\zeta \right]^2 = 0.$$

Zum Beweise dieses Satzes werden einige Identitäten hergeleitet, wobei kein Gebrauch von konformen Abbildungen und schlichten Funktionen gemacht wird. Der Beweis ist dadurch einfacher als ein älterer Ansatz von M. O. Reade und E. F. Beckenbach (dies. Zbl. 26, 427).

Karl Strubecker.

**Bers, Lipman: Isolated singularities of minimal surfaces.** Ann. of Math., II. Ser. 53, 364—386 (1951).

Die Lösungen  $\varphi(x, y)$  mit isolierten Singularitäten einer linearen partiellen Differentialgleichung von elliptischem Typus können durch Superposition von abzählbar vielen singulären Lösungen erzeugt werden. Da die Differentialgleichung der Minimalflächen  $(1 + \varphi_y^2) \varphi_{xx} - 2 \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (1 + \varphi_x^2) \varphi_{yy} = 0$  nicht linear ist, ergeben sich hier wesentliche Unterschiede. Es zeigt sich, daß eindeutige Lösungen von (1) im Endlichen nur hebbare Singularitäten besitzen. Weiter gilt: Eine Lösung, die in der ganzen endlichen Ebene regulär ist, ist linear in  $x$  und  $y$ . Dieses Resultat wurde auf einem andern Weg von S. N. Bernstein [Commun. Soc. math. Kharkov Inst. Sci. math. méc. Ukraine 15 (1915—17)] gefunden. Sollen im Endlichen Singularitäten auftreten, so muß  $\varphi$  notwendigerweise mehrdeutig sein. Sei der Verzweigungspunkt  $z_0$  ( $z = x + i y$ ) von  $(m-1)$ -ter Ordnung und vom Index  $n$ , d. h. die Funktion  $w = \varphi_x - i \varphi_y$  sei  $m$ -deutig um  $z_0$  und  $n$  sei gleich  $\frac{1}{2\pi} \Delta \arg w$ , falls  $z$   $m$ -mal den Punkt  $z_0$  im positiven Sinne umläuft. Ist  $n \geq 0$ , so gilt die asymptotische Darstellung

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \{ A + B(z - z_0)^{1+n/m} \} + O(|z - z_0|^{1+(n+1)/m}), \quad z \rightarrow z_0;$$

ist  $n < 0$ , so kann der Verlauf der Niveaulinien um  $z_0$  bestimmt werden. Als Ausgangspunkt zum Beweis dieser wichtigen Sätze dient eine Verallgemeinerung der Parameterdarstellung von Čaplygin [Wiss. Abh. Mosk. Univ., Math. Phys. Sect. 21, 1—121 (1902)].

Adolf Kriszten.

**Bers, Lipman: Boundary value problems for minimal surfaces with singularities at infinity.** Trans. Amer. math. Soc. 70, 465—491 (1951).

Verf. untersucht für das Außengebiet einer einfach geschlossenen Kurve  $P$  die Randwertaufgaben  $\partial\Phi/\partial n = 0$  bzw.  $\Phi = 0$  auf  $P$  für die Gleichung  $(1 + \varphi_y^2) \varphi_{xx} - 2 \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (1 + \varphi_x^2) \varphi_{yy} = 0$ , die sowohl in der Theorie der Minimalflächen wie auch in der Theorie der Strömungen kompressibler Flüssigkeiten von Wichtigkeit sind. Hierbei wird zwar nicht notwendig  $\Phi(x, y)$ , wohl aber  $w = \varphi_x - i \varphi_y$  als eindeutig vorausgesetzt und  $\max |w|$  vorgeschrieben. Unter Zuhilfenahme der zu  $\Phi$  assoziierten Funktion  $\Psi(x, y) = \int \frac{\Phi_x dy - \Phi_y dx}{(1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2)^{1/2}}$  werden dann, gemäß gewissen Zusatzbedingungen, die Aufgaben weiter klassifiziert und vorausgesetzt, daß das „Profil“  $P$  (außer evtl. in einem Punkte  $z_T$ , wo eine auspringende Ecke vorliegen kann) eine stetige Tangente habe und in der Gestalt  $z - x + i y = Z(s) = z_T + \int_0^s e^{i\theta(\sigma)} d\sigma$  [ $s$  Bogenlänge,  $0 \leq s \leq 2\pi$ ,  $Z(2\pi) = Z(0)$ ,  $Z(s) \neq Z(s')$  für  $0 \leq s < s' < 2\pi$ ,  $\theta(s)$  Hölder-stetig] darstellbar sein soll. Als Hauptresultat ergibt sich, daß die genannten Probleme Lösungen besitzen. Der Behandlung liegt die konforme Abbildung der  $z$ -Ebene auf die (modifizierte)

Hodographenebene  $\zeta$  zugrunde. Die Aufgabe, die Abbildung von  $P$  auf  $|\zeta| = 1$  zu finden, führt auf eine nichtlineare Integralgleichung für  $s = f(\omega)$  ( $\zeta = e^{i\omega}$ ). Umgekehrt zeigt sich, daß eine Lösung der Integralgleichung auf eine Lösung der Randwertaufgabe führt. Der Beweis für die Existenz einer Lösung der Integralgleichung gelingt mit Hilfe der auf topologischem Wege erhaltenen Sätze von Leray-Schauder. Um das Erfülltsein der Voraussetzungen des genannten Satzes beim vorliegenden Beispiel nachzuprüfen, wird wesentlich die Theorie der konjugierten Funktionen herangezogen. — Es folgen dann noch Betrachtungen über allgemeinere Profile.

Karl Maruhn.

Lewy, Hans: On minimal surfaces with partially free boundary. Commun. pure appl. Math. 4, 1—13 (1951).

On sait que le problème de Plateau pour un arc de courbe  $\gamma$  et une surface  $S$  a une solution unique lorsque  $\gamma$  est un arc de Jordan rectifiable et que  $S$  est une surface fermée, connexe et bornée, n'ayant en commun avec l'arc  $\gamma$  que ses extrémités  $a$  et  $b$  et sur laquelle il existe des arcs rectifiables joignant  $a$  et  $b$ . La surface minima solution  $\mu$  est une image topologique du demi-cercle  $u^2 + v^2 \leq 1$ ,  $v > 0$  du plan  $u, v$ , la courbe  $\gamma$  correspondant à la demi-circonférence. Soit  $\gamma'$  l'ensemble limite des points de  $\mu$  correspondant à des points du demi-cercle tendant vers un point quelconque de l'axe des  $u$ . L'A. étudie la structure de  $\gamma'$  quand  $S$  est orientable, fermée, bornée et localement analytique; il démontre d'abord que  $\gamma'$  est une courbe rectifiable en correspondance continue avec le diamètre du demi-cercle, puis que  $\gamma'$  est analytique.

Jacques Dufresnoy.

Poznjak, E. G.: Unendlich kleine Verbiegungen von vieleckigen Rinnen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 205—207 (1951) [Russisch].

Eine Ebene  $\varepsilon$  bewege sich (beliebig wenig) so, daß sie zu ihrer Anfangslage parallel bleibt; ein in ihr liegendes geschlossenes Vieleck, dessen Seiten einander auch schneiden dürfen, beschreibt dann das, was hier eine vieleckige Rinne genannt wird, wenn die Seiten des Vielecks zu den Anfangslagen parallel bleiben, während im übrigen Gestalt und Größe des Vielecks sich ändern dürfen, und wenn jede Vielecksseite eine stetig gekrümmte Zylinderfläche durchläuft. Die Rinne besteht also aus endlich vielen Zylinderstücken, deren Erzeugenden alle zu derselben Ebene parallel liegen, und die längs gewisser Kurven, der „Kanten“ der Rinne, „verklebt“ sind. Wird auf den Kanten nicht nur Eindeutigkeit des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathfrak{z}$  für eine infinitesimale Verbiegung der Rinne, sondern auch Eindeutigkeit des Drehfeldes gefordert, so ist die Rinne dann und nur dann starr, wenn unter den Vielecken jedenfalls eines einen von 0 verschiedenen Inhalt hat, und nicht alle Vielecke einander ähnlich sind. Eine dreieckige Rinne ist schon starr, wenn nur die Eindeutigkeit des  $\mathfrak{z}$ -Feldes verlangt wird. Die Grundlage für diese Sätze bildet ein Lehrsatz über das  $\mathfrak{z}$ -Feld auf einer abwickelbaren Fläche. Es wird noch eine Bemerkung gemacht über die Verbiegung einer unendlich langen, durch Verkleben zweier Halbzylinder gebildeten Rinne; dabei sind Halbzylinder solche zylindrische Flächenstücke, die durch Bewegung einer Halbgeraden erzeugt werden. — Die Beweise sind nur angedeutet.

Eduard Rembs.

Hohenberg, Fritz: Eine Verallgemeinerung der Lilienthalschen Flächenpaare, Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1951, Nr. 6, 129—131 (1951).

Bezeichnen  $f_\nu(z) = g_\nu(x, y) + i h_\nu(x, y)$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) drei analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen  $z = x + i y$  mit gemeinsamem Existenzbereich, so stellen die kartesischen Koordinaten  $q_I: x_\nu = g_\nu(x, y)$  und  $q_{II}: y_\nu = h_\nu(x, y)$  nach R. v. Lilienthal [J. reine angew. Math. 98, 131—147 (1885)] zwei Flächen  $\varphi_I, \varphi_{II}$  dar, bei denen in entsprechenden Punkten  $(x, y)$  1) die Tangentenebenen parallel, 2) die Gaußschen Krümmungen gleich und 3) entsprechende Bereiche flächengleich sind. Verf. verallgemeinert diese Lilienthalschen Flächenpaare, indem er bei reellem  $\lambda, \mu$  die  $\infty^2$  Flächen  $\varphi = \lambda \varphi_I + \mu \varphi_{II}$ :



$x_\nu = \lambda g_\nu(x, y) + \mu h_\nu(x, y)$ , studiert. Aus  $[\varphi_x \varphi_y] = (\lambda^2 + \mu^2) [\varphi_{Ix} \varphi_{Iy}]$ , also  $EG - F^2 = (\lambda^2 + \mu^2)^2 (E_I G_I - F_I^2)$  folgt, daß alle Flächen  $\varphi$  in entsprechenden Punkten  $(x, y)$  1) parallele Tangentenebenen, 2) proportionale Gaußsche Krümmungen haben, und ebenso 3) die Flächeninhalte entsprechender Bereiche proportional sind. — Die Bedingung  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  kennzeichnet  $\infty^1$  Flächen  $\varphi$ , die durch parallele Tangentenebenen unter Gleichheit der Gaußschen Krümmungen flächentreu aufeinander bezogen sind, und deren Schar die Lilienthalschen Flächen  $\varphi_I$  und  $\varphi_{II}$  stetig verbindet, wobei ihre Punkte Ellipsen mit der Mitte im Nullpunkt  $O$  und  $OP_I$ ,  $OP_{II}$  als konjugierten Durchmesser beschreiben. Faßt man die komplexen Größen  $z$  und  $\bar{z}$  als unabhängige Variable auf, so kann man schreiben  $\varphi$ :  $x_\nu = \frac{1}{2} [(\lambda - i\mu) f_\nu(z) + (\lambda + i\mu) \bar{f}_\nu(\bar{z})]$ . Die Flächen  $\varphi$  sind also Schiebflächen mit konjugiert komplexen Schiebkurvenpaaren. — Als Beispiel wird am Schluß der Fall  $f_1(z) = \cos z$ ,  $f_2(z) = \sin z$ ,  $f_3(z) = 0$  studiert. Karl Strubecker.

**Mishra, Ratan Shanker:** Modification in Sannia's theory of line congruences and some deductions. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **16**, 95—101 und türkische Zusammenfassg. 95 (1951).

Eine geradlinige Kongruenz kann definiert werden durch die Koordinaten  $x^i(u^\alpha)$  eines Punktes  $M$  der Bezugsfläche  $S$  und die Richtungscosinus  $\lambda^i(u^\alpha)$  des Komplexstrahls durch  $M$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 1, 2$ ). Bezeichnet  $G_{\alpha\beta} = \frac{\partial \lambda^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \lambda^i}{\partial u^\beta}$  den metrischen Fundamentaltensor der Einheitskugel der  $\lambda^i$ , bezeichnet weiter  $x^i_{,\alpha}$  die kovariante Ableitung bezüglich dieses Maßtensors des sphärischen Bildes der Kongruenz, setzt man ferner (Verabredung!) auch  $\partial \lambda^i / \partial u^\alpha = \lambda^i_{,\alpha}$ , und setzt man  $\mu_{\alpha\beta} = x^i_{,\beta} \cdot \lambda^i_{,\alpha}$ ,  $2 \xi_{\alpha\beta} = E^{\gamma\delta} (G_{\alpha\gamma} \mu_{\delta\beta} + G_{\beta\gamma} \mu_{\delta\alpha})$ , unter  $E^{\alpha\beta}$  den zu  $E_{\alpha\beta} = (\lambda^i_{,\alpha} \lambda^i_{,\beta} \lambda^i_{,\beta})$  konjugierten kontravarianten Tensor verstanden, so hat man die folgenden drei bisher in der differentiellen Liniengeometrie verwendeten Grundformen:  $f = G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ ,  $\vartheta = \mu_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ ,  $\varphi = \xi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ .  $f$  und  $\vartheta$  sind die K um m e r s c h e n quadratischen Formen,  $f$  und  $\varphi$  jene von S a n n i a. Es ist zu bemerken, daß 1. die Koeffizienten  $\mu_{\alpha\beta}$  der K um m e r s c h e n Form  $\vartheta$  i. a. nicht durch jene der Sanniaschen Formen ausgedrückt werden können, 2. dasselbe für die Eisenhartsche Bedingung  $G^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} = 0$  gilt, welche notwendig und hinreichend dafür ist, daß die Bezugsfläche  $S$  die Mittelfläche der Kongruenz ist, und 3. nur wenn die Bezugsfläche Mittelfläche ist, nach Sannia  $E^{\alpha\beta} (\xi_{\alpha\delta, \beta} - p_\alpha E_{\beta\delta}) = 0$  gilt, wo  $p_\alpha = \lambda^i \cdot x^i_{,\alpha}$  ist; ist die Bezugsfläche beliebig, so kann man  $p_\alpha$  nicht durch die Koeffizienten der Sanniaschen Formen ausdrücken. — Diese Schwierigkeiten können, wie Verf. zeigt, vermieden werden, wenn man  $\xi_{\alpha\beta}$  durch den nichtsymmetrischen Tensor  $\xi_{\alpha\beta} = E^{\gamma\delta} G_{\alpha\gamma} \mu_{\delta\beta}$  ersetzt. Es ist dann nämlich sofort  $\mu_{\delta\beta} = \xi_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} G^{\alpha\gamma}$ , und die Eisenhartsche Bedingung lautet  $\xi_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta} = 0$ . Ist endlich  $x^i_{,\alpha} = p_\alpha \lambda^i + \mu'_{\alpha} \lambda^i_{,\gamma}$  eine Tangentenrichtung der Koordinatenlinien, so lautet das Gegenstück der Sanniaschen Gleichung  $E^{\alpha\beta} [\xi_{\alpha\delta, \beta} - p_\alpha E_{\beta\delta}] = 0$ . — Als Anwendung seiner Formeln zeigt Verf., daß durch jeden Kongruenzstrahl zwei Regelflächen gehen, deren Striktionslinien auf der Bezugsfläche  $S$  liegen. Für sie ist die Drallsomme gleich der Summe der Hauptdralle des Kongruenzstrahls. Zum Schluß wird bewiesen, daß in der Normalenkongruenz einer Fläche  $S$  die Normalenflächen längs der Asymptotenlinien die einzigen sind, deren Striktionslinien auf  $S$  liegen. Karl Strubecker.

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

**Zalgaller, V. A.:** Die Variationen von Kurven längs fester Richtungen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **15**, 463—476 (1951) [Russisch].

Die Variation eines Streckenzuges in einer festen Richtung wird durch die Summe der orthogonalen Projektionen der einzelnen Strecken definiert. Dann wird die Variation einer rektifizierbaren Raumkurve  $K$  der Bogenlänge 1 als die obere Grenze der Variationen der einbeschriebenen Streckenzüge erklärt. Es sei ferner  $t(s)$  der Tangentialeinheitsvektor von  $K$  als Funktion der Bogenlänge  $s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ), und  $\mu(s)$  eine in  $(0, 1)$  erklärte integrierbare Funktion. Wir tragen von einem festen Punkt aus den Vektor  $R = \int_0^1 \mu(s) t(s) ds$  auf. Die Gesamtheit der Endpunkte der

Vektoren  $R$ , für die  $|\mu(s)| \leq 1$  ist, wird als Indikatrix  $I$  der Variation von  $K$  bezeichnet. Es wird gezeigt, daß  $I$  ein zentralsymmetrischer konvexer Körper ist, dessen Stützfunktion mit der Variation von  $K$  übereinstimmt. Es werden noch mehrere mit den obigen Begriffen zusammenhängende Sätze bewiesen, von denen folgender hervorgehoben sei: Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein konvexes Polyeder mit der Variationsindikatrix einer Raumkurve übereinstimmen soll, ist, daß die Flächen des Polyeders zentralsymmetrisch sind. In diesem Ergebnis ist ein bekannter Satz von A. D. Alexandroff enthalten, der besagt, daß ein konvexes Polyeder mit zentralsymmetrischen Flächen selbst zentralsymmetrisch ist.

László Fejes Tóth.

Stewart, B. M.: The two-area covering problem. Amer. math. Monthly 58, 394—403 (1951).

Es seien  $C_1$  und  $C_2$  zwei starr bewegliche einfach geschlossene Kurven, deren Schnittpunktszahl in jeder Lage der Kurven endlich ist. Es wird ein notwendiges Kriterium dafür angegeben, daß der Inhalt der Vereinigungsmenge der durch  $C_1$  und  $C_2$  begrenzten Gebiete minimal wird. Ferner wird gezeigt, daß im Falle eines Dreiecks und Kreises die extremale Lage der Gebiete durch das genannte Kriterium eindeutig festgesetzt wird.

László Fejes Tóth.

Bateman, Paul and Paul Erdős: Geometrical extrema suggested by a lemma of Besicovitch. Amer. math. Monthly 58, 306—314 (1951).

Es sei ein System  $S_n$  von  $n$  Punkten in der Ebene mit Mindestabstand 1 vorgegeben.  $r(n)$  bedeute den Radius eines um einen Punkt von  $S_n$  geschlagenen,  $S_n$  enthaltenden Kreises. Es wird u. a. gezeigt, daß  $r(20) > 2$  ausfällt. Hieraus folgt folgende Verschärfung eines von Besicovitch [Proc. Cambridge philos. Soc. 41, 103—110 (1945)] herrührenden Satzes: Einen kleinsten Kreis eines Systems von endlich vielen Kreisen, von denen keiner den Mittelpunkt eines anderen in seinem Innern enthält, können höchstens 18 Kreise des Systems schneiden. In einer nachträglichen Bemerkung wird auf eine Arbeit von E. F. Reifenberg (dies. Zbl. 33, 127) hingewiesen, die die genannten Ergebnisse enthält. Ferner wird bewiesen, daß der Durchmesser von  $S_7$  mindestens 2 ist.

László Fejes Tóth.

Hanner, Olof and Hans Rådström: A generalization of a theorem of Fenchel. Proc. Amer. math. Soc. 2, 589—593 (1951).

Im euklidischen Raum  $E^n$  sei eine Punktmenge  $M$  gegeben. Ein Punkt  $P \in E^n$  habe die  $k$ -Punkt-Eigenschaft bezüglich  $M$ ,  $P$  sei  $(k, M)$ , wenn  $k$  Punkte  $L_1, \dots, L_k \in M$  derart existieren, daß  $P$  ihrer konvexen Hülle  $H\{L_i\}$  angehört. Ist  $P(k, M)$ , so ist  $P \in H\{M\}$ . Ist jeder Punkt  $P \in M$   $(k, M)$ , so heißt  $M$  selbst  $(k, M)$ . Bekanntlich ist nach E. Steinitz jede Punktmenge  $M$  des  $E^n$   $(n+1, M)$ . W. Fenchel hat [Math. Ann. 101, 238—252 (1929)] gezeigt, daß  $M$   $(n, M)$  ist, wenn  $M$  zusammenhängend und kompakt ist. Diese Bedingungen sind teilweise überflüssig. Hier wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine kompakte Menge  $M$  abgeleitet dafür, daß ein Punkt  $(n, M)$  ist.  $M$  heißt konvex zusammenhängend (k. z.), wenn  $M$  mit jeder  $(n-1)$ -Ebene  $\pi$  einen nicht-leeren Durchschnitt hat, sobald auf beiden Seiten von  $\pi$  Punkte von  $M$  liegen. Dann ist jede kompakte  $M \subset E^n$  mit höchstens  $n$  k. z. Komponenten  $(n, M)$ . Eine kompakte  $M \subset E^n$  hat mehr als  $n$  k. z. Komponenten, wenn ein Punkt  $P \in H\{M\}$  nicht  $(n, M)$  ist.

Wilhelm Süss.

Hodges, jr., J. L.: An extremal problem of geometry. J. London math. Soc. 26, 311—312 (1951).

Es handelt sich um folgende Aufgabe von A. S. Besicovitch: In eine abgeschlossene, beschränkte konvexe Menge  $I$  in der Ebene sei ein Dreieck  $A$  größten Flächeninhalts einbeschrieben, dessen eine Seite eine gegebene Richtung hat; es ist die untere Grenze des Verhältnisses der Flächeninhalte  $|A|/|I|$  zu bestimmen. Verf. zeigt durch elementargeometrische Schlüsse: untere Grenze  $|A|/|I| \geq 3/8$ ; das Gleichheitszeichen gilt für ein reguläres Sechseck, wenn ein Seitenpaar des Sechsecks die gegebene Richtung hat.

Erika Pannwitz.

**Hammer, Preston C.: The centroid of a convex body.** Proc. Amer. math. Soc. **2**, 522—525 (1951).

The centroid of a plane convex region divides every chord in a ratio between  $\frac{1}{3}$  and  $\frac{2}{3}$ ; these bounds are attained for triangles, and for triangles only. An immediate consequence of this is an inequality first proved by B. H. Neumann (this. Zbl. **26**, 359). The author's proof generalises, to  $n$  dimensions, giving bounds  $1/(n+1)$  and  $n/(n+1)$  for the ratio; these bounds are attained for  $n$ -dimensional hypercones based on  $(n-1)$ -dimensional convex bodies. Similar proofs were given by P. Erdős 1940, unpublished) and W. Süss, this Zbl. **31**, 278. The author notes a slight error in one of Süss' statements, loc. cit.

Bernhard H. Neumann.

**Hammer, Preston C.: Convex bodies associated with a convex body.** Proc. Amer. math. Soc. **2**, 781—793 (1951).

Continuing his investigation of convex bodies (cf. the preceding review), the author defines to every closed convex region  $C$  in the plane a family of „associated“ convex regions  $C(r)$ . If  $r \leq 1$ , then  $C(r)$  is the intersection of all homothetic images of  $C$  with ratio of homothety  $r$  and centre of homothety on the boundary of  $C$ . If  $r \geq 1$ , then  $C(r)$  is the union of the corresponding homothetic images. When  $r = 1$ , the two definitions give the same result,  $C(1) = C$ . The associated sets  $C(r)$  are empty for  $r < r^*$  where  $r^*$  is the minimum for variable point  $X$  of the maximum for variable chord  $PQ$  through  $X$  of the ratio of  $XQ$  to  $PQ$ ; and  $C(r^*)$  consists of only one point. When  $r < 1$ ,  $C(r)$  consists of those points in  $C$  which divide all chords in a ratio  $\leq r$ . If  $r > 1$  and we put  $C(r) = C'$ , then  $C = C'(r')$  where  $r$  and  $r'$  are related by  $2rr' - r - r' = 0$ . If the same is true for all  $r$  with  $r^* < r \leq 1$ , the region has a centre, and conversely. Otherwise there is a least value of  $r$ , at most 1, for which  $C = C'(r')$  and  $C' = C(r)$  with  $2rr' - r - r' = 0$ . Then  $C'$  is irreducible, i.e. the corresponding least value for it equals 1. The principal tool is the family of essential diameters of  $C$ . This contains every diameter such that the (parallel) lines of support of  $C$  which it joins have only a single point in common with  $C$ ; and every diameter through the intersection of the diagonals of the trapezium formed by parallel line segments contained in the boundary of  $C$ . There is exactly one essential diameter in every direction, and it depends continuously on the direction. The area swept out by them as they turn through an angle  $\pi$  is least possible among all families of diameters depending continuously and monotonously on the direction. In the case of triangles this area is three times the area of the region. The author notes but does not solve the problem whether triangles are characterized by this property. Generalisations to more than two dimensions are adumbrated.

Bernhard H. Neumann.

**Roth, K. F.: On a problem of Heilbronn.** J. London math. Soc. **26**, 198—204 (1951).

Es liege in der Ebene ein abgeschlossener, konvexer Bereich  $K$  vom Inhalt  $m > 0$  und es sei (1)  $\Delta_n(K) = \frac{1}{m} \sup_{x,y,z} \left( \min_{P_x, P_y, P_z} \Delta_{P_x P_y P_z} \right)$ . Dabei ist das sup über alle Verteilungen  $D(n)$  von  $n$  Punkten  $P_1, \dots, P_n$  ( $n \geq 3$ ) in  $K$  zu nehmen,  $P_x, P_y, P_z$  sind voneinander verschiedene Punkte von  $D(n)$  und  $\Delta ABC$  ist der Inhalt des Dreiecks  $ABC$ . Die obere Grenze wird angenommen, da  $K$  abgeschlossen ist. Es ist leicht zu sehen, daß (1) ein  $O(n^{-1})$  ist, denn verbinden wir z. B.  $P_1$  mit  $P_2, \dots, P_n$ , so erhalten wir  $n-2$  nicht übereinandergreifende Dreiecke, deren Gesamtinhalt  $\leq m$  ist. Heilbronn hat die Vermutung ausgesprochen, daß (1) sogar ein  $O(n^{-2})$  ist und Erdős (dessen Beweis hier zum erstenmal publiziert ist), hat gezeigt, daß jedenfalls nicht die Abschätzung  $o(n^{-2})$  gilt. Verf. zeigt nun, daß  $\Delta_n(K) = O(n^{-1}(\log \log n)^{-\frac{1}{2}})$  ist. Man sieht sofort, daß man dabei  $K$  als Dreieck annehmen kann, auf dessen Gestalt es nicht ankommt, da dann (1) eine affine Invariante ist. Der Beweis ist (wie zu erwarten) nicht leicht. Die Vermutung selbst bleibt offen.

Edmund Hlawka.

## Topologie:

**Nöbeling, Georg: Über eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffes.** S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1950, 133—141 (1951).

The purpose of this paper is to show how the notion of Filter due to H. Cartan (see N. Bourbaki, Topologie générale, Paris 1940, Ch. I, this Zbl. **26**, 431) is a



generalization of the classical notion of sequence as well as of the notion of sequence in the sense of Moore-Smith. The fundamental notions are explained summarily, but with a terminology which differs from that of N. Bourbaki. A „Filterbasis“ for instance is called a Raster and an element of the filter generated by a Raster  $R$  is said to contain „ultimately all“ the points of the set  $D$  over which  $R$  is defined. Also a set of  $D$  which intersects every elements of the Raster  $R$  is said to contain „konfinal“ many points of  $D$ . This notion itself has not been introduced by N. Bourbaki who uses instead the notion of „point adhering to a filterbasis“, slightly different. — The most interesting part of this paper is its last paragraph in which it is shown how the notion of filter makes it easy to generalize the „diagonalprocess“ whereas the theory of Moore-Smith does not always make room for it. The author does not mention the term of „ultrafilter“ which is the one used by N. Bourbaki to denote the same notion. This notion which he has applied so admirably to the proof of Tychonoff theorem was obviously introduced to generalize the classical diagonalprocess; the fact, that it allows such a generalization is not mentioned by N. Bourbaki and the explicit mention of it by the author is a welcome comment upon Bourbaki's text.

*C. Racine.*

**Choquet, Gustave:** Difficultés d'une théorie de la catégorie dans les espaces topologiques quelconques. C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 2281—2283 (1951).

Par contre-exemples variés l'A. fait voir dans quelle mesure les espaces métriques complets constituent un champ naturel pour la théorie de la catégorie au sens de Baire. Pour bâtir une théorie plus générale, on pourrait conserver la définition de Baire et chercher des espaces aussi naturels que possible dans lesquels les propriétés essentielles de catégorie seraient encore valable; cette voie ne se montre pas féconde. Ou bien on pourrait partir d'une espèce importante d'espaces (compacts par exemple) et définir alors d'une façon convenable des ensembles de première catégorie; par exemple: „Dans  $E$  compact métrique on appelle  $F_s$  toute réunion d'une famille  $F$  totalement ordonnée par inclusion d'ensembles fermés de  $E$ . Un  $F_s$  sera dit de première catégorie au sens large si tout ensemble  $F_i$  de la famille  $F$  est non dense sur  $E$ “. — Or, si  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$  l'A. construit un espace compact de première catégorie au sens large sur soi-même.

*Djuro Kurepa.*

**Smirnov, Ju. M.:** Über Systeme von offenen Mengen in topologischen Räumen. Uspechi mat. Nauk **6**, Nr. 4 (44), 204—206 (1951) [Russisch].

This is a brief summary of a lecture at the topological conference in Moscow, 1950. — A cardinal  $m$  is said to be the combinatorial weight of a space  $R$  if it is the least cardinal of a set  $\Sigma$  of finite open coverings of  $R$  with the property: for every finite open covering  $\omega^*$  of  $R$ , there is an  $\omega \in \Sigma$  which is a refinement of  $\omega^*$ . A regular space is compact if and only if the combinatorial weight of  $R$  is  $\leq \aleph_0$  (Th. 1). The combinatorial weights of a normal space  $R$  and of its maximal bicomact extension  $\beta R$  are equal (Th. 2). — Let  $G(X)$  denote the class of all open subsets of a space  $X$ . A transformation  $\varphi$  of  $G(Y)$  into  $G(X)$  is said to be a homomorphism of  $Y$  into  $X$  if (1)  $\varphi(I \cap I') = \varphi(I) \cap \varphi(I')$  for all open  $I, I' \subset Y$ ; (2)  $\varphi(0) = 0$ . If, in addition,  $\varphi(I) = 0$  implies  $I = 0$ , then  $\varphi$  is called a homomorphism of  $Y$  onto  $X$ . If, for every finite open covering  $\{I_i\}$  of  $Y$ , the set  $\{\varphi(I_i)\}$  is a covering of  $X$ , then  $\varphi$  is said to be normal. For every set  $M \subset Y$ , let  $\varphi(M)$  be the intersection of all sets  $\varphi(I)$  where  $M \subset I \in G(Y)$ . A homomorphism is minimal if  $\varphi(Y - I) = X - \varphi(I)$  for  $I \in G(Y)$ . Each homomorphism  $\varphi$  of  $Y$  into  $X$  determines uniquely a mapping  $f_\varphi$  of a set  $X_\varphi \subset X$  into  $Y$  such that  $f_\varphi^{-1}(y) = \varphi(\{y\})$ . Conversely, each continuous mapping  $f$  of  $X$  into  $Y$  determines a homomorphism  $\varphi_f$  of  $Y$  into  $X$ :  $\varphi_f(I) = f^{-1}(I)$  for  $I \in G(Y)$ . Let  $\varphi$  be a homomorphism of a bicomact space  $Y$  into  $X$ ; the mapping  $f_\varphi$  is continuous if and only if  $\varphi$  is normal (Th. 3). Let  $\varphi$  be a normal homomorphism of a space  $Y$  into a bicomact space  $X$ ; then  $f_\varphi(X) = Y$  if and only if  $\varphi$  is a homomorphism onto  $X$  (Th. 4). If  $Y$  is bicomact, the relation  $S(\varphi) = f_\varphi$  establishes a one-to-one correspondance  $S$  between the class of all minimal homomorphisms  $\varphi$  of  $Y$  into  $X$  and the class of all continuous mappings  $f$  of  $X$  into  $Y$  (Th. 6). — Let  $\bar{X} \subset X^*$ ,  $\bar{Y} \subset Y^*$ , and let  $\varphi$  be a homomorphism of  $Y$  into  $X$ . The extension  $\varphi^*$  of  $\varphi$  is the homomorphism of  $Y^*$  into  $X^*$  defined as follows:  $\varphi^*(I) =$  the greatest open set  $U \subset X^*$  such that  $U \cap X = \varphi(I \cap Y)$ . Let  $Y^*$  be bicomact; a mapping  $f$  of  $X$  into  $Y$  can be extended to a continuous mapping  $f^*$  of  $X^*$  into  $Y^*$  if and only if  $\varphi_f$  has a normal extension (Th. 5).

*Roman Sikorski.*

**Freudenthal, H.: Kompaktisierungen und Bikomptisierungen.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 184—192, Indagationes math. 13, 184—192 (1951).

According to L. Zippin (this Zbl. 11, 275), a Hausdorff space is called semibicompact if it possesses an open base, whose members have bicompact boundaries. The main theorem proved is: A Hausdorff space  $R$  can be imbedded in a bicompact Hausdorff space  $R^*$  with  $\dim(R^* - R) = 0$ , if and only if  $R$  is semibicompact. If the 2nd countability axiom holds in  $R$ , then bicomactness may be replaced by compactness. 0-dimensionality means here the existence of an open base, whose members have empty boundaries. The paper reviewed was written in 1942 and is, as the author remarks, related to another of the author's papers on „ends“ [Ann. of Math., II. Ser. 43, 261—279 (1942)].  
Tudor Ganea.

**Smirnov, Ju. M.: Über normal gelegene Mengen normaler Räume.** Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 173—176 (1951) [Russisch].

Die Menge  $M$  heiße „normal gelegen“ im Raum  $R$ , wenn es zu jeder Umgebung  $OM$  von  $M$  in  $R$  eine Menge  $H$  vom Typus  $F_\sigma$  in  $R$  gibt, so daß:  $M \subseteq H \subseteq OM$  gilt. Verf. beweist u. a.: 1. Jede in einem normalen Raum normal gelegene Menge ist normal. 2. Jede final-kompakte Menge ist in einem beliebigen, sie umfassenden Raum normal gelegen. 3. Jede in einem final-kompakten Raum normal gelegene Menge ist selbst final-kompakt. 4. Für jede in einem normalen Raum  $R$  normal gelegene Menge  $M$  gilt:  $\dim M \leq \dim R$ .  
Walter Thimm.

**Suzuki, Jingoro: On the metrization and the completion of a space with respect to a uniformity.** Proc. Japan Acad. 27, 219—223 (1951).

In three notes on the simple extension of a space with respect to a uniformity (see this Zbl. 42, 412 and the following review), K. Morita has shown that the completion of such a space requires generally a transfinite number of extensions. In this paper the author defines a Cauchy family more restrictive than the one used by K. Morita for his successive extensions. If the uniformity is  $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$  and  $\{P_\lambda \mid \lambda \in A\}$  is a family of subsets of the space  $R$ , this family is a Cauchy family in the sense of the author if  $\alpha \in \Omega \rightarrow \lambda \in A$ ,  $\beta \in \Omega$  such that  $S^2(P_\lambda, \mathcal{U}_\beta) \subset U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ . In the sense of K. Morita, it is a Cauchy family if  $S(P_\lambda, \mathcal{U}_\beta) \subset U_\alpha$  only. — If a simple extension of  $R$ , denoted by  $R^+$ , is obtained by using exclusively his Cauchy families, the author shows that  $R^+$  is the completion of  $R$ . — In a first section, the author proves that if the uniformity is a regular  $T$ -uniformity agreeing with the topology (for the definitions see Morita's first note), if  $R$  is a  $T_1$ -space and if the uniformity consists of a countable number of open coverings, then  $R$  is metrizable. This leads to answer in the affirmative a question put by L. W. Cohen, namely whether a Hausdorff space is metrizable when it satisfies the first denumerability axiom and the following one: to each  $p \in R$  and to every positive integer  $n$  correspond positive integers  $m(n)$  and  $k(p, n)$  such that  $V_k(q) \cap V_m(p) \neq \emptyset$  implies  $V_k(q) \subset V_n(p)$ .

C. Racine.

**Morita, Kiiti: On the simple extension of a space with respect to a uniformity.** II, III. Proc. Japan Acad. 27, Nr. 3, 130—137, Nr. 4, 166—171 (1951).

Part I. see this Zbl. 42, 412.

II. First, the space  $R^*$  defined in the first note is characterized. In particular it is shown that it is a space  $S$  such that  $R \subset S$ ,  $S - R - G$  is open if  $G$  is open in  $R$ , each point of  $S - R$  is closed and  $\mathcal{V}_\alpha = \{S - R - \bar{U}; U \in \mathcal{U}_\alpha\}$  defines an open covering of  $S$  when  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$  denotes the uniformity of  $R$ . Next, if  $F$  is a closed set in  $R$ , the closure of  $F$  in  $R^*$  is shown to be  $F = F + \bigcap_\alpha (S(F, \mathcal{U}_\alpha^*) \cap (R^* - R))$  and it is shown that, under certain general conditions, if  $G_\lambda$  denotes a family of open sets in  $R$ :  $(\Sigma G_\lambda)^* = \Sigma G_\lambda^*$ . — Then an interesting result is proved namely that the uniformly continuous mapping  $f$  of a space  $R$  with a given uniformity into a  $T_1$ -space (separated space)  $S$  with a regular uniformity agreeing with the topology (Cf. Paper I) can be extended to a uniformly continuous mapping  $f^*$  of  $R^*$  into  $S^*$ . — The end of the paper is devoted to a generalization of Shani'n's theory [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 38, 6—9, 110—113, 154—156 (1943)] which



infortunately was only accessible to the author through reviews. This theory is concerned with the conditions under which  $R^*$  is compact (bicomact in the sense of Alexandroff-Hopf). There must be a basis  $G$  of open sets such that  $R \in G$  and the uniformity must be the family of all the finite open coverings of  $R$  by sets of  $G$ . Some properties of the compact extension of a  $T$ -space (one in which  $A + B = A \cup B$ ) are established. The last paragraph shows how easily these results lead to the compactification theories of Wallman and Čech which are shown to be identical when  $R$  is a completely regular  $T$ -space in which every finite covering is normal.

III. In this third note the author discusses the completion of a space with respect to a uniformity in the general case. He had shown on an example, in his first note, that the simple extension  $R^*$  of  $R$  is not always complete with respect to its uniformity. A second example of the same fact — very little different from the first one — is given in the present note. It is shown however that a complete extension of  $R$  may be obtained by a process of transfinite induction. The complete space  $\tilde{R}$  so obtained is characterized in theorem 1. — Next the author shows that any uniformly continuous mapping  $f$  of a space  $S$  with a uniformity into a separated space  $R$  with a regular (see note I) uniformity agreeing with the topology can be extended to a uniformly continuous mapping  $F$  of  $\tilde{S}$  into  $\tilde{R}$ . — Then some interesting properties of mappings of subspaces of  $S$  into  $R$  and of their extensions are established. In particular it is proved that a continuous mapping of a subspace  $X$  of a  $T$ -space  $S$  into a complete metric space  $R$  can be extended to a continuous mapping of a  $G_\delta$ -set  $X_0 \supset X$  into  $R$ , where  $X$  is assumed to be dense in  $S$ . The author points out that the famous theorem of Lavrentieff follows from this proposition. — The end of the paper is about a condition under which a separated space is complete with respect to a regular  $T$ -uniformity (see note I) agreeing with the topology. As an application a theorem of Čech is proved, namely that a metrizable space is complete with respect to some metric if and only if that space is a  $G_\delta$ -set in its Čech compactification. C. Racine.

Myers, S. B.: Functional uniformities. Proc. Amer. math. Soc. 2, 153—158 (1951).

L'A. étudie la possibilité de définir une structure uniforme (s. u.) par des familles d'ensembles équi-continus de fonctions réelles.  $X$  est un espace topologique complètement régulier,  $J$  une famille d'ensembles  $F$  de fonctions réelles continues sur  $X$  possédant les propriétés: a)  $J$  sépare  $X$ , c'est-à-dire pour tout  $P \in X$  et tout voisinage  $V(P)$  de  $P$ , il existe  $F \in J$  et  $\delta > 0$  tels que  $|f(P) - f(Q)| < \delta$  pour tout  $f \in F$  implique  $Q \in V(P)$ ; b) tout  $F \in J$  est équi-continu.  $J$  définit sur  $X$  une s. u. dont une base des entourages est constituée des ensembles  $V(\delta, F)$  de  $X^2$  définis par  $V(\delta, F) = \{P, Q \in X \mid |f(P) - f(Q)| < \delta \text{ pour tout } f \in F\}$ . L'A. dit d'une s. u. ainsi définie qu'elle est fonctionnelle (s. u. f.). Elle est en outre bornée, si pour chaque  $F \in J$ , tout  $f \in F$  est bornée. Théorème: „Toute s. u. sur  $X$  est isomorphe à une s. u. f. bornée“. (Corollaire: la plus fine de toutes est déterminée par la famille de tous les ensembles équi-continus de fonctions réelles bornées). L'A. dit qu'une s. u. f. est faible si tous les  $F$  sont finis. Théorème: „Les structures uniformes précompactes sont identiques aux s. u. f. faibles“. Un espace est pseudo-compact si toute s. u.  $y$  est précompacte. Théorème: „ $X$  est pseudo-compact si et seulement si pour tout ensemble  $F$  de fonctions réelles bornées sur  $X$  et tout  $\delta > 0$ , il existe un nombre fini de fonctions réelles bornées continues  $f_1, \dots, f_m$  et un  $\delta' > 0$  tels que  $|f_i(Q) - f_i(P)| < \delta'$ ,  $i = 1, \dots, m$  entraîne  $|f(Q) - f(P)| < \delta$  pour tout  $f \in F$ . Théorème: „Pour toute s. u.  $U$  sur  $X$ , il existe une s. u. précompacte  $U'$ , plus fine que  $U$  est donnant le même ensemble de fonctions réelles bornées uniformément continues. Le complété  $\bar{X}$  de  $X$  relativement à  $U'$  est une compactification de  $X$  telle que les seules fonctions réelles continues sur  $X$  qui peuvent être étendues à  $\bar{X}$  sont celles qui sont uniformément continues pour  $U'$ “. André Revuz.

Ellis, David: Notes on abstract distance geometry. II. Implications of basality in generalized semimetric spaces. Monatsh. Math. 55, 185—187 (1951).

Ein Distanzraum  $S$  (vgl. D. Ellis, dies. Zbl. 42, 413) heißt verallgemeinert semimetrisch, wenn die Distanz  $d(x, y)$  symmetrisch ist und wenn  $d(x, y) = 0$  nur für  $x = y$ . Ferner heißt  $S$  basal, wenn die Gleichung  $d(p, x) = d_0$  für beliebiges  $p \in S$  und  $d_0 \in G$  genau eine Lösung  $x \in S$  besitzt.  $G$  bezeichnet den Wert-



bereich von  $d$ . Die Bewegungsgruppe heißt einfach transitiv, wenn jedes  $x \in S$  in jedes  $y \in S$  durch eine Bewegung (d. h. durch eine kongruente Abbildung des ganzen Raumes  $S$  auf sich) überführbar ist.  $S$  besitzt freie Beweglichkeit, wenn je zwei kongruente Teilmengen von  $S$  durch eine Bewegung ineinander überführbar sind. — Es sei  $S'$  jetzt echte Teilmenge von  $S$ . Es heißt  $S$  metrisch irreduzibel, wenn  $S$  zu keinem  $S'$  kongruent ist. Es heißt  $S$  distanzial irreduzibel, wenn für kein  $S'$  gilt:  $D(S) = D(S')$ , wobei  $D(S)$  die Menge aller  $d' \in G$ , für welche  $x, y \in S$  existieren mit  $d(x, y) = d'$ . Es heißt  $S$  irreduzibel über  $G$ , wenn  $D(S) = G$ . — Es wird bewiesen: Bei verallgemeinert semimetrischem, basalem  $S$  gilt: Die Bewegungsgruppe ist einfach transitiv, es besitzt  $S$  freie Beweglichkeit, es ist  $S$  metrisch und distanzial sowie über  $G$  irreduzibel.

Otto Haupt.

Kelly, L. M.: Distance sets. Canadian J. Math. 3, 187—194 (1951).

Définitions et Notations:  $\mathfrak{E}$ : espace distancié.  $pq$ : distance de  $p$  à  $q$ .  $D(\mathfrak{E})$ : ensemble des distances mutuelles des points de  $\mathfrak{E}$ .  $N$ : ensemble de nombres non négatifs comprenant 0.  $a(N) = \inf. (N - \{0\})$ . Réalisation de  $N$ : espace distancié admettant  $N$  comme ensemble de distances.  $\mathfrak{N}$ : ensemble  $N$  lui-même où  $pq = \max(p, q)$  si  $p \neq q$ ,  $= 0$  si  $p = q$ .  $(D(\mathfrak{N}) = N)$ .  $N$  est dit (1) irréductiblement  $n$ -dimensionnel (relativement aux espaces euclidiens) s'il est réalisable dans l'espace euclidien  $\mathfrak{E}_n$  mais non dans  $\mathfrak{E}_{n-1}$ , (2) proprement  $n$ -dimensionnel si toute réalisation de  $N$  est plongeable isométriquement dans  $\mathfrak{E}_n$  mais non dans  $\mathfrak{E}_{n-1}$ , (3) rigide vis-à-vis de  $\mathfrak{E}$  si  $N$  est réalisable dans  $\mathfrak{E}$  et si deux réalisations quelconques de  $N$  dans  $\mathfrak{E}$  sont isométriques. Suite isocèle: Suite  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  de nombres non négatifs tels que  $a_0 = 0$  et  $a_{i+1} > 2a_i$ . Ensemble isocèle: sous-ensemble d'une suite isocèle contenant 0. Théorèmes: (T1): Si  $N$  est dénombrable,  $\mathfrak{N}$  est plongeable isométriquement dans l'espace de Hilbert  $\mathfrak{H}$ . (T2): Tout ensemble de  $n$  nombres positifs et 0 est réalisable dans  $\mathfrak{E}_n$ . (T3): Aucun ensemble isocèle comprenant  $n+2$  éléments n'est plongeable dans  $\mathfrak{E}_n$ . (T4): Aucun  $N$  fini n'est propre vis-à-vis des espaces euclidiens. (T5): Aucun  $N$  dénombrable tel que  $a(N)$  soit positif n'est rigide vis-à-vis de  $\mathfrak{H}$ . Idée des démonstrations: Celles-ci sont inspirées principalement de K. Menger et S. Piccard.

(T1 et T2): Le signe du déterminant  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (a_i a_j)^2 \end{vmatrix}$  où  $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_k$ ,  $a_i a_j = \max(a_i, a_j)$  si  $i \neq j$ ,  $a_i a_i = 0$ , est  $(-1)^{k+1}$  et ainsi les conditions d'immersion dans  $\mathfrak{E}_n$  et  $\mathfrak{H}$  dues à Menger sont vérifiées. (T3) est établie par induction, utilisant le lemme suivant: Si  $\mathfrak{E}$  est fini et  $D(\mathfrak{E})$  isocèle,  $\mathfrak{E}$  est décomposable en deux ensembles non vides  $P$  et  $Q$  tels que la distance de tout point de  $P$  à tout point de  $Q$  soit égale au diamètre de  $\mathfrak{E}$ . (T4 et T5):  $\mathfrak{N}^*$  désigne l'espace  $\mathfrak{N}$  accru d'un élément  $0'$  tel que  $p0' = p$  si  $p \neq 0'$  et  $p \neq 0$ ,  $0'0 = a(N)$ ,  $0'0' = 0$ .  $D(\mathfrak{N}^*) = D(\mathfrak{N})$ , mais deux modèles euclidiens pour  $\mathfrak{N}$  et  $\mathfrak{N}^*$  ont des dimensions différentes.

Christian Pauc.

Bing, R. H.: An equilateral distance. Amer. math. Monthly 58, 380—383 (1951).

Ein metrischer Raum  $(E, r)$  ist mit einem äquilateralen Abstand  $r(x, y)$  ausgestattet, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y$  einen Punkt  $z$  des Raumes  $E$  gibt mit  $r(x, y) = r(x, z) = r(y, z)$ . Es wird bewiesen: Jeder Bogen kann äquilateral metrisiert werden.

Georg Aumann.

Bokštejn, M. F.: Die Dimension des topologischen Produktes. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 4 (44), 197—199 (1951) [Russisch].

Verf. berichtet — ohne Beweise — über seine Methode, die (Homologie-)Dimension des topologischen Produktes zweier Bikompakta aus den Dimensionen der Komponenten zu berechnen.  $V$ -Dimension des Bikompaktums  $A$  für den Koeffizientenbereich  $G$  ( $G$  = irgendeine additive abelsche Gruppe) ist die größte Zahl  $q$ , für welche eine offene Teilmenge  $U \subset A$  existiert, deren  $q$ -dimensionale Cohomologie-

gruppe mit  $G$  als Koeffizientenbereich nicht trivial ist. Es gibt abzählbar unendlich viele Koeffizientenbereiche, derart daß es genügt, die  $V$ -Dimensionen bezüglich dieser Koeffizientenbereiche anzugeben, um sie für alle anderen Koeffizientenbereiche berechnen zu können. Diese besonderen Koeffizientenbereiche sind: 1) die additive Gruppe  $R$  aller rationalen Zahlen, 2) die additive Gruppe  $R_p$  aller rationalen Zahlen, deren Nenner ohne den Primzahlfaktor  $p$  geschrieben werden kann, 3) die zyklische Gruppe  $C_p$  der Primzahlordnung  $p$ , 4) die additive Gruppe  $Q_p$  aller rationalen Zahlen mod 1, deren Nenner eine Potenz der Primzahl  $p$  sind. Es genügt also, die Formeln für die  $V$ -Dimensionen mit diesen Koeffizientenbereichen anzugeben. An Stelle der  $V$ -Dimension führt Verf. andere Invarianten ein, die sich für das topologische Produkt einfacher aus den Invarianten der Komponenten bestimmen lassen, vgl. die in dies. Zbl. 34, 255 referierte Arbeit des Verf.

Walter Thimm.

**Boltjanskij, V.: Über den Additionssatz der Dimensionen.** Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 3 (43), 99—128 (1951) [Russisch].

Verf. gibt eine ausführliche und sehr klare Darstellung seiner und Pontrjagins Beispiele über die (Homologie)Dimension des topologischen Produktes von zwei Kompakta (dies. Zbl. 35, 387). In einem Anhang beweist er den folgenden Satz von Pontrjagin: Wenn  $p$  eine Primzahl ist und  $\Phi$  und  $\Psi$  endlich dimensionale Kompakta sind, so gilt:  $dp(\Phi \times \Psi) = dp(\Phi) + dp(\Psi)$ ; hier wird mit  $dp$  die (Homologie-)Dimension mod  $p$  bezeichnet.

Walter Thimm.

**Keldyš, Ljudmila: Stetige Abbildung des Segments auf den  $n$ -dimensionalen Kubus.** Mat. Sbornik, n. Ser. 28 (70), 407—430 (1951) [Russisch].

Die Arbeit enthält die Beweise der von der Verf. (dies. Zbl. 35, 386, erstes Referat) angekündigten Ergebnisse. Bemerkung zum Referat der zitierten Arbeit: Statt des Ausdrucks: „nicht zusammenführende“ Abbildung ist der Ausdruck: „irreduzible“ Abbildung üblich.

Walter Thimm.

**Bing, R. H.: Concerning hereditarily indecomposable continua.** Pacific J. Math. 1, 43—51 (1951).

**Bing, R. H.: Snake-like continua.** Duke math. J. 18, 653—663 (1951).

Ein (kompaktes) Kontinuum  $K$  eines metrischen Raumes  $S$  heißt unzerlegbar, wenn es nicht als Vereinigung zweier echter Teilkontinuen darstellbar ist.  $K$  heißt erblich unzerlegbar, wenn auch jedes Teilkontinuum unzerlegbar ist. Knaster [Fundamenta Math. 3, 247—286 (1922)] hat ein erblich unzerlegbares Kontinuum in der Ebene angegeben. Verf. gibt weitere Beispiele an und zeigt, daß es in der Ebene unabzählbar viele, paarweise nicht homöomorphe, erblich unzerlegbare Kontinuen gibt.  $K$  heißt schlangenartig, wenn  $K$  für jedes natürliche  $n$  durch endlich viele offene Mengen  $D_1^n, \dots, D_m^n$  mit Durchmessern  $\leq n^{-1}$  derart überdeckt werden kann, daß  $D_i^n \subseteq D_j^n$  dann und nur dann nicht fremd ist, wenn  $i$  gleich  $j-1$ ,  $j$  oder  $j+1$  ist. Verf. nennt  $K$  einen Pseudo-Bogen, wenn die  $D_i^n$  außerdem so gewählt werden können, daß gilt: 1. es existiert in  $K$  ein Punkt  $p$  derart, daß  $p \in D_1^n$  und  $q \in D_m^n$  für jedes  $n$  gilt; 2. jedes  $D_i^{n+1}$  ist eine kompakte Teilmenge eines  $D_h^n$ ; 3. ist  $D_i^{n+1} \subseteq D_h^n$  und  $D_j^{n+1} \subseteq D_k^n$  mit  $k-h > 2$ , so existieren  $r$  und  $s$  mit  $i < r < s < j$  oder  $i > r > s > j$  derart, daß  $D_s^{n+1} \subseteq D_{h+1}^n$  und  $D_r^{n+1} \subseteq D_{k-1}^n$  gilt. Verf. zeigt: Jedes schlangenartige  $K$  kann topologisch in die Ebene  $\mathcal{E}$  eingebettet werden; man kann in  $E$  sogar unabzählbar viele, zu  $K$  homöomorphe Bilder von  $K$  angeben, die paarweise fremd sind. Je zwei schlangenartige, erblich unzerlegbare  $K$  sind homöomorph. Ist  $K$  schlangenartig bzw. ein Pseudobogen und ist  $K$  stetig und monoton abgebildet auf ein  $K'$ , so ist auch  $K$  schlangenartig bzw. ein Pseudobogen. Ist  $S$  ein Cartesischer oder der Hilbertsche Raum, so ist die Menge aller Pseudobogen von 2. Kategorie im metrischen Raum  $T$  aller  $K \subseteq S$  (dabei sei  $T$  metrisiert durch die Hausdorffsche Abweichung). Weiter untersucht Verf. (erblich) zerlegbare, schlangenartige  $K$ , Endpunkte schlangenartiger  $K$ , usw.

Georg Nöbeling.

**Bing, R. H.:** Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua. Trans. Amer. math. Soc. **71**, 267—273 (1951).

Verf. zeigt die Existenz unendlich-dimensionaler, erblich unzerlegbarer Kontinuen im Hilbertschen Fundamentalquader und  $n$ -dimensionaler, erblich unzerlegbarer Kontinuen im Euklidischen  $E_{n+1}$ . Außerdem wird gezeigt, daß jedes  $(n + 1)$ -dimensionale Kontinuum ein  $n$ -dimensionales, erblich unzerlegbares Kontinuum enthält.

*Georg Nöbeling.*

**Ursell, H. D. and L. C. Young:** Remarks on the theory of prime ends. Mem. Amer. math. Soc., Nr. 3, 29 p. (1951).

Compléments et prolongement de résultats classiques, dûs à Carathéodory, concernant les éléments constitutifs de la frontière d'un domaine plan simplement connexe  $D$  (Primendentheorie). Le Mémoire débute par une présentation succincte de cette théorie, où les notions fondamentales de bout premier (Primenden), de points principaux et des faits essentiels qui s'y rattachent sont mis en lumière. Les compléments que leur apportent les AA., consistent premièrement à distinguer, dans tout bout premier  $X$  de  $D$ , deux „ailes“ (wings):  $x_1$  et  $x_2$ , formées par les points limites des chemins situés, respectivement, à gauche et à droite d'un chemin principal correspondant à  $X$ . La partie commune de  $X_1$  et  $X_2$  comprend, au moins, tous les points principaux de  $X$ . Il en résulte un ordre de „priorité“ entre les points d'une même aile, où les points principaux ont toujours priorité sur les autres. Sont ensuite étudiés divers rapports entre les bouts premiers des différents domaines déterminés par la frontière de  $D$ , puis une extension de la notion de point frontière multiple de Carathéodory. — Des deux „appendices“ le premier donne les énoncés de quelques résultats connexes dûs à Ursell, le deuxième des démonstrations de propositions connues utilisés par les AA. dans le présent Mémoire. *Simion Stoilow.*

**Swingle, Paul M.:** The closure of types of connected sets. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 178—185 (1951).

All known examples in the plane of widely connected sets, of finitely-containing connected sets, and of biconnected sets without dispersion point are such that their closures are indecomposable continua. The author proves that (1) any plane connected domain  $D$  contains a widely connected set which is simultaneously biconnected without dispersion point, and such that  $B = \bar{D}$ ; (2) every plane connected domain  $D$  contains a widely connected subset  $F$  which is simultaneously a finitely-containing connected set, and such that  $\bar{F} = \bar{D}$ . The subject of the final part of the paper is the study of indecomposable connexes and of indecomposable connexes. A connexe  $M$  is said to be indecomposable if, for every decomposition  $M = H + K$  into two mutually exclusive subconnexes  $H$  and  $K$ , either  $H$  or  $K$  is dense in  $M$ .

*Roman Sikorski.*

**Radó, Tibor:** On identifications in singular homology theory. Rivista Mat. Univ. Parma **2**, 3—18 (1951).

L'A. définit l'homologie singulière d'un espace topologique  $X$  à partir des applications continues de points de l'espace de Hilbert; dans ce complexe abstrait  $R$ , deux cellules seront identifiées si et seulement si les points coïncident dans l'espace de Hilbert et si les applications sont confondues. Il montre que les groupes d'homologie de ce complexe sont les mêmes que ceux du complexe abstrait où l'on identifie des simplexes qui se déduisent l'un de l'autre par une transformation affine de l'espace de Hilbert, et où une permutation impaire des sommets revient à changer le signe. Cette équivalence est établie en rattachant le complexe abstrait  $R$  au complexe abstrait de Eilenberg-Steenrod (où chaque simplexe singulier à  $p$  dimensions est l'image d'un simplexe fondamental à  $p$  dimensions choisi une fois pour toutes).

*Guy Hirsch.*



**Radó, Tibor:** An approach to singular homology theory. *Pacific J. Math* 1, 265—290 (1951).

L'A. considère le complexe abstrait  $R$  associé à un espace topologique  $X$  (v. l'analyse précéd.), où deux cellules sont identifiées si et seulement si les points coïncident dans l'espace de Hilbert et si les applications sont confondues. Une identification revient à remplacer le groupe des chaînes à  $p$  dimensions  $C_p^R$  de  $R$  par un groupe-quotient  $C_p^R/G_p$ , où  $G_p$  est un sous-groupe de  $C_p^R$ . Dans un complexe  $M$  au sens de Mayer, une identification définit un nouveau complexe  $m$ , et induit un homomorphisme naturel du groupe d'homologie de  $M$  dans le groupe d'homologie de  $m$ . L'identification est non-essentielle si cet homomorphisme est un isomorphisme sur. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une identification soit non-essentielle est que tout cycle de  $G_p$  soit un bord dans  $G_{p+1}$ . L'A. définit une identification dans  $R$  à partir des combinaisons de transpositions de sommets, de transformations affines et de simplexes dégénérés; il établit que cette identification (qui contient toutes les identifications classiques de l'homologie singulière) est non-essentielle; la possibilité de l'existence d'une identification non-essentielle maximum est évoquée.

*Guy Hirsch.*

**Radó, Tibor:** A remark on chain-homotopy. *Proc. Amer. math. Soc.* 2, 458—463 (1951).

$X, Y$  seien endliche abstrakte Komplexe;  $C_p(X)$ , bzw.  $C_p(Y)$  sei die  $p$ -te Kettengruppe von  $X$  bzw.  $Y$ . (Als Koeffizienten werden stets die ganzen Zahlen benutzt.) Die Randbildung wird in beiden Komplexen mit  $\partial$  bezeichnet. Eine Kettentransformation von  $X$  in  $Y$  wird gegeben durch Homomorphismen von  $C_p(X)$  in  $C_p(Y)$  für jedes  $p$ , die mit  $\partial$  vertauschbar sind. Zwei Kettentransformationen  $\tau_1, \tau_2$  von  $X$  in  $Y$  heißen kettenhomotop ( $\tau_1 \simeq \tau_2$ ), wenn es für jedes  $p$  einen Homomorphismus  $D$  von  $C_p(X)$  in  $C_{p+1}(Y)$  gibt, derart daß:  $\partial D + D\partial = \tau_2 - \tau_1$ . Wenn  $\tau_1 \simeq \tau_2$ , so  $\tau_1 \sim \tau_2$  (d. h.  $\tau_1, \tau_2$  sind homolog, sie induzieren identische Homomorphismen der Homologiegruppen von  $X$  in die von  $Y$ ). Wenn  $X$  torsionsfrei ist, dann folgt umgekehrt aus  $\tau_1 \sim \tau_2$ , daß  $\tau_1, \tau_2$  kettenhomotop sind. (Zum bisherigen siehe Lefschetz, *Algebraic topology*, Amer. math. Soc. Publ. vol. 27, 1942; dies. Zbl. 36, 122). Verf. beweist einen Satz, der die Rolle der Torsion in diesem Zusammenhang hervorhebt.  $K$  sei ein endlicher simplizialer Komplex, der in wenigstens einer Dimension Torsion hat. Es existieren dann ein endlicher simplizialer Komplex  $L$  und Kettentransformationen  $\sigma_1, \sigma_2$  von  $K$  in  $L$ , die homolog ( $\sigma_1 \sim \sigma_2$ ), aber nicht kettenhomotop sind. —  $\beta$  sei die höchste Dimension von  $K$ , die Torsion hat.  $S$  sei das  $\beta$ -dimensionale Skelett von  $K$ ,  $\Gamma$  der Kegel über  $S$  und  $L = K \cup \Gamma$ .  $\eta$  sei die zur Einbettung von  $K$  in  $L$  gehörige Kettentransformation von  $K$  in  $L$ ,  $\lambda$  der 0-Homomorphismus von  $K$  in  $L$ . Verf. konstruiert ferner eine spezielle Kettentransformation  $\tau$  von  $K$  in sich und zeigt, daß seine Behauptung richtig ist für  $L = K \cup \Gamma$ ,  $\sigma_1 = \eta \tau$ ,  $\sigma_2 = \lambda$ .

*Friedrich Hirzebruch.*

**Cogošvili, G. S.:** Über Dualitätsrelationen für beliebige Mengen. *Uspechi mat. Nauk* 6, Nr. 4 (44), 196—197 (1951) [Russisch].

Kurzer Bericht (ohne Beweise) über die Ergebnisse, die Verf. in der Theorie der Dualitätssätze erreicht hat. Seine Methode besteht in der Approximation einer beliebigen Untermenge eines Raumes von innen durch abgeschlossene und von außen durch offene Mengen. Es werden zwei Dualitätssätze formuliert, die allgemeiner sind als die entsprechenden beiden Sätze in der ausführlichen Darstellung (Verf., dies. Zbl. 42, 169). Bei dem Satz vom Alexander-Pontrjaginschen Typ wird nicht vorausgesetzt, daß der Gesamttraum  $R^n$  eine  $n$ -Sphäre, sondern nur eine  $n$ -dimensionale Homologiemannigfaltigkeit ist. Dann müssen in den Spektren die Gruppen  $B^r(G_a, X)$  bzw.  $B^{n-r-1}(F_a, \theta)$  durch die Kerne der durch  $G_a \rightarrow R^n$  bzw.  $F_a \rightarrow R^n$  erzeugten Einbettungshomomorphismen ersetzt werden (Bezeichnungen wie im zitierten Referat). Bei dem Satz vom Alexander-Kolmogoroffschen Typ

wird die verallgemeinerte Form von Alexandroff [Trans. Amer. math. Soc. 54, 286 (1943)] zugrunde gelegt.

*Ewald Burger.*

**Alexandroff (Aleksandrov), P. S.:** Neuer Beweis des Dualitätssatzes von L. S. Pontrjagin. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 4 (44), 195–196 (1951) [Russisch].

Verf. gibt eine neue Methode an, den allgemeinen Dualitätssatz von Alexander-Pontrjagin für beliebige Kompakten auf den speziellen für Polyeder zurückzuführen. Betrachtet man nämlich für ein beliebiges Kompaktum  $\Phi$  im euklidischen Raum  $R^n$  die Menge der Polyeder  $\Pi_\alpha$ , die  $\Phi$  umfassen, so erhält man einerseits in bekannter Weise aus den  $p$ -dimensionalen Homologiegruppen  $\Delta^p \Pi_\alpha$  (mit Koeffizienten aus einer bikompakten Gruppe  $\mathfrak{B}$ ) ein inverses Spektrum, andererseits aus den  $q = (n - p - 1)$ -dimensionalen Homologiegruppen  $\Delta^q(R^n - \Pi_\alpha)$  der offenen Restmengen (mit Koeffizienten aus der zu  $\mathfrak{B}$  dualen diskreten Gruppe) ein direktes Spektrum. Nach dem Spezialfall des Dualitätssatzes sind diese beiden Spektren zueinander dual. Offensichtlich ist die Limesgruppe des zweiten Spektrums gleich  $\Delta^q(R^n - \Phi)$ . Verf. gibt nun einen einfachen Beweis dafür, daß auch die Limesgruppe des ersten Spektrums gleich  $\Delta^p \Phi$  ist. Diese letzte Behauptung gestattet übrigens eine weitgehende Verallgemeinerung (vgl. Satz 1 der Arbeit von Smirnov, dies. Zbl. 42, 169).

*Ewald Burger.*

**Sitnikov, K. A.:** Über die Homologie-Umgürtung von Kompakten im Euklidischen Raume. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 4 (44), 199–200 (1951) [Russisch].

Verf. gibt zwei Charakterisierungen der Dimension eines Kompaktums  $\Phi$ , das in einem euklidischen  $R^n$  liegt, durch Eigenschaften der Komplementärmenge  $\Gamma = R^n - \Phi$ . Die erste Charakterisierung schließt an eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 34, 107) an. Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie im angeführten Referat. Ein Zyklus  $z$  in  $\Gamma$  heißt  $(\gamma, p)$ -Gürtel um  $\Phi$ , wenn für jeden Zyklus  $z'$ , der zu  $z$  im Durchschnitt von  $\Gamma$  mit der  $\gamma$ -Umgebung von  $z$  homolog ist, gilt  $\alpha^p z' \geq \gamma$ . Falls  $\dim \Phi = r$  ( $0 \leq r \leq n-1$ ), so kann man für jedes  $k = 1, 2, \dots, r+1$  in  $\Gamma$  einen  $(n-k)$ -dimensionalen Zyklus  $z$  mit beliebig kleinem Wesentlichkeitsmaß (und für  $r < n-1$  auch mit beliebig kleinem  $\alpha^{r-k+1} z$ ) finden, der ein  $(\gamma, r-k)$ -Gürtel um  $\Phi$  ist. Andererseits ist bei  $s > r$  für jedes  $\gamma > 0$  und  $k \leq n$  kein  $(n-k)$ -dimensionaler Zyklus in  $\Gamma$  mit einem Wesentlichkeitsmaß  $< \gamma$  ein  $(\gamma, s-k)$ -Gürtel um  $\Phi$ . — Die zweite Charakterisierung schließt an einen Satz von Alexandroff (dies. Zbl. 4, 73) an. Seien  $r \leq n-1$  und  $k \leq n$  nicht-negative ganze Zahlen.  $\Phi$  heißt ein  $(r, k)$ -Hindernis in  $R^n$ , wenn ein  $\gamma > 0$  derart existiert, daß man in  $\Gamma$  einen dort nullhomologen  $(n-k)$ -dimensionalen Zyklus  $z^{n-k}$  finden kann, der für  $r < n-1$  beliebig kleines  $\alpha^{r-k+1} z^{n-k}$  hat, für  $r = n-1$  durch eine beliebig kleine Verschiebung in einen unwesentlichen Zyklus übergeht, so daß für jede Kette  $x^{n-k+1}$  in  $\Gamma$ , die von  $z^{n-k}$  berandet wird, gilt  $\alpha^{r-k+1} x^{n-k+1} > \gamma$ . Falls  $\dim \Phi = r \leq n-1$ , ist  $\Phi$  ein  $(r, k)$ -Hindernis für jedes  $k = 2, \dots, r+1$ , aber für  $s > r$  kein  $(s, k)$ -Hindernis. Be-  
weise werden nicht gegeben.

*Ewald Burger.*

**Hirsch, Guy:** Quelques relations entre l'homologie dans les espaces fibrés et les classes caractéristiques relatives à un groupe de structure. Centre Belge Rech. math., Colloque Topologie, Bruxelles, du 5 au 8 juin 1950, 123–136 (1951).

$M$  sei gefasert mit der Faser  $F$ , der Basis  $m$  und der Projektionsabbildung  $P$ . Terminologie und allgemeine Voraussetzungen:  $\mathfrak{L}, \mathfrak{B}, \mathfrak{S}$  für Koketten-, Kozyklen-, Kohomologiegruppe, z. B.  $\mathfrak{S}(F)$  = Kohomologiegruppe der Faser (= direkte Summe der Kohomologiegruppen der einzelnen Dimensionen). Als Koeffizientenbereich wird im folgenden stets ein Körper gewählt.  $P'$  bezeichne die zu  $P$  duale Abbildung der Kogruppen von  $m$  in die von  $M$ . Die Automorphismen von  $\mathfrak{S}(F)$ , die durch die Fundamentalgruppe von  $m$  induziert werden, seien alle trivial. Man kann deshalb eine Kohomologieklassse einer speziellen in  $M$  liegenden Faser stets in eindeutiger Weise als Element von  $\mathfrak{S}(F)$  auffassen, die folgende Definition ist sinnvoll:  $\mathfrak{U}$  sei die Untergruppe von  $\mathfrak{L}(M)$ , deren Elemente diejenigen Koketten sind, die bei Beschränkung auf irgendeine in  $M$  liegende Faser stets einen Kozyklus ergeben, dessen Kohomologieklassse nicht von der speziellen Faser abhängt.  $I$  sei die natürliche Einbettungsabbildung einer beliebigen Faser in  $M$ ,  $I'$  sei die duale Abbildung,  $I'$  ist ein Homomorphismus von  $\mathfrak{U}$  in  $\mathfrak{S}(F)$ . — Verf. berichtet zunächst über das schon früher von ihm behandelte Problem der Bestimmung von  $\mathfrak{S}(M)$  aus  $\mathfrak{S}(F)$  und  $\mathfrak{S}(m)$  [s. nachsteh. Referat und C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1328–1330 (1948)]. Das Problem ist auch von J. Leray (dies. Zbl. 39, 191) behandelt worden. Verf. konstruiert zu diesem Zweck eine aufsteigende Folge  $0 \subset \mathfrak{S}_0(F) \subset \mathfrak{S}_1(F) \subset \dots \subset \mathfrak{S}_s(F) \subset \mathfrak{S}_{s+1}(F) = \mathfrak{S}(F)$  von Untergruppen von  $\mathfrak{S}(F)$ . ( $\subset$  für „echt enthalten.“) Definition der  $\mathfrak{S}_i(F)$ :  $\mathfrak{S}_0(F) = I'(\mathfrak{U}_0)$ , wo  $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{B}(M) \subset \mathfrak{U}$ .  $\mathfrak{S}_0(F)$  besteht also aus den Kohomologieklassen von  $F$ , die sich durch Kozyklen repräsentieren



lassen, die auf  $M$  erweitert werden können.  $\text{ext}_0$  bestimme ein relationstreues Repräsentantensystem für  $\mathfrak{H}_0(F)$  in  $\mathfrak{U}_0$ , d. h.  $\text{ext}_0$  ist eine isomorphe Abbildung von  $\mathfrak{H}_0(F)$  in  $\mathfrak{U}_0$  mit  $I' \text{ext}_0 = \text{Identität}$ . Durch  $P'_0(L \otimes h) = P'(L) \cup \text{ext}_0 h$  ( $L \in \mathfrak{Q}(m)$ ,  $h \in \mathfrak{H}_0(F)$ ,  $\cup$  cup-Produkt) wird ein Homomorphismus  $P'_0$  des tensoriellen Produktes  $\mathfrak{Q}^*_0 = \mathfrak{Q}(m) \otimes \mathfrak{H}_0(F)$  in  $\mathfrak{Q}(M)$  definiert. Es sei  $3^*_1 = 3(m) \otimes \mathfrak{H}_0(F)$ ,  $\mathfrak{H}_1(F) = I'(\mathfrak{U}_1)$ , wo  $\mathfrak{U}_1$  die durch  $\delta U \in P'_0(3^*_1)$  bestimmte Untergruppe von  $\mathfrak{U}$  ist ( $U \in \mathfrak{U}$ ). Durch  $I'$  erhält man eine homomorphe Abbildung  $I'_1$  von  $\mathfrak{U}_1$  auf  $\mathfrak{H}_1(F)/\mathfrak{H}_0(F)$ . Durch  $\text{ext}_1$  werde jetzt ein relationstreues Repräsentantensystem von  $\mathfrak{H}_1(F)/\mathfrak{H}_0(F)$  in  $\mathfrak{U}_1$  gegeben, d. h.  $I'_1 \text{ext}_1 = \text{Identität}$ . Man erhält jetzt mittels  $\text{ext}_1$  einen Homomorphismus  $P'_1$  von  $\mathfrak{Q}^*_1 = \mathfrak{Q}(m) \otimes \mathfrak{H}_1(F)/\mathfrak{H}_0(F)$  in  $\mathfrak{Q}(M)$  und definiert  $\mathfrak{U}_2$  als die von  $\mathfrak{U}_1$  und den Elementen  $U \in \mathfrak{U}$  mit  $\delta U \in P'_1(3^*_1)$  erzeugte Untergruppe von  $\mathfrak{U}$ . [ $3^*_2 = 3(m) \otimes \mathfrak{H}_1(F)/\mathfrak{H}_0(F)$ .] Man setzt  $\mathfrak{H}_2(F) = I'(\mathfrak{U}_2)$ . So geht die Definition der  $\mathfrak{H}_i(F)$  weiter. Nach Verf. bilden die  $\mathfrak{H}_i(F)$  eine echt aufsteigende Folge, die bei einem Index  $s+1$  mit  $\mathfrak{H}_{s+1}(F) = \mathfrak{H}(F)$  abbricht. Aus der angedeuteten Konstruktion der  $\mathfrak{H}_k(F)$  erhält man Isomorphismen von  $\mathfrak{H}_{i+1}(F)/\mathfrak{H}_i(F)$  in  $\mathfrak{H}^*_i = \mathfrak{H}(m) \otimes \mathfrak{H}_i(F)/\mathfrak{H}_{i-1}(F)$  ( $i \geq 0$ ), die Verf. charakteristische Isomorphismen nennt. Sie hängen von der Auswahl der Repräsentanten  $\text{ext}_0, \text{ext}_1, \dots$  ab. Sind diese charakteristischen Isomorphismen bekannt, dann kann  $\mathfrak{H}(M)$  berechnet werden. Fällt  $\mathfrak{H}_0(F)$  bereits mit  $\mathfrak{H}(F)$  zusammen (das ist der Fall, wenn jeder in  $F$  nicht 0-homologe Zyklus auch in  $M$  nicht berandet), dann ist  $\mathfrak{H}(M) = \mathfrak{H}(F) \otimes \mathfrak{H}(M)$ , d. h.  $\mathfrak{H}(M) = \mathfrak{H}(F \otimes m)$ . — In seiner Note [C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1297–1299 (1949)] hat Verf. die Bestimmung der multiplikativen Kohomologieeigenschaften von  $M$  aus denen von  $m$  und  $F$  für den Fall  $\mathfrak{H}_0(F) = \mathfrak{H}(F)$  behandelt; er hat dort insbesondere den wichtigen Spezialfall  $F = \text{komplex-projektiver Raum von } p \text{ komplexen Dimensionen} = K_p$  untersucht. Der Kohomologiering von  $K_p$  wird durch eine 2-dimensionale Koklasse  $z$  erzeugt, die sich wegen der Voraussetzung  $\mathfrak{H}_0(F) = \mathfrak{H}(F)$  zu einem in ganz  $M$  definierten Kozyklus  $\text{ext}_0(z)$  erweitern läßt.  $\text{ext}_0(z)$  repräsentiert eine Kohomologieklass  $u$  von  $M$ .  $u^{p+1}$

besitzt jedenfalls eine Darstellung (\*)  $u^{p+1} = \sum_{i=0}^p P'(x_i) \cup u^i$  [Potenzen im Sinne des cup-Produkts,  $x_i$  ist eine  $2(p-i+1)$ -dimensionale Kohomologieklass  $\text{von } m$ ]. Die multiplikativen Eigenschaften von  $M$  sind bestimmt, wenn für eine Erweiterung  $u$  von  $z$  die „Koeffizienten“  $x_i$  in (\*) bestimmt sind. Geht man von  $u$  durch  $v = u + P'(w)$  ( $w$  beliebige 2-dimensionale Kohomologieklass  $\text{von } m$ ) zu einer anderen Erweiterung  $v$  von  $z$  über, dann transformieren sich die  $x_i$  in bestimmter Weise. In seiner Note (loc. cit.) hat Verf. festgestellt: wenn  $m$  eine komplexe Mannigfaltigkeit von  $p+1$  komplexen Dimensionen,  $M$  der zugehörige Raum der komplexen Linienelemente und  $F$  also gleich  $K_p$  ist, dann stehen die  $x_i$  mit den Chernschen Klassen von  $m$  in Beziehung. In diesem Falle gibt es nämlich eine ausgezeichnete Erweiterung  $u$  von  $z$ :  $M$  sei die Mannigfaltigkeit der orientierten reellen Linienelemente von  $m$ .  $M$  ist auf zweierlei Weisen gefasert: (1)  $M/S^{2p+1} = m$  ( $S^r = r$ -Sphäre), (2)  $M/S^1 = M$ . Die Faser  $S^{2p+1}$  von (1) ist gefasert: (3)  $S^{2p+1}/S^1 = K_p$ ,  $z$  ist charakteristische Koklasse der Faserung (3). Die charakteristische Kohomologieklass der Faserung (2) ist die ausgezeichnete Erweiterung  $u$  von  $z$ . Für diese Erweiterung  $u$  stimmen die Koeffizienten  $x_i$  in (\*) mit den Chernschen Klassen von  $m$  überein. Andererseits bestimmt jede 2-dimensionale Koklasse  $v$  von  $M$ , die  $z$  erweitert, ein  $M_v$ , das gefasert ist mit der Faser  $S^1$  und der Basis  $M$  ( $M_v/S^1 = M$ ), das  $v$  als charakteristische Klasse hat und das in natürlicher Weise auch so gefasert werden kann:  $M_v/S^{2p+1} = m$  (Surfibration nach H. Hopf). Eine Schnittfläche der Faserung  $M_v/S^{2p+1} = m$  über dem  $(2p+1)$ -Skelett von  $m$  bestimmt eine Schnittfläche der Faserung  $M/K_p = m$ . Das  $x_0$  in der Darstellung (\*) für  $v^{p+1}$  ist das 2. Hindernis dieser Schnittfläche. Die Transformationsformel für  $x_0$  beim Übergang zu einem anderen  $v$  entspricht der Formel von E. Kundert über die möglichen 2. Hindernisse. Im Fall  $p=1$  ( $K_p = S^2$ , dieser Fall wird vom Verf. in der vorliegenden Arbeit ausführlich besprochen) entsprechen die Transformationsformeln für  $x_0$  und  $x_1$  den Formeln von H. Hopf [Centre Belge Rech. math., Colloque Topologie, Bruxelles, 118–121 (1951); Formel (7. 4.) und  $\omega(f, f) = \omega(g, g) + 2\xi$ ]. — Verf. zeigt nun, daß im allgemeinen Fall ( $M$  gefasert mit der Faser  $F$ , der Basis  $m$ , der Strukturgruppe  $G$ ;  $G$  operiert auf  $F$  transitiv,  $G_0$  Normalteiler von  $G$ ) mit Hilfe der von ihm entwickelten Homologiemethoden (siehe Anfang des Referats) in  $m$  charakteristische Kohomologieklassen definiert werden können, die Verallgemeinerungen der bekannten charakteristischen Klassen (Stiefel-Whitney-Chern) sind. Er benutzt dazu die charakteristischen Isomorphismen. Wie bei den besprochenen Beispielen verwendet Verf. vier Faserungen (1)–(4): (3) durch die Äquivalenz mod  $G_0$  wird  $F$  gefasert:  $F/f = F_*$ ; (1) ist die gegebene Faserung  $M/F = m$ ; (2)  $M$  ist wegen (3) auch gefasert in Fasern  $f$ :  $M/f = M_*$ ; und  $M_*$  ist schließlich so gefasert (4)  $M_*/F_* = m$ . (Bei den Beispielen hier im Referat eine andere Bezeichnung; entsprechende Faserungen (1)–(3) sind aber gleich numeriert.)

Friedrich Hirzebruch.

Hirsch, Guy: Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés. (Résumé de la conférence faite le 17 avril 1948.) Bull. Soc. math. Belgique 1947–1948, 24–33 (1948).



Verf. behandelt folgendes Problem: Bestimmung der Homologiegruppen eines gefaserten Raumes aus den Homologiegruppen der Basis und denen der Faser. Verf. weist zunächst auf den Fall des cartesischen Produktes hin (Formeln von D. Künneth) und benutzt dann die Hopfsche Sphärenfaserung  $S^3/S^1 = S^2$  als einfaches Beispiel für die allgemeine Theorie, die er im folgenden skizziert. Inzwischen sind weitere Arbeiten des Verf. über das hier behandelte Problem erschienen (s. vorsteh. Referat), das unabhängig vom Verf. auch von J. Leray (dies. Zbl. 39, 191) behandelt wurde. Für die Einzelheiten vgl. vorsteh. Referat. Der folgende Satz soll erwähnt werden:  $M$  sei gefasert mit der Faser  $F$  und der Basis  $m$  ( $M, F, m$  endliche Polyeder). Die Aussagen „jeder in  $F$  nicht null-homologe Zyklus ist auch nicht null-homolog in  $M$ “ und „die Homologiegruppen von  $M$  sind isomorph mit denen des cartesischen Produktes  $m \times F$ “ sind äquivalent.

*Friedrich Hirzebruch.*

Hodge, W. V. D.: The characteristic classes on algebraic varieties. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 138—151 (1951).

$V_{[m]}$  sei eine singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension  $m$ . Auf  $V_{[m]}$  ist für jede ganze Zahl  $k$  mit  $0 \leq k \leq m-1$  ein kanonisches System von  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten definiert [Eger, dies. Zbl. 15, 272 und 16, 41; Todd, Proc. London math. Soc., II. Ser. 45, 410 (1939)].  $X_{[k]}(V_{[m]})$  sei eine Untermannigfaltigkeit (der komplexen Dimension  $k$ ), die dem kanonischen System angehört.  $X_{[k]}(V_{[m]})$  ist eine „Summe“ von irreduziblen Untermannigfaltigkeiten, die mit gewissen (positiven oder negativen) ganzen Zahlen als Koeffizienten versehen sind. Durch  $X_{[k]}(V_{[m]})$  wird ein ganzzahliger  $2k$ -dimensionaler Zyklus von  $V_{[m]}$  gegeben, der ebenfalls mit  $X_{[k]}(V_{[m]})$  bezeichnet werde. —  $V_{[m]}$  ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit von  $2m$  reellen Dimensionen. Für jedes  $r$  ( $1 \leq r \leq m$ ) ist also eine Chernsche  $(2m - 2r + 2)$ -dimensionale Cohomologieklassse von  $V_{[m]}$  definiert [Chern, Ann. of Math., II. Ser. 47, 85 (1946)].  $Z_{2r-2}$  sei ein Zyklus der zu dieser Cohomologieklassse dualen Homologieklassse — charakteristischer Zyklus. Verf. untersucht den Zusammenhang zwischen den charakteristischen Zyklen und den kanonischen Mannigfaltigkeiten. Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über  $V_{[m]}$  beweist Verf. (M): Für eine singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit  $V_{[m]}$  gilt die Homologie:  $Z_{2r-2}(V_{[m]}) \sim (-1)^{m-r+1} X_{[r-1]}(V_{[m]})$ , ( $r = 1, \dots, m$ ). — (1) Verf. beweist die Gültigkeit von (M) (für  $r$ ) zunächst in dem von Eger betrachteten Fall, daß es auf  $V_{[m]}$   $r$  linear-unabhängige Integrale 1. Art  $\int P_{i\alpha} dz^\alpha$  ( $i = 1, \dots, r$ ;  $z^\alpha$  lokale Koordinaten,  $\alpha = 1, \dots, m$ ) gibt, die folgende Eigenschaft haben: der Ort der Punkte, an denen die Matrix  $(P_{i\alpha})$  den Rang  $r-1$  hat, ist von der komplexen Dimension  $r-1$  und hat einfache Komponenten. (2) Verf. beweist (M) dann noch für den Fall, daß  $V_{[m]}$  Hyperfläche im komplex-projektiven Raum  $S_{[m+1]}$  oder vollständiger Durchschnitt von Hyperflächen eines höherdimensionalen komplex-projektiven Raumes ist. (3) Schließlich gibt Verf. noch eine Andeutung eines allgemeinen Beweises für (M) (ohne zusätzliche Voraussetzung). Dieser Beweis ist nach Verf. unvollständig. Verf. sagt, daß die Schwierigkeit, einen einfachen, direkten und allgemeinen Beweis für (M) zu finden, zum Teil daran liegt, daß man nur wenige Eigenschaften der kanonischen Systeme verwenden kann, da erst noch viele Einzelheiten über kanonische Systeme untersucht werden müssen. — Das entscheidende Hilfsmittel für den Beweis von (M) unter den zusätzlichen Voraussetzungen von (2) ist die „adjunction formula“:  $U_{[m-1]}$  sei eine singularitätenfreie Untermannigfaltigkeit von  $V_{[m]}$ ;  $\psi$  sei eine meromorphe Funktion auf  $V_{[m]}$ , deren Nullstellenmannigfaltigkeit  $U_{[m-1]}$  ist und deren Polstellenmannigfaltigkeit  $U'$  einfach und singularitätenfrei ist und  $U_{[m-1]}$  einfach schneidet. Die adjunction formula ermöglicht es dann, die Chernschen Homologieklassen von  $U_{[m-1]}$  aus denen von  $V_{[m]}$  zu bestimmen. Es gilt in  $U_{[m-1]}$  die Homologie: (\*)  $Z_{2r-2}(U_{[m-1]}) \sim [Z_{2r}(V_{[m]}) - Z_{2r}(U')] U_{[m-1]}$ ; ( $r = 1, \dots, m-1$ ,  $Z_{2m-2}(U') = U'$ , Produkt = Schnittbildung). Für die kanonischen Systeme gilt eine analoge adjunction formula:  $X_{[r-1]}(U_{[m-1]}) \sim [X_{[r]}(V_{[m]}) + X_{[r]}(U')] U_{[m-1]}$ . Für die komplex-projektiven Räume gilt (M). Mit Hilfe der adjunction formulae kann man dann (M) im Falle (2) beweisen. Verf. erwähnt, daß sein Beweis von (\*) unter starken Einschränkungen auch für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit  $V_{[m]}$  von  $m$  komplexen Dimensionen und eine singularitätenfrei eingebettete kompakte komplexe Mannigfaltigkeit  $U_{[m-1]}$  gültig bleibt. Bemerkung des Ref.: Man kann die adjunction formula (\*) in der Cohomologiesprache formulieren und dann für eine beliebige kompakte komplexe Mannigfaltigkeit  $V_{[m]}$  und eine singularitätenfrei eingebettete kom-

pakte  $U_{[m-1]}$  beweisen. Formulierung und Beweis erfolgen ohne Verwendung einer Funktion  $\psi$  (siehe oben) und einer zu  $U_{[m-1]}$  homologen Mannigfaltigkeit  $U'$ . Der Beweis erfolgt mit Hilfe von neueren Arbeiten von H. Hopf [Centre Belge rech. math., Colloque Topologie, Bruxelles, du 5 au 8 juin 1950, 117—121 (1951)] und E. G. Kundert (vgl. zweitfolgendes Referat).

Friedrich Hirzebruch.

**Ehresmann, Charles:** Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal. II. L'espace des jets d'ordre  $r$  de  $V_n$  dans  $V_m$ . III. Transitivité des prolongements. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 598—600, 777—779, 1081—1083 (1951).

I. Une structure de  $r$ -variété sur  $V_n$  est définie par un atlas  $A$  de  $V_n$  sur l'espace numérique  $R^n$ , compatible avec l'ensemble des automorphismes locaux  $r$  fois continûment différentiables de rang  $n$ .  $f$  est une  $r$ -application de  $V_n$  en  $V_m$  au point  $x$  de  $V_n$  si elle s'exprime par des fonctions admettant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre  $r$ . Deux pareilles fonctions  $f$  et  $g$  appartiendront à une même  $r$ -classe lorsque  $f(x) = g(x)$  et lorsque les dérivées partielles respectives prennent les mêmes valeurs en  $x$ . Ces classes seront appelées  $r$ -jets de source  $x$  et de but  $f(x)$ , et notées  $j_x^r f$ . Les  $r$ -jets en  $x$  tels que  $f(x) = x$  et de rang  $n$  engendrent le groupe  $L_n^r$  d'isotropie infinitésimale en  $x$ . Une  $p^r$ -vitesse dans  $V_n$  (d'origine  $x$ ) est un  $r$ -jet de  $R^p$  dans  $V_n$  de source  $o$  et de but  $x$ ; une covitesse est un jet de source  $x$  et de but  $o$ ; un  $r$ -repère de  $V_n$  est une  $n^r$ -vitesse de rang  $n$ . L'ensemble  $H^r(V_n)$  de ces  $r$ -repères est le prolongement principal d'ordre  $r$  de  $V_n$ . L'espace des  $p^r$ -vitesses dans  $V_n$  sera désigné par  $T_p^r(V_n)$ , celui des  $p^r$ -vitesses dans  $R^n$  par  $L_{n,p}^r$ . L'atlas  $A$  détermine dans  $T_p^r(V_n)$  une structure fibrée de base  $V_n$ , de fibre isomorphe à  $L_{n,p}^r$  et de groupe de structure  $L_n^r$ . L'espace fibré principal associé est  $H^r(V_n)$ ; c'est une extension de  $H^1(V_n)$ , et sa structure fibrée est déterminée (à un isomorphisme près) par celle de  $H^1(V_n)$ , et il en est de même pour les espaces fibrés associés au prolongement principal  $H^r(V_n)$ , appelés prolongements d'ordre  $r$  de  $V_n$ .

II. Si  $X$  est un  $r$ -jet de source  $\alpha(X)$  et de but  $\beta(X)$  (correspondant à une application  $f$  de  $R^p$  en  $V_n$ ), la vitesse d'ordre  $r$  de  $X$  en  $x = \alpha(X)$  est définie par  $\partial^r X = X \partial^r x$ , où  $t_x$  désigne dans  $R^p$  la translation amenant  $u$  en  $o$ , et où  $\partial^r x$  est le jet déterminé par  $t_x^{-1}$ . Si  $f$  applique  $V_n$  en  $R^p$ , la différentielle d'ordre  $r$   $d^r X$  est définie par la  $p^r$ -covitesse  $t_{f(x)} f$ . Si  $f$  applique  $R^n$  en  $R^m$ , la dérivée d'ordre  $r$  de  $X$  est l'élément  $(d^r X) \partial^r x$  de  $L_{m,n}^r$ , qu'on notera  $d^r X / d^r x$ . — Si  $V_n$  et  $V_m$  sont deux  $r$ -variétés, le prolongement de leurs atlas définit dans l'espace des  $r$ -jets une structure fibrée de base  $V_n \times V_m$ , de fibres isomorphes à  $L_{m,n}^r$ , de groupe de structure  $L_n^r \times L_m^r$ ;  $H^r(V_n) \times H^r(V_m)$  est l'espace fibré principal associé. Cet espace est aussi fibré en fibres isomorphes à  $T_n^r(V_m)$ , avec  $V_n$  pour espace de base et  $L_n^r$  pour groupe de structure;  $H^r(V_n)$  est l'espace fibré principal associé. Il est encore fibré en fibres isomorphes à l'espace  $T_m^*(V_n)$  des covitesses, avec  $V_m$  pour espace de base et  $L_m^r$  pour groupe de structure;  $H^r(V_m)$  est l'espace fibré principal associé.

III. Si  $V_n$  et  $V_m$  sont deux  $r$ -variétés, tout  $r$ -jet détermine un  $k$ -jet ( $0 \leq k \leq r$ ). L'espace  $J^k(V_n, V_m)$  des  $k$ -jets admet une structure fibrée  $l = r - k$  fois différentiable de base  $V_n \times V_m$ . — Soit  $F$  un espace admettant  $L_n^k$  comme groupe d'opérateurs, la loi de composition  $(s, y) \rightarrow sy$  étant continue ( $s \in L_n^k, y \in F$ ); soit  $E(V_n, F)$  le prolongement d'ordre  $k$  de  $V_n$  dont les fibres sont isomorphes à  $F$ ; il sera dit régulier si l'application  $(s, y) \rightarrow sy$  est  $l$  fois différentiable. — Tout prolongement d'ordre  $l$  de  $E$  (d'ordre  $k$  et régulier) est un prolongement d'ordre  $k + l$  de  $V_n$ . Si  $L_n^k$  opère transitivement dans  $F$ , tout prolongement d'ordre  $l$  de  $E$  admet une structure fibrée subordonnée de base  $E$  dont le groupe de structure est le sous-groupe de  $L_n^r$  laissant invariant un point de  $F$ . — Si  $\rho$  est une relation d'équivalence ouverte invariante par  $G$  de la fibre  $F$  de l'espace fibré  $E(B, F, G, H)$  et si  $\bar{\rho}$  est la relation induite dans  $E$ ,  $E/\rho$  est fibré en fibres  $F/\rho$  et le groupe de structure est  $G/K$ , où  $K$  est le sous-groupe de  $G$  qui laisse invariante chaque classe mod  $\rho$ .  $E$  est alors une extension de  $E/\rho$ , associée à l'homomorphisme de  $G$  sur  $G/K$ . — Un prolongement d'ordre  $r = k + l$  n'est pas toujours un prolongement d'ordre  $l$  d'un prolongement d'ordre  $k$ , mais c'est toujours une extension d'un prolongement d'ordre  $k$ .

Guy Hirsch.

**Kundert, E. G.:** Über Schnittflächen in speziellen Faserungen und Felder reeller und komplexer Linienelemente. Ann. of Math., II. Ser. 54, 215—246 (1951).

Von E. Stiefel (dies. Zbl. 14, 416) wurde die Frage nach der Existenz von stetigen, singularitätenfreien  $r$ -Feldern von Richtungen in  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten behandelt. S. S. Chern [Ann. of Math., II. Ser. 47, 85 (1946)] fand für  $r$ -Felder komplexer Richtungen in komplexen Mannigfaltigkeiten Resultate, die den Stiefelschen Sätzen entsprechen:  $M^m$  sei eine komplexe Mannigfaltigkeit von  $n$  komplexen Dimensionen ( $m = 2n$ , es sei  $n \geq 2$ ). Der Raum der komplexen Richtungen in der  $M^m$  werde mit  $\mathcal{L}_1(M^m)$  bezeichnet.  $M^m$  werde mit einer hermiteschen Metrik versehen.  $\mathcal{L}_1(M^m)$  ist gefasert (fibre bundle),  $(\mathcal{L}_1): \mathcal{L}_1(M^m)/S^{2n-1} = M^m$ . Faser ist die  $(2n-1)$ -Sphäre der komplexen Richtungen in einem



festen Punkte der  $M^m$ , Strukturgruppe ist die unitäre Gruppe in  $n$  komplexen Variablen.  $M^m$  werde so fein trianguliert, daß jedes Simplex eine Umgebung besitzt, über der die Faserung  $(\mathcal{Q}_1)$  trivial ist. Zu  $(\mathcal{Q}_1)$  gehören die Faserungen  $(\mathcal{Q}_r)$ :  $\mathcal{Q}_r(M^m)/U_{n,r} = M^m$  ( $1 \leq r \leq n$ ,  $\bar{U}_{n,r}$  ist die Mannigfaltigkeit der Systeme von  $r$  unitär-orthogonalen Richtungen in einem festen Punkte von  $M^m$ ). Alle Homotopiegruppen  $\pi_k(\bar{U}_{n,r})$  mit  $k \leq 2(n-r)$  sind 0.  $\pi_{2(n-r)+1}(\bar{U}_{n,r})$  ist unendlich zyklisch. Die Faserung  $(\mathcal{Q}_r)$  besitzt daher Schnittflächen über dem  $2(n-r)+1$ -Gerüst von  $M^m$ . Diese Schnittflächen definieren  $2n-2r+2$ -dimensionale Hindernis-Cozyklen, die alle der gleichen Cohomologiekasse  $c_r(M^m)$ , dem ersten Hindernis der Faserung  $(\mathcal{Q}_r)$ , angehören.  $c_r(M^m)$  hängt nur von der komplexen Mannigfaltigkeit  $M^m$  ab und wird als  $r$ -te Chernsche (charakteristische Klasse) von  $M^m$  bezeichnet. — Es liegt nun nahe, statt  $r$ -Felder von komplexen Richtungen  $r$ -Felder von komplexen Linienelementen zu betrachten. Man hat dann Faserungen zu untersuchen, deren 1. Hindernisse verschwinden, die 2. Hindernisse sind nicht mehr von der speziellen Schnittfläche unabhängig, und die Frage nach dem Variabilitätsbereich dieser 2. Hindernisse ist wichtig und interessant. Ref. wird zunächst über einige besonders wichtige Einzelergebnisse des Verf. berichten und dann auf die allgemeine Theorie eingehen. — Jede komplexe Richtung  $r$  in einem Punkte  $P$  der  $M^m$  bestimmt ein komplexes Linienelement in  $P$ . Die 1-Sphäre der Richtungen  $e^{iv}r$  bestimmt das gleiche komplexe Linienelement. Die komplexen Linienelemente in einem festen Punkte der  $M^m$  bilden einen komplex-projektiven Raum  $P_{n-1}$  der komplexen Dimension  $n-1$ . Man hat die Hopfsche Faserung  $S^{2n-1}/S^1 = P_{n-1}$ . Zu  $(\mathcal{Q}_1)$  gehört die Faserung  $(\mathcal{P}_1)$ :  $\mathcal{P}_1(M^m)/P_{n-1} = M^m$ . [ $\mathcal{P}_1(M^m)$  = Mannigfaltigkeit der komplexen Linienelemente in der  $M^m$ .] Es ist  $\pi_0(P_{n-1}) = \pi_1(P_{n-1}) = 0$ ,  $\pi_2(P_{n-1})$  unendlich zyklisch,  $\pi_k(P_{n-1}) = 0$  für  $2 < k < 2n-1$ ,  $\pi_{2n-1}(P_{n-1})$  unendlich zyklisch. Zur Faserung  $(\mathcal{P}_1)$  gehört also eine erste Hindernis-Cohomologiekasse (3-dimensional). Diese ist 0, weil  $(\mathcal{P}_1)$  Schnittflächen über dem  $2n-1$ -Gerüst von  $M^m$ , z. B. die durch Schnittflächen der Faserung  $(\mathcal{Q}_1)$  induzierten, besitzt. Jede Schnittfläche der Faserung  $(\mathcal{P}_1)$  über dem  $2n-1$ -Gerüst definiert eine  $2n$ -dimensionale ganzzahlige Hindernis-Cohomologiekasse  $c_1$  von  $M^m$ , die durch eine ganze Zahl angegeben werden kann. Frage: Welche ganzen Zahlen können in diesem Sinne als Indexsumme einer Schnittfläche der Faserung  $(\mathcal{P}_1)$  auftreten? Antwort: Es kommen genau die ganzzahligen  $2n$ -dimensionalen Cohomologieklassen  $c_1$  vor, die sich darstellen lassen in der

Form:  $c_1 = \sum_{i=0}^n c_{i+1} d^i$ ,  $d$  beliebige ganzzahlige 2-dimensionale Cohomologiekasse von  $M^m$ ,

Multiplikation und Potenzen im Sinne des cup-Produktes,  $\bar{c}_{i+1}$  Chernsche Klassen von  $M^m$ ,  $c_{n+1} = 1$  (Einselement des Cohomologieringes von  $M^m$ ). — Entsprechendes gilt für die Faserung  $(\mathcal{Q}_r)$ , sie induziert eine Faserung  $(\mathcal{P}_r)$ :  $\mathcal{P}_r(M^m)/U_{n,r} = M^m$  [ $U_{n,r}$  = Mannigfaltigkeit der Systeme von  $r$  unitär-orthogonalen komplexen Linienelementen in einem festen Punkte der  $M^m$ ]. Es ist  $\pi_0(U_{n,r}) = \pi_1(U_{n,r}) = 0$ ,  $\pi_2(U_{n,r})$  = direkte Summe von  $r$  unendlich zyklischen Gruppen,  $\pi_k(U_{n,r}) = 0$  für  $2 < k \leq 2n-2r$ ,  $\pi_{2n-2r+1}(U_{n,r})$  unendlich zyklisch. Das erste (dreidimensionale) Hindernis verschwindet, wenn  $r \leq n-1$ . Welche ganzzahligen  $(2n-2r+2)$ -dim. Cohomologieklassen  $c_r$  können als 2. Hindernisse von Schnittflächen über dem  $2n-2r+1$ -Gerüst von  $M^m$  auftreten? Antwort: Es treten genau die Cohomologieklassen  $c_r$  auf, die sich darstellen

lassen in der Form:  $c_r = \sum_{i=r}^{n+1} c_i \sum_{v_1+\dots+v_r=i-r} d_1^{v_1} d_2^{v_2} \dots d_r^{v_r}$ , wo  $d_1, \dots, d_r$  beliebige 2-dimen-

sionale Cohomologieklassen sind. Anwendung auf den komplex-projektiven Raum  $P_n$  ergibt: Notwendig und hinreichend für die Existenz eines  $r$ -Feldes komplexer Linienelemente auf dem Gerüst  $K^{2(n-r-1)}$  im komplex-projektiven  $P_n$  ist die Lösbarkeit der folgenden diophantischen Gleichung:

$\sum_{i=r}^{n+1} \sum_{v_1+\dots+v_r=i-r} D_1^{v_1} D_2^{v_2} \dots D_r^{v_r} = 0$ ,  $D_j$  ganze Zahl. Korollare: Im  $P_n$

gibt es, wenn  $n$  gerade ist, kein singularitätenfreies 1-Feld, im  $P_n$  ( $n$  beliebig) gibt es kein singularitätenfreies 2-Feld komplexer Linienelemente. — Verf. führt seine Überlegungen allgemein durch für  $P$ -Faserungen, das sind Faserungen mit einem projektiven Raum (reell oder komplex) als Faser und gewissen zusätzlichen Eigenschaften. In diesem Referat soll nur der komplex-projektive Fall besprochen werden.  $\mathcal{P}/P_{n-1} = K$  heißt  $P$ -Faserung, wenn folgendes gilt:  $K$  zusammenhängendes Polyeder ( $K^j$  bezeichnet das  $j$ -dimensionale Gerüst von  $K$ ), die Strukturgruppe ist die unitäre Gruppe; das zur Faserung gehörige 1. Hindernis (dreidimensionale Cohomologiekasse von  $K$ ) verschwindet.  $K$  werde so fein trianguliert, daß jedes Simplex eine Umgebung besitzt, über der die Faserung trivial ist. — In einer  $P$ -Faserung gibt es Schnittflächen über  $K^{2n-1}$ . Für zwei solche Schnittflächen  $F, G$  ist in üblicher Weise ein 2-dim. Differenzen-Cozyklus  $d(F, G)$  definiert. Ferner wird ein  $2n-2$ -dim. Schnitt-Cozyklus  $\varphi(F, G)$  so definiert:  $F, G$  lassen sich durch homotope Änderungen über  $K^{2n-3}$  trennen. Für ein Simplex  $x^{2n-2}$  lassen sich  $F, G$  auffassen als singuläre  $2n-2$ -dim. Ketten im cartesischen Produkt  $x^{2n-2} \times P_{n-1}$ , deren (ganzzahlige) Schnittzahl definiert ist und gleich dem Wert von  $\varphi(F, G)$  auf  $x^{2n-2}$  gesetzt wird.  $c_1(F), c_1(G)$  seien die  $2n$ -dim. Hindernis-Cozyklen von  $F$  und  $G$ . Es gilt die Formel von



H. Hopf [Centre Belg. Rech. math., Colloque Topologie, Bruxelles, 117—121 (1951)]:  $c_1(F) - c_1(G) \sim d(F, G) \cdot \varphi(F, G)$ , ( $\sim$  cohomolog). Verf. definiert für eine beliebige Schnittfläche  $G$  über  $K^{2n-1}$  sekundäre Hindernis-Cozyklen  $c_2(G), \dots, c_n(G)$ ;  $c_r(G)$ ,  $r = 1, \dots, n$ , hat die Dimension  $2n - 2r + 2$ . Zur Bedeutung dieser  $c_r(G)$  werde hier nur folgendes gesagt: Wenn die Faserung  $\mathfrak{P}/P_{n-1} = K$  sich durch Reduktion aus einer Faserung  $\mathfrak{Q}/S^{2n-1} = K$  ergibt (Verwendung der Faserung  $S^{2n-1}/S^1 = P_{n-1}$ ) und wenn  $G$  sich durch Reduktion aus einer Schnittfläche von  $\mathfrak{Q}$  erhalten läßt, dann sind die  $c_r(G)$  Chernsche charakteristische Cozyklen der Faserung  $\mathfrak{Q}$ . Verf. beweist unter Verwendung der Formel von Hopf die folgenden Formeln (Potenzen und Produkte wieder im Sinne des cup-Produktes):

$$(1) \quad \varphi(F, G) \sim \sum_{i=2}^{n+1} c_i(G) d^{i-2}(F, G) \quad [c_{n+1}(G) = \text{Einselement}],$$

$$(2) \quad c_1(F) \sim \sum_{i=1}^{n+1} c_i(G) d^{i-1}(F, G),$$

$$(3) \quad c_r(F) \sim \frac{1}{(r-1)!} \frac{\delta^{r-1}}{\delta d^{r-1}} c_1(F, d)$$

( $\frac{\delta^{r-1}}{\delta d^{r-1}}$  bedeutet die  $(r-1)$ -te formale Ableitung des Polynoms (2) nach der „Variablen“  $d$ ). —

Verf. definiert dann noch Invarianten  $\Delta_i$  der Faserung  $\mathfrak{P}/P_{n-1} = K$ .  $\Delta_i$  läßt sich darstellen als Polynom in den  $c_r(G)$  mit ganzzahligen Koeffizienten.  $\Delta_i$  hängt nicht von  $G$  ab. Für das Polynom (2) bedeutet das:  $\Delta_i$  bleibt bei jeder Substitution  $d \rightarrow d + d_0$  unverändert. — Verf. beweist entsprechende Sätze für Faserungen  $\mathfrak{P}_r/U_{n,r} = K$ . Beispiel:  $\mathfrak{P}_r(M^m)/U_{n,r} = M^m$ , siehe 1. Teil des Referats. — Die Sätze, die Verf. in der vorliegenden Arbeit bewiesen hat, sind sehr wichtig und lassen zahlreiche Anwendungen zu. Verf. gibt u. a. einen topologischen Beweis für einen algebraischen Satz von W. H abicht an [Commentarii math. Helvet. 18, 154—175 (1946)]. Die Ergebnisse des Verf. stehen in Zusammenhang mit einer Note von W. T. Wu (dies. Zbl. 37, 103) und mit Arbeiten von G. Hirsch über die Bestimmung der Homologiestruktur von  $\mathfrak{P}$  aus der von  $P_{n-1}$  und der von  $K$  (dies. Zbl. 41, 100, 43, 171). Friedrich Hirzebruch.

Rham, G. de: Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiable. Ann. Inst. Fourier 2, 51—67 (1951).

Aus der Triangulierbarkeit differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und der kombinatorischen Kennzeichnung der Linsenräume mittels der sogenannten Torsion folgt, daß zwei Drehungen einer  $(2n-1)$ -dimensionalen Sphäre bzw. zwei sphärische Räume mit konstanter Krümmung durch längentreue Abbildungen ineinander übergeführt werden können, wenn es differenzierbare Abbildungen, die dies leisten, gibt. Dieser Satz wird hier ohne Benutzung der Triangulierbarkeit differenzierbarer Mannigfaltigkeiten bemerkenswert einfach bewiesen. Zunächst wird eine neue algebraische Berechnung der Torsion angegeben, indem gewisse Determinantenbildungen durch äußere Grassmannprodukte ersetzt und Beziehungen dieser Produkte in komplementären Vektorräumen benutzt werden. Den kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $V$  werden, mittels einer Riemannschen Metrik, Bedeckungen aus endlich vielen konvexen Umgebungen zugeordnet. Dann wird, einer Mitteilung von A. Weil folgend, gezeigt, daß der Nerv einer solchen Bedeckung denselben Homotopietyp wie  $V$  hat. Ist  $T$  eine differenzierbare Abbildung von  $V$  in sich von endlicher Ordnung, so gehören zu  $V$ ,  $T$  solche Bedeckungen, welche bei  $T$  in sich übergehen, und verschiedene solche Bedeckungen gehen durch „einfache“ Abänderungen auseinander hervor, wie einerseits aus der Homotopiebeziehung zu  $V$  folgt und was andererseits die Invarianz der Torsion bei Wechsel der konvexen Bedeckungen zur Folge hat. Dabei heißt  $\bar{C}$  eine einfache Erweiterung von  $C$ , wenn  $C$  geschlossen und die Homologiegruppen von  $\bar{C}$  modulo  $C$  die trivialen sind. Schließlich ist noch zu zeigen, daß das Linsenraumschema, das zu einer Drehung einer Sphäre gehört, dieselbe Torsion wie eine geeignete zugehörige konvexe Bedeckung hat. Kurt Reidemeister.

Postnikov, M. M.: Über die Klassifikation der stetigen Abbildungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 573—576 (1951) [Russisch].

Verf. hat in einer früheren Note jedem stetig-zusammenhängenden Raum  $X$  als Homotopieinvariante ein „natürliches System“  $\mathfrak{X} = \{\pi_i(X), k_i\}$  zugeordnet, wo  $\pi_i(X)$  die Homotopiegruppen von  $X$  und  $k_i$  gewisse „Faktoren“ sind, und gezeigt, daß dieses natürliche System für

Polyeder  $X$  den Homotopietyp von  $X$  bestimmt (dies. Zbl. 42, 172), sowie ein Verfahren angegeben, um aus dem natürlichen System in algebraischer Weise die Homologiegruppen von  $X$  zu bestimmen (dies. Zbl. 42, 172). In der vorliegenden Note wird gezeigt, wie man bei Kenntnis des natürlichen Systems eines Raumes  $X$  von zwei Abbildungen eines Polyeders  $P$  in  $X$  bestimmen kann, ob sie homotop sind. Hierzu können die Abbildungen zunächst als normal im Sinne der früheren Definition des Verf. (dies. Zbl. 42, 172) angenommen werden. Jede solche Abbildung  $f$  bestimmt dann auf jedem  $i$ -dimensionalen Simplex von  $P$  durch Vergleich mit der gemäß Verf. (1. c.) definierten entsprechenden Standardabbildung ein Element von  $\pi_i(X)$ . Das derart erhaltene System von Ketten  $d_1^f, d_2^f, \dots$  des Polyeders  $P$  mit Koeffizienten aus  $\pi_1(X), \pi_2(X), \dots$  erfüllt mit den Faktoren  $k_i$  des Systems  $\mathfrak{K}$  eine gewisse algebraische Relation. Derartige Ketten-systeme nennt Verf. Zyklonoide des Polyeders  $P$  über dem System  $\mathfrak{K}$  und insbesondere das System  $d_1^f, d_2^f, \dots$  charakteristisches Zyklonoid von  $f$ . Verf. definiert weiter einen algebraischen Homologiebegriff für Zyklonoide und spricht (ohne Beweis) die beiden Sätze aus: 1. Jedes Zyklonoid von  $P$  über  $\mathfrak{K}$  ist charakteristisches Zyklonoid einer normalen Abbildung von  $P$  in  $X$ . 2. Zwei normale Abbildungen von  $P$  in  $X$  sind dann und nur dann homotop, wenn ihre charakteristischen Zyklonoide homolog sind. In diesem allgemeinen Klassifikationstheorem sind nach Verf. die bekannten Klassifikationstheoreme von Verf. (dies. Zbl. 34, 257), Whitney (dies. Zbl. 40, 258), Verf. (dies. Zbl. 37, 262), Shimada u. Uehara [Nagoya math. J. 3, 67 (1951)] einerseits und Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 67, 427 (1949)], Olum [Bull. Amer. math. Soc. 53, 1132 (1947)] andererseits entweder unmittelbar als Spezialfälle enthalten oder daraus leicht abzuleiten.

Ewald Burger.

Whitehead, J. H. C.: Omotopia. II. Boll. Un. mat. Ital. III. Ser. 6, 36—49 (1951).

(Teil I: Teoria della dimensione, dies. Zbl. 39, 187.) Verf. berichtet über Homotopietheorie (Homotopiegruppen, gefaserte Räume): 1. Homotopie und Homologie. 2. Homotopietypen. 3. Fundamentalgruppe: Als Beispiel wird der Außenraum eines Knotens betrachtet. 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit trivialer 1. Homologiegruppe und nicht-trivialer Fundamentalgruppe (Poincarésche Räume). Konstruktion von Poincaréschen Räumen nach Dehn [Math. Ann. 69, 137—168 (1910)]. 4. Die höheren Homotopiegruppen:  $\pi_n(X)$ ,  $\pi_1(X)$  ist die Fundamentalgruppe. 5. Operatoren:  $\pi_1(X)$  wird homomorph abgebildet in die Automorphismengruppe von  $\pi_n(X)$ . Der Gruppenring von  $\pi_1(X)$  als Operatorenbereich von  $\pi_n(X)$ . 6. Das Produkt  $[\alpha, \beta]$ : Wenn  $\alpha \in \pi_m(X)$  und  $\beta \in \pi_n(X)$ , dann ist  $[\alpha, \beta] \in \pi_{m+n-1}(X)$  (Verf., dies. Zbl. 27, 264). Eigenschaften:  $[\beta, \alpha] = (-1)^{mn} [\alpha, \beta]$ ,  $[\beta, \alpha] = [\alpha, \beta]^{-1}$ , falls  $m = n = 1$ ; für  $n \geq 2$  ist  $[\alpha, \beta_1 + \beta_2] = [\alpha, \beta_1] + [\alpha, \beta_2]$ ; für  $m = 1$  und  $n \geq 2$  ist  $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ . ( $\alpha\beta$ :  $\alpha$  angewandt auf  $\beta$ , siehe 5.) 7. Beispiele:  $S^m \cup S^n = m$ -Sphäre und  $n$ -Sphäre mit genau einem gemeinsamen Punkt. Es gilt für  $m, n \geq 2$ :

$$\pi_{m+n-1}(S^m \cup S^n) = \pi_{m+n-1}(S^m) + \pi_{m+n-1}(S^n) + [\pi_m(S^m), \pi_n(S^n)].$$

$[\pi_m(S^m), \pi_n(S^n)]$  ist dabei die unendliche zyklische Gruppe, die von  $[\alpha, \beta]$  erzeugt wird, wo  $\alpha, \beta$  erzeugende Elemente von  $\pi_m(S^m)$ , bzw.  $\pi_n(S^n)$  sind, + für direkte Summe.  $\pi_3(S^2 \cup S^2)$  ist eine freie abelsche Gruppe vom Range 3. — 8. Relative Homotopiegruppen:  $\pi_n(X, X_0, x_0)$ ,  $x_0 \in X_0 \subset X$ , ist abelsch für  $n \geq 3$ . — 9. Die Homotopiesequenz  $\dots \rightarrow \pi_n(X_0) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, X_0) \rightarrow \pi_{n-1}(X_0) \rightarrow \pi_{n-1}(X) \rightarrow \dots$  ist exakt. 10. Gefaserte Räume:  $X$  sei gefasert mit der Faser  $F$  und der Basis  $B$ ,  $X/F = B$ ,  $F_0$  sei eine Komponente eines festen Exemplars der Faser.  $\pi_n(X, F_0)$  und  $\pi_n(B)$  sind isomorph. Man erhält mit Hilfe von 9. die exakte Sequenz des gefaserten Raumes:  $\dots \rightarrow \pi_n(F_0) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F_0) \rightarrow \pi_{n-1}(X) \rightarrow \dots$ . Sie ermöglicht bei speziellen Faserungen die Berechnung gewisser Homotopiegruppen der als  $X, F$  oder  $B$  auftretenden Räume. Beispiele:  $S^{2n-1}/S^1 = P^{(n)}$  (komplex-projektiver Raum von  $n$  komplexen Dimensionen),  $\Gamma_n$ : Gruppe der Drehungen der  $S^n$ ,  $\Gamma_n/\Gamma_{n-1} = S^n$ . (Inzwischen ist das Lehrbuch von Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton 1951, erschienen, in dem man sich über die meisten der in dem vorliegenden Bericht behandelten Dinge orientieren kann.)

Friedrich Hirzebruch.

Pontrjagin, L. S.: Die lokale Methode der Untersuchung der Abbildungen der Sphäre  $S^{n+k}$  auf die Sphäre  $S^n$ . Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 4 (44), 214—216 (1951) [Russisch].

Verf. gibt in diesem Bericht eine Übersicht (ohne Beweise) seiner bekannten „lokalen“ Methode zur Untersuchung der Homotopiegruppen  $\pi_{n+k}(S^n)$  der  $n$ -Sphäre  $S^n$  (vgl. dies. Zbl. 19. 88. 238). Zunächst wird der Grundgedanke des Verfahrens allgemein erläutert: Benutzung differenzierbarer (statt simplizialer) Approximationen, Übersetzung der Abbildungsprobleme in Fragen über Vektorfelder. Darauf werden die Ergebnisse in den Fällen  $k = 1$  und  $k = 2$  angegeben:  $\pi_{n+1}(S^n)$  ist für  $n \geq 3$  zyklisch von der Ordnung zwei,  $\pi_{n+2}(S^n)$  ist für  $n \geq 2$  ebenfalls



zyklisch von der Ordnung zwei (vgl. hierzu Verf., dies. Zbl. 35, 111, sowie G. W. Whitehead, dies. Zbl. 37, 397). Man vergleiche auch den Bericht von Rochlin (dies. Zbl. 39, 192). *Ewald Burger.*

**Nagumo, Mitio: Degree of mapping in convex linear topological spaces.** Amer. J. Math. 73, 497—511 (1951).

In this paper the author, following Leray and Schauder [see: Ann. sci. Ecole norm. sup., III. Sér. 51, 45 (1934) and C. r. Acad. Sci., Paris 200, 1082 (1935); this Zbl. 2, 73, 11, 164] establishes a theory of the degree of mapping in the case of convex linear topological spaces. He proves also a theorem on the invariance of domains in the case of the mapping of an open set of a complete, metric, linear, space into this space by a one-one transformation of the form  $x - f(x)$ ,  $x \in E$ ,  $f$  being completely continuous over the closure of the given open set. — The author says that the treatment of these questions by Leray and Schauder does not seem to be quite satisfactory. Perhaps his paper would have gained in completeness if he had indicated where he finds fault with these authors. Moreover no mention is made of the very important memoir of J. Leray [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 24, 95—248 (1945)] in which the degree of mapping is generalized and the case of convexoid spaces studied by powerful methods of algebraic topology. It is most likely that the details of the first two papers which fail to satisfy the author have been entirely set right in this article of Leray. — The author studies the mapping of what is commonly called now a locally convex linear space into itself. The treatment follows closely the one developed by Leray and Schauder in their paper of 1934 and is extremely clear and systematic. The last paragraph, on the invariance of domain is a very elegant application of the product theorem of Leray and of an interesting lemma due to S. Kakutani. *C. Racine.*

**Nagumo, Mitio: A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis.** Amer. J. Math. 73, 485—496 (1951).

As the author says in his introduction, his paper „establishes a theory of degree of mapping for open sets in a Euclidean space of finite dimension, based on the theory of infinitesimal analysis, which is free from the notion of simplicial mapping“. As he adds, the results are not new and are the same than those proved by L. E. J. Brouwer [Math. Ann. 71, 97—115 (1911)] but more elementary methods of demonstration may make it possible to incorporate Brouwer's theory of the degree into a course of classical Analysis. — The author begins by giving a definition of the degree of the mapping of a bounded open set of an  $m$ -dimensional Euclidean space into the same space, when the mapping is continuously differentiable on the closure of the open set. The definition is quite simple, based on the sign of the Jacobian of the mapping. — To prove that the degree varies continuously when the mapping depends continuously on a parameter requires however a rather very long proof to which eight out of the twelve pages of the article are devoted. Then it is an easy task to generalize the theory to the case of a mapping which is simply continuous. — The last section of this article gives the known expression of the degree of a product of mappings, function of the degrees of each of them. *C. Racine.*

**Whyburn, G. T.: An open mapping approach to Hurwitz's theorem.** Trans. Amer. math. Soc. 71, 113—119 (1951).

Es werden die topologischen Grundlagen für den bekannten Hurwitzschen Satz, daß der lokale Grad bei uniformer Annäherung der Grenzfunktion durch analytische Funktionen erhalten bleibt, festgestellt. Der Hauptsatz der Arbeit ist folgender: Es sei  $f$  eine kompakte offene null-dimensionale Abbildung vom Grade  $k$  der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit  $A$  auf  $B$  und  $H$  ein Kontinuum in  $f(A)$ . Dann gibt es eine Zahl  $e(H) > 0$ , so daß, wenn  $g$  eine offene null-dimensionale Abbildung von  $A$  auf  $B$  mit  $\varrho(f, g) < e(H)$  ist,  $g$  kompakt und vom Grade  $k$  auf  $g^{-1}(H)$  ist. — Interessante Anwendungen auf  $y$ -Stellen von offenen Abbildungen, so wie der oben genannte Hurwitzsche Satz, folgen ohne Mühe.

*Simion Stoilow.*

**Fort jr., M. K.: A characterization of plane light open mappings.** Proc. Amer. math. Soc. 2, 175—177 (1951).



By a mapping we shall always understand a continuous mapping whose domain is an open subset of the plane  $P$ , and whose range is a subset of  $P$ . If  $S \subset P$  is a simple closed curve, then  $S^*$  denotes the union of  $S$  and of the interior of  $S$ . A mapping  $f$  is minimal if  $f(S^*) \subset g(S^*)$  for every simple closed curve  $S$  lying in the domain of  $f$ , and for every mapping  $g$  which coincides with  $f$  on  $S$  and whose domain contains  $S^*$ . A mapping  $f$  is open if  $f(U)$  is open for every open  $U$ . A mapping  $f$  is light if  $f^{-1}(y)$  is totally discontinuous for each  $y$  in the range of  $f$ . — The author proves that a light mapping is open if and only if  $f$  is minimal. *Roman Sikorski.*

**Youngs, J. W. T.:** The representation problem for Fréchet surfaces. *Mem. Amer. math. Soc.*, Nr. 8, 143 p. (1951).

Zwei eindeutige, stetige Abbildungen  $f_1$  und  $f_2$  eines metrischen Raumes  $X$  in einen metrischen Raum  $Y$  heißen Frechet-äquivalent, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Homöomorphie  $h_\varepsilon$  von  $X$  auf sich existiert derart, daß für jeden Punkt  $x \in X$  die Punkte  $f_1(x)$  und  $f_2 h_\varepsilon(x)$  in  $Y$  einen Abstand  $< \varepsilon$  voneinander haben. Jede Klasse  $[f]$  Frechet-äquivalenter Abbildungen heißt eine Frechetsche Mannigfaltigkeit. Das allgemeine Repräsentationsproblem lautet: Ist ein Repräsentant  $f$  von  $[f]$  gegeben, so sind alle anderen Repräsentanten von  $[f]$  zu finden. M. a. W. es sind Kriterien für die Frechet-Äquivalenz zweier Abbildungen von  $X$  in  $Y$  anzugeben. Verf. löst dieses schwierige Problem für den Fall der Frechetschen Flächen, d. h. für den Fall, daß  $X$  eine (kompakte, zusammenhängende, berandete oder geschlossene) 2-Mannigfaltigkeit ist.

*Georg Nöbeling.*

**Krasnosel'skij, M. A.:** Zwei Aufgaben. *Uspechi mat. Nauk* 6, Nr. 5 (45), 162—165 (1951) [Russisch].

In der Terminologie von H. Hopf [Fundam. Math. 28, 33—57 (1937); dies. Zbl 15, 276] würden die beiden Vermutungen des Verf. besagen, daß (A) jede freie Abbildung der  $n$ -dimensionalen Sphäre  $S^n$  in sich von Null verschiedenen Grad hätte und daß (B) jede freie Überdeckung der  $S^n$  mit abgeschlossenen Mengen aus wenigstens  $n + 2$  Mengen bestünde [Verallgemeinerungen von Sätzen von Lusternik-Schnirelmann (1930) und Borsuk (1933)]. Für  $n \geq 3$  sind beide Vermutungen schon von Hopf (a. a. O.) widerlegt worden; daß (A) auch für  $n = 2$  nicht zutrifft, zeigt ein Beispiel von Ref. [Math. Nachr. 7, 183—185 (1952)]. — Bez. des Beweises von (B) für  $n = 2$  sind die Literaturangaben der Arbeit zu ergänzen durch J. Wolff und A. Denjoy, Enseignement Math 32, 66, Remarque (1933), dies. Zbl. 8, 181; dort wird der Satz zwar nur für eineindeutige Abbildungen ausgesprochen, diese Voraussetzung ist aber, wie H. Hopf (a. a. O.) bemerkt hat, überflüssig und wird auch von Wolff und Denjoy beim Beweise nicht benutzt.

*Erika Pannwitz.*

**Titus, Charles J.:** A topological characterization of a class of affine transformations. *Duke math. J.* 18, 321—330 (1951).

Si consideri una successione  $x_\sigma$  ( $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) di periodo  $m$  ossia tale che  $x_{\sigma+m} = x_\sigma$  e una  $2^a$  successione  $a_q$  di ugual periodo  $m$ . La trasformazione:  $y_\sigma = - \sum_{q=1}^m a_q x_{\sigma-q+1}$  muta la successione  $x_\sigma$  in una successione  $y_\sigma$ , anch'essa di periodo  $m$ . A partire dalle due successioni  $x_\sigma, y_\sigma$  si costruisce un poligono chiuso orientato interpretando  $x_\sigma$  e  $y_\sigma$  come coordinate cartesiane ortogonali e assumendo come successivo a  $(x_\sigma, y_\sigma)$  il vertice  $(x_{\sigma+1}, y_\sigma)$  e come successivo a questo il vertice  $(x_{\sigma+1}, y_{\sigma-1})$ . L'Autore, utilizzando un precedente lavoro di Loewner (questo Zbl. 32, 74), dà una condizione necessaria e sufficiente perchè, qualunque sia la successione  $x_\sigma$  di periodo  $m$ , la trasformazione che la muta nella  $y_\sigma$  sia tale che rispetto al poligono suddetto l'ordine di qualsiasi punto (non appartenente al poligono) sia non negativo.

*Piero Buzano.*

**Lannér, Folke:** On complexes with transitive groups of automorphisms. *Meddel. Lunds Univ. mat. Sem.* 11, 71 S. (1951).

Referat s. dies. Zbl. 37, 398.

**Gardner, Martin:** Topology and magic. *Scripta math.* 17, 75—83 (1951).

Verf. beschreibt einige Taschenspielertricks, die auf topologischen Überlegungen beruhen; die meisten betreffen Knoten oder Verkettungen.

## Theoretische Physik.

### Mechanik:

● Goldstein, Herbert: *Classical mechanics*. Cambridge: Addison-Wesley Press, Inc. 1951. XII, 399 pp. \$ 7,—.

Das Buch gibt eine vollständige und nicht mit rein akademischen oder nur historisch interessanten Problemen überlastete Darstellung der analytischen Dynamik; ohne den klassischen Bestand an Sätzen und Methoden zu vernachlässigen, legt es dabei besonderes Gewicht auf die für die moderne Physik wesentlichen Begriffsbildungen. — Eine Einleitung (Kap. I) führt von den elementaren Sätzen zu den Lagrangeschen Gleichungen als geeigneter Grundlage für die Behandlung der Mechanik, von denen dann ein direkter Weg zum Hamiltonschen Variationsproblem weiterleitet (Kap. II), das seiner wahren Bedeutung entsprechend betont wird. Als Anwendung folgt in Kap. III eine ausführliche Behandlung des Zweikörperproblems, welche (als *Novum*) eine ausführliche klassische Diskussion von Streuproblemen einschließt. Die nächsten Kapitel (IV und V) befassen sich mit der Mechanik des starren Körpers, welche durch systematische Verwendung der Matrixschreibweise in elegante und knappe Form gebracht wird. Eingeschlossen ist eine in die Einzelheiten gehende Behandlung des kräftefreien und des symmetrischen schweren Kreisels. Ferner mag ein Abschnitt über die Cayley-Kleinsche Parametrisierung der Drehungen hervorgehoben werden, welcher auf natürliche Weise zur (quantenmechanischen) Theorie der Spinoren überleitet. Ein weiteres Kapitel (VI) befaßt sich mit der Mechanik der Relativitätstheorie und ihrer Lagrangeschen Formulierung. — Nachdem so die Lagrangesche Mechanik entwickelt und an Hand der heute wichtigsten Spezialfragen erläutert ist, befaßt sich ein zweiter Teil des Buches mit der Hamiltonschen Theorie. Kap. VII führt die Hamiltonschen (und Routhschen) Gleichungen sowie das ihnen angepaßte Variationsprinzip „der kleinsten Wirkung“ ein. Kap. VIII ist der Theorie der kanonischen Transformationen gewidmet und entwickelt sie in großer Allgemeinheit und eleganter Form; ein Hinweis auf ihre homogene Formulierung fehlt nicht, und sogar Poincarés Integralinvarianten werden ausführlich dargestellt. Die Formulierung der mechanischen Gesetze mit Hilfe von Lagrange- und Poissonklammern gibt einen natürlichen Anknüpfungspunkt für die Quantenmechanik, und auch der (in der Quantentheorie meist mehr als in der klassischen Mechanik beachtete) Zusammenhang zwischen den Symmetrien eines Problems und seinen Integralen der Bewegung wird entwickelt. Kap. IX bringt die Hamilton-Jacobische Theorie sowie die Theorie der Winkelvariablen, mit Anwendungen auf den harmonischen Oszillator und das Keplersche Problem; der Zusammenhang mit der geometrischen Optik öffnet wieder eine Brücke zur Wellenmechanik. — Die zwei letzten Kapitel handeln von zwei bedeutenden Spezialfragen: Kap. X bringt die Theorie der kleinen Schwingungen diskreter Systeme, Kap. XI die Anwendung Lagrangescher und Hamiltonscher Methoden auf kontinuierlich-mechanische Systeme und auf Feldprobleme. Diese in der Quantentheorie der Felder unentbehrlich gewordene Formalismus wird allgemein entwickelt, um dann am elementaren Problem der Schallwellen in Gasen sowie am komplizierteren der Maxwell'schen Elektrodynamik erläutert zu werden. — Insgesamt stellt das Buch in seiner Vollständigkeit und prägnanten Kürze vielleicht die für den Physiker wertvollste aller erhältlichen Darstellungen der klassischen Mechanik dar.

*M. R. Schajroth.*

● Smart, E. Howard: *Advanced dynamics. Vol. I: Dynamics of a particle*. London: Macmillan 1951. 40 s.

● Smart, E. Howard: *Advanced dynamics. Vol. II: Dynamics of a solid body*. London: Macmillan 1951. 40 s.

Das Werk gibt die Vorlesungen wieder, die der 1945 verstorbene Verf. an der Universität von London gehalten hat. Das Manuskript wurde von dem vor Beendigung des Druckes ebenfalls verstorbenen Herausgeber F. G. W. Brown stark überarbeitet. — Die Darstellungsweise entspricht derjenigen der älteren englischen Mechanik-Lehrbücher. Das Hauptgewicht liegt auf den Anwendungen der stets kurz gefaßten allgemeinen Entwicklungen. Diese sind daher durchsetzt von einem didaktisch geschickt aufgebauten System von etwa tausend mit Ergebnissen versehenen und teilweise auch vollständig durchgerechneten Übungsbeispielen. — Inhaltlich konnte Verf. bei den verhältnismäßig geringen mathematischen Voraussetzungen nicht so weit vordringen wie Routh und Whittaker in ihren bekannten Lehrbüchern. Hinweise auf weitergehende Untersuchungen sind ziemlich selten und beziehen sich meistens nur auf ältere Literatur, was besonders bei der etwas knappen Behandlung der Schwingungen und der Kreiseltheorie zu bedauern ist, welche die interessante Entwicklung der letzten Jahrzehnte kaum berücksichtigt. — Obgleich Verf. vom Vektorbegriff häufig Gebrauch macht, verzichtet er völlig auf die Benutzung der Vektorrechnung, durch die seine Darstellung einfacher und durchsichtiger geworden wäre. — Als Eigenart gegenüber anderen Lehrbüchern sei hervorgehoben, daß die Stoßvorgänge sehr ausführlich behandelt sind und daß der Bewegung von Ketten ein besonderes Kapitel eingeräumt ist. — Der erste Band befaßt sich mit der Dynamik des Massenpunktes in den Kapiteln: I. Einführung (enthält im wesentlichen die Kinematik des Punktes). II. Grundprinzipie der Dy-



namik. III. Geradlinige Bewegung eines Massenpunktes. IV. Beschleunigungen parallel zu rechtwinkligen Achsen. V. Radiale und transversale Beschleunigungen. Zentralkräfte. VI. Freie Bewegung unter reziprok quadratischem Anziehungsgesetz. VII. Zweidimensionale geführte Bewegung. VIII. Bewegung im widerstehenden Medium. IX. Zweidimensionale Bewegung einer Kette. X. Dreidimensionale Bewegung eines Massenpunktes. — Der zweite Band enthält die Dynamik des starren Körpers in den Kapiteln: I. Trägheits- und Deviationsmomente. II. Ebene Kinematik. III. d'Alembertsches Prinzip und Bewegungsgleichungen. IV. und V. Zweidimensionale Bewegung des starren Körpers unter endlichen Kräften und unter Stoßkräften. VI. Dimensionen und dynamische Ähnlichkeit. VII. und VIII. Dreidimensionale Bewegung. IX. Lagrangesche Gleichungen. X. Kräftefreie Bewegung. XI. Kreiselbewegung. XII. Hamiltonsche Gleichungen. Allgemeine Impulssätze. XIII. Theorie der kleinen Schwingungen. — Im Text eingestreut sind kurze Abschnitte über Leben und Werke großer Mathematiker und Physiker.

H. Kauderer.

● Banach, Stefan: *Mechanics*. Translated by E. J. Scott. (Monografie Matematyczne. Tom XXIV.) Warszawa-Wrocław: Nakładem Polskiego Towarzystwa Matematycznego 1951. IV, 546 p.

Dieses Lehrbuch beschränkt sich auf die Mechanik des Punktes und starren Körpers in einer Auffassung, wie sie bei der zunehmenden Bedeutung dieses Gegenstandes als Vorbereitung für die moderne Physik nicht entbehrt werden kann. Nur das Kapitel VI bringt etwas mehr von technischen Dingen. Der Eigenart des Studiums der Mechanik, für das die selbständige Bearbeitung einschlägiger Aufgaben unerlässlich ist, wird durch die zahlreichen, zumeist elementaren Beispiele Rechnung getragen. Nur die drei letzten Kapitel gehen etwas über den elementaren Standpunkt hinaus, doch erfüllt auch hier die Darstellung die Bedingungen der Einfachheit und Anschaulichkeit, die an ein elementares Lehrbuch gestellt werden müssen. — Gliederung: I. Theorie der Vektoren, II. Kinematik des Punktes, III. Dynamik des Massenpunktes, IV. Geometrie der Massen, V. Systeme von Massenpunkten, VI. Statik, VII. Kinematik und VIII. Dynamik des starren Körpers, IX. Prinzip der virtuellen Arbeiten, X. Dynamik holonom Systeme (Lagrangesche und Hamiltonsche Gleichungen), XI. Variationsprinzip der Mechanik.

Theodor Pöschl.

● Clements, G. R. and L. T. Wilson: *Analytical and applied mechanics*. 3rd ed. London: McGraw-Hill 1951. XI, 463 p. 47 s.

● Lufe, A. I.: *Operatorenrechnung und ihre Anwendung auf Probleme der Mechanik*. — 2. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 432 S. [Russisch].

Maravall Casesnoves, Darío: *Der Kraft- und der Massebegriff in der Physik und das Problem der natürlichen Geometrie*. Euclides, Madrid 11, 61—65 (1951).

● Béghin, H. et G. Julia: *Exercices de mécanique*. I, 2. — 2. éd. Paris: Gauthier-Villars 1951. 240 p.

Possel, René de: *La notion physique d'énergie vis-à-vis des définitions du travail et de la force*. Ann. Inst. Fourier 2, 185—195 (1951).

Zusammenfassende Übersicht über frühere Arbeiten der Herren Béghin, Brelot und de Possel über die Begriffe Energie, Arbeit und Kraft. Bemerkenswert besonders der Satz, daß die Kraft durch die Leistung bestimmt ist, wenn diese als eine lineare Funktionelle der Geschwindigkeit in einer Borel-Menge vorausgesetzt wird. Dies folgt aus einem Satz von F. Riesz. Die Leistung erscheint als ein Stieltjessches Integral. Die genannten Autoren haben in den letzten Jahren die Bedeutung des Stieltjesschen Integrals für die Mechanik klar herausgearbeitet und sind dadurch Bestrebungen des Ref. aus derselben Zeit begegnet. (Vgl. dessen Theoretische Mechanik, Berlin 1949, S. 44, 119, 509; dies. Zbl. 36, 243.)

Georg Hamel.

Tietz, Horst: *Die klassische Mechanik als Transformationstheorie*. Z. Naturforsch. 6a, 417—420 (1951).

Die enge Beziehung der klassischen Mechanik zu den kanonischen Transfor-



mationen ist bekannt. Verf. zeigt, daß das Lagrangesche Prinzip bei holonomen Systemen geradezu dadurch ersetzt werden kann, daß man fordert, der Übergang vom Anfangszustand zu einem späteren geschehe durch eine kanonische Transformation.

*Georg Hamel.*

**Wilker, P.:** Zur Homogenisierung des kanonischen Formalismus. *Z. Phys.* **130**, 245—255 (1951).

Bekanntlich kann man in der analytischen Mechanik die Zeit als eine weitere Koordinate einführen. Gewöhnlich geschieht das hinterher im Laufe der Betrachtung. Man kann aber auch von vornherein homogenisieren und das Hamiltonsche Prinzip mit einer homogenen Lagrangeschen Funktion erster Dimension ansetzen, jedoch mit einer Koordinate mehr als das Problem an sich besitzt. Als Integrationsvariable dient eine Hilfsgröße, die sonst nicht auftritt. Man kann nun ganz nach Belieben eine der Variablen auszeichnen und die Rolle der Zeit spielen lassen, indem man ihre Ableitung aus der Lagrangeschen Funktion herauszieht und die Verhältnisse der anderen Ableitungen zu der ausgezeichneten als neue Ableitungen auffaßt. Verf. rechnet die ganze Theorie einschließlich der kanonischen Gleichungen und der Hamilton-Jacobischen Gleichung durch.

*Georg Hamel.*

**Werfel, A. und P. Wilker:** Über mechanische und relativistische Erhaltungssätze. *Z. Phys.* **130**, 256—258 (1951).

Verff. zeigen, wie die von dem zweiten Verf. aufgebaute Theorie (s. vorsteh. Referat) leicht gestattet, die bekannten Erhaltungssätze, auch die der relativistischen Mechanik zu gewinnen.

*Georg Hamel.*

**Lense, Josef:** Projektive Kräftetransformation im  $R_n$ . *Arch. der Math.* **2**, 445—448 (1951).

Die Arbeit verallgemeinert eine Kräftetransformation, die im  $R_2$  von P. Appell gelegentlich erwähnt und im  $R_3$  vom Ref. benützt wurde, auf den  $R_n$ . Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Massenpunktes im  $R_n$  werden so transformiert, daß sich die Bahnkurven des Massenpunktes und die Wirkungslinien der an ihm angreifenden Kraft kollinear abbilden. Die Kraft- und Momentkomponenten zusammen genommen transformieren sich wie die Linienkoordinaten bei dieser Kollineation. Die Zeit muß in geeigneter Weise mittransformiert werden, damit die Bewegungsgleichungen (Beschleunigung proportional Kraft) wieder in Bewegungsgleichungen übergehen.

*Robert Sauer.*

**Tordion, Georges V.:** Sur les forces d'inertie. *Elemente Math.* **6**, 73—77 (1951).

Elementare Überlegungen über die Trägheitskräfte bei Relativbewegung unter didaktischem Gesichtspunkt.

*Georg Hamel.*

**Giger, Adolf:** Elementare Bestimmung der Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld. *Elemente Math.* **6**, 77—81 (1951).

Beim Einkörperproblem kann aus Flächensatz und Energiesatz eine Gleichung zwischen dem Radiusvektor und dem Normalabstand der Tangente gewonnen werden, die auch direkt für die Kegelschnitte aufgestellt werden kann. Damit sind die Keplerschen Gesetze aus den beiden genannten Sätzen elementar abgeleitet.

*Georg Hamel.*

**Maslov, P. G.:** Über eine zusätzliche Bedingung zwischen den Koordinaten eines Zentralkraftsystems und die Regeln ihrer Berücksichtigung in Gleichungen und Matrizen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **79**, 767—770 (1951) [Russisch].

**Mučnikov, V. M.:** Über ein allgemeines Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichung eines Zuges. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **81**, 521—524 (1951) [Russisch].

**Rubašov, A. N.:** Die Bewegung der Hauptträgheitsachsen in einem Körper veränderlicher Masse. *Priklad. Mat. Mech.* **15**, 385—386 (1951) [Russisch].

Soit un corps matériel, de densité variable avec le temps suivant une loi connue. L'A. donne l'expression de la vitesse instantanée de rotation du trièdre principal d'inertie du corps en un point fixe.

*Julien Kravtchenko.*

Mohr, Ernst: Die Bewegung eines Kreisels bei vorgegebenem Drehvektor. *Math. Nachr.* 6, 1—10 (1951).

Das alte Problem, die Bewegung eines Kreisels aus dem gegebenen Drehvektor zu bestimmen, wird hier so gelöst, daß zunächst in der Vektor-Darstellung das Zeitintervall à la Cauchy „zerhackt“ wird, so daß der Grenzübergang zu einer unendlichen Reihe führt. Diese aber kann mit Hilfe der Matrizenrechnung beherrscht werden.

*Georg Hamel.*

Fedorov, E. P.: Partielle Bestimmung der Koeffizienten der Hauptglieder der Nutation in der Neigung und in der Länge. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 80, 569—572 (1951) [Russisch].

Heinrich, G.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Bewegung des pinnen-gelagerten, symmetrischen Kreisels. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 5, 322—339 (1951).

Heinrich, G.: Studie über den Lauf des Fleuriais-Kreisels. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 5, 138—154 (1951).

Zadeh, Lotfi A.: Initial conditions in linear varying-parameter systems. *J. appl. Phys.* 22, 782—786 (1951).

Bei einem linearen System seien Eingang  $u(t)$  und Antwort  $v(t)$  durch die Differentialgleichung verbunden  $L(p; t) v(t) = K(p; t) u(t)$ , wobei  $p = d/dt$ ,  $L$  und  $K$  Polynome in  $p$  mit zeitabhängigen Koeffizienten sind. Man kann beliebige Anfangsbedingungen erfassen, indem man dem gegebenen Eingang  $u(t)$  eine passende Linearkombination von Deltafunktionen (Deltafunktion  $\nu$ -ter Ordnung ist problematisch als  $\nu$ -te Ableitung der Einheitsstoßfunktion festgelegt!) überlagert und dann das System behandelt, als lägen verschwindende Anfangswerte vor. Die einfachen Formeln lassen sich auf eine Gestalt bringen, die ähnlich der Lösungsformel bei der Laplace-Transformation für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist.

*Lothar Collatz.*

Erugin, N. P.: Einige allgemeine Fragen der Theorie der Stabilität einer Bewegung. *Priklad. Mat. Mech.* 15, 227—236 (1951) [Russisch].

Teilweise in Anlehnung an die Arbeiten von Liapunoff beweist Verf. eine Reihe von Sätzen über die Stabilität der Bewegung von Einzelpunkten und Systemen von Punkten, deren Geschwindigkeiten gegebene Funktionen von Ortskoordinaten dieser Punkte, zuweilen auch der Zeit, sind. Die Sätze beziehen sich insbesondere auf die Beschränktheit von Lösungen, auf ihre Fortsetzbarkeit über die Grenzen eines endlichen Zeitintervalls hinaus, auf die Existenz von Grenzzyklen und von Gleichgewichtslagen, sowie auf Eigenschaften von Grenzflächen, die gewisse Bahnsysteme umschließen.

*S. Woinowsky-Krieger.*

Četaev, N. G.: Über die Wahl der Parameter eines stabilen mechanischen Systems. *Priklad. Mat. Mech.* 15, 371—372 (1951) [Russisch].

Aux systèmes stables à un nombre fini de degrés de liberté, l'A. fait correspondre un choix particulier de la fonction de Liapounov. La connaissance des extremum de celle-ci permet de choisir les paramètres du système d'une manière particulièrement avantageuse au point de vue des applications.

*Julien Kravtchenko.*

Haacke, W.: Die stabilen Lagen eines  $n$ -fachen ebenen Pendels mit vertikal periodisch erschüttertem Aufhängepunkt. *Z. angew. Math. Mech.* 31, 259—260 (1951).

Castro Brzezicki, A. de: Über die Gleichgewichtslagen eines Punktes. *Gac. mat., Madrid, I. Ser.* 3, 85—87 (1951) [Spanisch].

Koval'skij, B. S.: Querschwingungen der Last beim Herablassen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 78, 645—647 (1951) [Russisch].

Milisaps, Knox and J. C. McPherson: The oscillations of magnetic suspensions. *J. appl. Phys.* 22, 429—432 (1951).

In magnetischen Aufhängungen, wie sie bei hochempfindlichen Instrumenten zur Verminderung des Einflusses der Reibung benutzt werden, treten Schwingungsvorgänge auf, die im eindimensionalen Fall durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben werden können. Die Schwingungen, welche ein beweglicher magnetischer Pol  $P_2$  von der Masse  $m$  zwischen zwei festen Polen  $P_1$  und  $P_3$  ausführt, genügen der Differentialgleichung

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{P_1 P_2}{(e + \xi)^2} - \frac{P_2 P_3}{(2a - e - \xi)^2} - \Delta \frac{d\xi}{dt} \left| \frac{d\xi}{dt} \right|.$$

Hierin bedeutet  $2a$  den Abstand der beiden festen Pole,  $e$  den Abstand des festen Pols  $P_1$  von der Ruhelage des beweglichen,  $\xi$  die Verschiebung des beweglichen aus seiner Ruhelage,  $\Delta$  die Dämpfungskonstante. — An Hand dieser Differentialgleichung untersuchen die Verfasser die ungedämpften Schwingungen ( $\Delta = 0$ ) zwischen gleichen und ungleichen Polen ( $P_1 = P_3$ ,  $P_1 \neq P_3$ ). In diesen beiden Fällen lassen sich die Lösungen mit Hilfe elliptischer Funktionen darstellen. — Im Falle gedämpfter Schwingungen scheint die Lösung nicht in geschlossener Form angebar zu sein. Verff. beschreiben hier, wie die Aufgabe bei kleinen Werten von  $\Delta$  näherungsweise auf numerischem Wege gelöst werden kann.

W. Quade.

Magnus, K.: Erzwungene Schwingungen des linearen Schwingers bei nicht-harmonischer Erregung. Z. angew. Math. Mech. 31, 324—329 (1951).

Die lineare Schwingungsgleichung mit nichtharmonischer rechter Seite löst man i. a. durch Entwicklung der rechten Seite in ihre Fourierreihe und Anwendung des Superpositionsgesetzes. Diese Methode ist im speziellen Fall langwierig, und man erhält dabei die Lösung als Fourierreihe, an der man nicht unmittelbar die interessierenden Daten der Schwingung ablesen kann. Für drei Fälle werden hier diese Größen direkt abgeleitet: für eine periodische gleichgerichtete und eine abwechselnd in beiden Richtungen wirkende Stoßkraft und für eine Kraft, die sich so auswirkt, als ob die Gleichgewichtslage des Schwingers periodisch abwechselnd zwei verschiedene Lagen einnimmt. In allen drei Fällen ist es möglich, die Lösung durch Anstückelung von Teilen der freien Schwingung herzustellen. Die Anstückelungsbedingungen ergeben sich aus den wirkenden Kräften bei Berücksichtigung der Stetigkeitsforderungen. Die max. Amplituden des Schwingers (Resonanzfälle) werden rechnerisch und zeichnerisch (im Relief) in Abhängigkeit von der Periode der Erregung und von der Dämpfung des Schwingers angegeben. Ref. vermißt eine kurze Ableitung der Anstückelungsbedingungen.

Wolfhart Haacke.

Weiß, Herbert K.: Analysis of a friction damper for clutch-type servomechanisms. J. aeronaut. Sci. 18, 676—682 (1951).

Loeb, Julien: Analyse harmonique de servomécanismes non linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 733—735 (1951).

Chil'mi, G. F.: Über vollständig instabile Systeme von  $n$  gravitierenden Körpern. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 419—422 (1951) [Russisch].

Considérons  $n$  points matériels  $P_i$ , de masse  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), s'attirant suivant la loi de Newton. Posons:  $r_{ij}(t) = |\vec{P_i P_j}|$ ;  $\sigma(t) = \text{minimum des } \left\{ \frac{dr_{ij}}{dt} \right\}$  à l'instant  $t$ ;  $\varrho(t) = \min \{r_{ij}(t)\}$ . L'A. montre alors que  $\varrho(t) \rightarrow \infty$  avec  $t \rightarrow \infty$  chaque fois que les conditions initiales vérifient les inégalités:  $\sigma(0) > 0$ ;  $\sigma^2(0) \geq \frac{8M}{\varrho(0)}$ , où  $M$  est une constante, s'exprimant simplement au moyen des  $m_i$  seuls. — Le résultat de l'A. peut être étendu aussi au cas où  $t \rightarrow -\infty$ . L'A. en déduit d'intéressantes remarques concernant le problème de la captation.

Julien Kravtchenko.

• Popoff, Kyrille: Le mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité. (Mém. Sci. math., no. 117.) Paris: Gauthier-Villars 1951. 49 S.

In einem ersten Teil werden die bisherigen Arbeiten zur Berechnung der Dreh-



bewegung eines Geschosses im Zusammenhange dargestellt. Dabei wird insbesondere auf die zahlreichen Arbeiten des Verf. hingewiesen, der sich um die Einführung neuerer analytischer Methoden verdient gemacht hat. Da die Eulerschen Gleichungen des symmetrischen Kreisels für die Nutationsbewegung, welche nach Abzug der bei drallstabilisierten Geschossen vorwiegenden Präzessionsbewegung übrigbleibt, zu linearen Gleichungen führen, so läßt sich die Bewegung durch Quadraturen geschlossen darstellen. Für die Diskussion der Lösungen sind gleichwohl Entwicklungen nach Potenzreihen natürlicher oder künstlich hineingebrachter Parameter von Vorteil. Der bekannte Satz von Poincaré über die Konvergenz solcher Entwicklungen findet ständige Anwendung. Es werden Präzession und Nutation näher betrachtet, dabei finden auch Reibungskräfte, Magnuseffekt usw. Berücksichtigung. — Ein zweiter Teil bringt in mehr qualitativer Art eine Übersicht der Aussagen, welche sich über die an drallenden Geschossen auftretenden Luftkräfte dank den Ergebnissen der theoretischen wie der experimentellen Aerodynamik machen lassen, ferner Angaben über die aus den Schießversuchen zu ziehenden Schlüsse. — Beigefügt ist ein reichhaltiges Literaturverzeichnis, auf das im Text freilich nur mit den Namen der betr. Verfasser Bezug genommen wird.

Uwe Timm Bödewadt.

\* Green, John W.: Exterior ballistics. Math. Mag. 25, 87—91 (1951).

Frye, W. E.: On the accuracy of the long-range ballistic rocket. J. appl. Phys. 22, 585—589 (1951).

Roth-Desmeules, Ernst: Zur Berechnung der Flugbahnscharen ferngesteuerter Raketen. Z. angew. Mat. Phys. 2, 487—489 (1951).

### Elastizität. Plastizität:

• Suter, Ernst: Die Methode der Festpunkte. Dritte, neu bearbeitete Aufl. von E. Traub. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1951. XII, 216 S. Geb. DM 21,—.

This is a considerably revised and shortened version of the book by Dr. Ernst Suter that first appeared in 1921 under the same title. It presents a graphical method of analyzing continuous beams and rigid frames of all kinds based on employment of the so-called „fixed-points“ (Festpunkte), of which two are found in each member of a rigid frame or continuous beam at locations depending only on the characteristics of the structure and not on the loads. With knowledge of the fixed-points and the loads the bending moment diagram can be constructed. Topics covered are: continuous beams, frames with crane-loads, frames with wind-loads, frames with and without sidesway and made up of members of constant section although varying in section from member to member, frames with members of non-uniform section.

Merit P. White.

Teissier du Cros, François: Sur l'expression au moyen de deux fonctions de variable complexe des déplacements dans un prisme à connexion multiple où règnent des tensions résiduelles. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 127—129 (1951).

Verf. behandelt den ebenen Verzerrungszustand sowie den ebenen Spannungszustand für einen mehrfach zusammenhängenden Bereich  $D_0$  (Koordinaten  $x, y$ ) unter der Annahme, daß auch im Ausgangszustand bereits Spannungen (Restspannungen) vorhanden sind.  $D_0$  entstehe aus einem einfach zusammenhängenden Bereich durch Aussondern der singulären Punkte  $z_1, z_2, \dots, z_h$  und der „Löcher“  $A_{h+1}, \dots, A_{h+g}$  (innere Punkte  $z_{h+1}, \dots, z_{h+g}$ ,  $z = x + iy$ ). Es seien  $u, v$  die Verschiebungskomponenten,  $-u_0, -v_0$  die zur Kompensation der Anfangsspannungen erforderlichen Verschiebungen. Mit  $x = \frac{1}{2} \cdot (z + t)$ ,  $y = \frac{1}{2} \cdot i(t - z)$  gehen  $W(x, y) = u + iv$ ,  $W_0(x, y) = u - iv$  in  $W'(z, t)$ ,  $W'_0(z, t)$  über. Dann werden zunächst  $W'$ ,  $W'_0$  und die Spannungskomponenten für den Fall des einfach

zusammenhängenden Bereichs  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$  in bekannter Weise mittels dreier komplexer Funktionen ausgedrückt und der Zusammenhang mit der Airyschen Spannungsfunktion hergestellt. Hierauf wird für den allgemeinen Fall eine Beziehung für  $W'_0(z, t)$  entwickelt, in die neben den durch die Singularitäten bedingten Umlaufgrößen zwei willkürliche in  $D_0$  reguläre Funktionen eingehen.

*Fritz Reutter.*

**Teissier du Cros, François:** Sur la décomposition d'un état d'équilibre quelconque en deux états simples qui dérivent d'une fonction holomorphe chacun. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 223—225 (1951).

Unter teilweiser Benutzung von Entwicklungen der vorstehend referierten Note wird die Zerlegung eines (ebenen) elastischen Gleichgewichtszustandes in zwei solche auf zwei beliebige Punkte  $A_1, A_2$  (komplexe Koordinaten  $a_1, a_2$ ) des ebenen Bereichs bezogene Zustände behandelt. Es seien  $P(z), Q(z)$  zwei analytische Funktionen, so daß  $\mu W' = P(z) - z dP^*/dt + dQ^*/dt$ ,  $\mu$  elastische Konstante, \* bezeichnet die konjugiert komplexe Größe, übrige Bezeichnungen s. vorsteh. Referat. Dann genügen die zu  $A_1, A_2$  gehörenden Funktionen  $P_1(z), P_2(z)$  dem System  $P_1 + P_2 = P$ ,  $a_1^* P_1 + a_2^* P_2 = Q$  und zur Beschreibung jeder der beiden Komponentenzustände wird nur noch eine Funktion  $P_i(z)$  benötigt. Es werden verschiedene Eigenschaften und Sonderfälle der Überlagerung zweier solcher Zustände („état à centre“) untersucht;  $A_1, A_2$  können auch unendlich fern sein.

*Fritz Reutter.*

**Teissier du Cros, François:** Sur certaines intégrales de contour invariantes dans une éprouvette de photoélasticimétrie. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 282—283 (1951).

Verf. beweist unter Benutzung von Ergebnissen der vorst. referierten Noten einige Integralbeziehungen, die sich bei spannungsoptischen Untersuchungen an Modellkörpern ergeben. Es wird der Spannungszustand in einem ebenen, unter Umständen mehrfach zusammenhängenden Bereich  $A$  betrachtet, dessen Berandung gegebenen äußeren im Gleichgewicht befindlichen Kräften unterworfen sei.  $N_1, N_2, T_3$  seien die Spannungskomponenten in einem inneren Punkt  $m(x, y)$  und es sei  $2M(x, y) = N_1 - N_2 - 2iT_3$ , dann ist zum Beispiel

$$\int_{\Gamma} (\partial M / \partial x + i \partial M / \partial y) \cdot (dx + i dy) = 0,$$

( $\Gamma$  beliebige, einen einfach zusammenhängenden Bereich begrenzende, zu  $A$  gehörende Kurve) ufs.

*Fritz Reutter.*

**Morris, Rosa M.:** The boundary-value problems of plane stress. Quart. J. Mech. appl. Math. **4**, 248—256 (1951).

Auf Grund einer früheren Arbeit [Philos. Mag., VII. Ser. **38**, 153 (1947)] wird die Spannung in einer endlich ausgedehnten elliptischen Platte unter der allgemeinsten Form der Kantenbelastung in der Plattenebene behandelt. *Joachim Pretsch.*

**Korenev, B. G.:** Über die Verbiegung einer auf elastischem Grund liegenden Platte durch Lasten, die auf einer Geraden oder einem Rechteck verteilt sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 411—414 (1951) [Russisch].

Verf. stellt in bekannter Weise die Durchbiegung einer unendlichen, elastisch gebetteten Platte durch ein Fouriersches Doppelintegral dar. Ein in den Integranden eingehender Parameter drückt sich dabei durch einen Kern aus, der von den mechanischen Eigenschaften der Bettung abhängt. Es folgt eine Übersicht von Lösungen, die sich bei einigen Sonderannahmen über die Beschaffenheit der Bettung, sowie bei verschiedenen Gesetzen der Lastverteilung über eine Rechteckfläche bzw. über eine Gerade ergeben.

*S. Woinowsky-Krieger.*

**Goodier, J. N. and I. M. Neou:** The evaluation of theoretical critical compression in sandwich plates. J. aeronaut. Sci. **18**, 649—656 (1951).

**Pozzati, Piero:** Contributo al calcolo dei solai a fungo. *Rivista Mat. Univ. Parma* 2, 123—131 (1951).

Verf. behandelt die unendlich erstreckte, in einem rechteckigen Gitter von Punkten unterstützte Pilzplatte und verwendet einfache Reihen zur strengen Darstellung ihrer Biegefläche unter den folgenden Belastungsbedingungen: (1) Gleichförmig über einer Rechteckfläche verteilte Last in der Mitte eines jeden Feldes; (2) gleichförmige Linienlast in sämtlichen Stützenfluchten einer Richtung bzw. eine Kombination solcher Linienlasten in beiden Richtungen zugleich; (3) Punktlasten in den Stützenfluchten einer Richtung in gleicher Entfernung von den beiden Nachbarstützen. Lastform (1) schließt in sich auch den Fall einer Pilzdecke unter mittigen Punktlasten bei gleichförmig über lauter gleiche Rechteckflächen verteilten Stützenreaktionen ein. Numerische Angaben über Durchbiegungen sowie die größten Biegemomente findet man für den Sonderfall einer Pilzplatte mit quadratischen Feldern.

*S. Woinowsky-Krieger.*

**Vajnberg, D. V.:** Zur Berechnung zusammengesetzter Scheiben und Platten unter der Wirkung von Punktkräften. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 80, 721—724 (1951) [Russisch].

Gegeben ist eine aus einem Kreisring und einem kreisförmigen Mittelstück von verschiedener Elastizität zusammengesetzte Scheibe. Das ebene Problem der Belastung dieser Scheibe durch zwei an den Enden eines Durchmessers wirkende Druckkräfte führt auf Summenausdrücke für die Spannungen, deren Konvergenz besonders schlecht ist bei einem relativ schmalen Reifen, sowie bei sehr unterschiedlichen Elastizitätsmoduln des Reifens und des Mittelstücks. Indem Verf. aus den Reihengliedern gewisse Bestandteile absondert, die sich geschlossen summieren lassen, gelingt es ihm, die Konvergenz der Restsummen bedeutend zu verbessern. Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens wird durch ein numerisches Beispiel illustriert.

*S. Woinowsky-Krieger.*

**Klitchieff, J. M.:** Buckling of a triangular plate by shearing forces. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 4, 257—259 (1951).

**Klitchieff, J. M.:** On the stability of plates reinforced by longitudinal ribs. *J. appl. Mech.* 18, 364—366 (1951).

**Abramjan, B. I. und M. M. Džrbašjan:** Über die Torsion einer Welle von veränderlichem Querschnitt. *Priklad. Mat. Mech.* 15, 451—472 (1951) [Russisch].

Verf. gibt eine Lösung für das Torsionsproblem einer einmal abgesetzten Zylinderwelle bei beliebiger achsensymmetrischer Verteilung der Belastung. Für die von Michell eingeführte Spannungsfunktion wird ein Summenansatz in Besselfunktionen gemacht, wobei zur Trennung von Variablen die Methode der Hilfsfunktionen nach N. Arutjunjan (dies. Zbl. 37, 107) herangezogen wird. Es entsteht schließlich ein unendliches reguläres System von linearen Gleichungen für die Reihenwerte des Ansatzes. Die Lösung wird numerisch ausgewertet für einen Sonderfall, wo die Drehbelastung über die beiden Endzonen der Mantelfläche der Zylinderwelle gleichförmig verteilt ist.

*S. Woinowsky-Krieger.*

**Sen, Bibhutibhusan:** Note on the stresses produced by nuclei of thermo-elastic strain in a semi-infinite elastic solid. *Quart. appl. Math.* 8, 365—369 (1951).

Nachdem J. N. Goodier [*Philos. Mag.*, VII. Ser. 23, 1017 (1937)] thermoelastische Spannungen berechnet hatte, die von einem Wärmekern in einem allseits unendlichen homogenen Körper erzeugt werden, wird hier die Lösung für einen durch eine Ebene begrenzten halbumendlichen Körper angegeben. [Vgl. Verf., *Bull. Calcutta math. Soc.* 32, 73—83 (1940).] Dabei zeigt sich der Einfluß des an der Grenzfläche gespiegelten Kernes. Durch Integration der Lösung läßt sich dann auch eine stetige Wärmeverteilung behandeln.

*Uwe Timm Bödewadt.*



Ling, Chih-Bing: On torsion of prisms with longitudinal holes. *Quart. appl. Math.* 9, 247—262 (1951).

Es wird ein auf der Spiegelungsmethode beruhendes Lösungsverfahren für das Torsionsproblem von Prismen mit Hohlräumen in der Längsrichtung mitgeteilt. Das Verfahren ist nur auf folgende vier Querschnittsformen anwendbar: Rechteck, gleichseitiges Dreieck, rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, Dreieck mit den Winkeln  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . Die Lösung ergibt sich durch Übereinanderlagerung der Lösung für das entsprechende hohlraumfreie Prisma mit einem System harmonischer Funktionen, die auf dem ganzen äußeren Rand des gegebenen Querschnittes verschwinden und im Zentrum jedes Hohlraumes eine Singularität besitzen. Dieses System wird mit Hilfe der Weierstraßschen Sigmafunktion und mit dieser eng zusammenhängenden Funktionen gebildet. Die Methode wird nur am Beispiel des rechteckigen, zentral ausgebohrten Prismas im einzelnen ausgeführt. Numerische Werte werden für den Spezialfall des quadratischen Prismas mitgeteilt.

Viktor Garten.

Vajnberg, D. V.: Die Methode der diskreten Bindungen in der biharmonischen Kontaktaufgabe für elastische Körper mit Kreissymmetrie. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 80, 865—866 (1951) [Russisch].

Serman, D. I.: Über die Spannungen in einem ebenen schweren Medium mit zwei gleichen, symmetrisch gelegenen kreisförmigen Öffnungen. *Priklad. Mat. Mech.* 15, 751—761 (1951) [Russisch].

Norzi, Livio: Discussione intorno al principio variazionale per la instabilità elastica. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 11, 187—192 (1951).

Funk, P.: Über ein Stabilitätsproblem bei den durch Krümmung steif gemachten Meßbändern. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 5, 387—397 (1951).

MacNeal, R. H., G. D. MacCann and C. H. Wilts: The solution of aeroelastic problems by means of electrical analogies. *J. aeronaut. Sci.* 18, 777—789 (1951).

Phillips, Aris: A general method of calculating the  $M_{\varepsilon_{\max}}$  diagram in plastic bending of beams. *J. appl. Mech.* 18, 353—358 (1951).

Kačanov, L. M.: Die Stabilität der ebenen Form der Verbiegung jenseits der Elastizitätsgrenze (Einfluß der Verfestigung). *Priklad. Mat. Mech.* 15, 637—641 (1951) [Russisch].

Kačanov, L. M.: Die Stabilität der ebenen Form der Verbiegung jenseits der Elastizitätsgrenze. (III. Der Einfluß einer zusammengesetzten Last.) *Priklad. Mat. Mech.* 15, 762—764 (1951) [Russisch].

Lepik, Ju. R.: Der Stabilitätsverlust von Platten aus kompressiblem Material an der Fließgrenze. *Priklad. Mat. Mech.* 15, 629—634 (1951) [Russisch].

Colonnetti, Gustavo: L'équilibre élasto-plastique dans le temps. I. *C. r. Acad. Sci., Paris* 233, 593—595 (1951).

Colonnetti, Gustavo: L'équilibre élasto-plastique dans le temps. II. *C. r. Acad. Sci., Paris* 233, 644—646 (1951).

Colonnetti, Gustavo: L'équilibre élastoplastique dans le temps. III. *C. r. Acad. Sci., Paris* 233, 677—678 (1951).

Szegö, G.: Principal frequency, torsional rigidity and electrostatic capacity. *Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver* 1949, 45—48 (1951).

L'A. donne un aperçu de travaux d'origine parfois ancienne mais beaucoup développés depuis quelques dizaines d'années surtout par Polya et Szegö, exposés dans un livre paru depuis (Polya-Szegö, *Isoperimetric inequalities in math. physics*, Ann. of Math. Studies 27, Princeton 1951). On compare des coefficients géométriques ou physiques d'un corps: volume, aire de la frontière, constante de Minkowski, capacité électrostatique; ou dans le plan, aire, longueur périphérique, moment d'inertie, rayons intérieur et extérieur donnés par une représentation conforme,

fréquence fondamentale de la membrane, rigidité à la torsion du cylindre dont la section est le domaine considéré. On se base en particulier sur la définition extrême de certaines de ces quantités; par exemple la capacité est à un facteur près la valeur minima de l'intégrale de Dirichlet sur l'extérieur du corps d'une fonction égale à 1 sur le corps et 0 à l'infini. On aura donc une majoration en choisissant une telle fonction, c'est à dire en choisissant les surfaces de niveau correspondantes.

*Marcel Brelot.*

**Beljakova, V. K.:** Die Schwingungen einer Platte unter einer freien Oberfläche mit Berücksichtigung der kleinen Größen zweiter Ordnung. Priklad. Mat. Mech. 15, 504—510 (1951) [Russisch].

N. Kočín (dies. Zbl. 22, 87) hat eine Lösung für das ebene Problem der Schwingungen einer schweren Flüssigkeit unter Voraussetzung kleiner Schwingungsamplituden entwickelt. Diese Lösung führt zu einem Widerspruch im Sonderfall einer in gegebener Tiefe mitschwingenden waagerechten Platte. Unter gewissen Bedingungen verschwindet nämlich die Amplitude der Wellenbewegung, während der Auftrieb der Platte bestehen bleibt. Verf. weist nun nach, daß sich eine von Null verschiedene Schwingungsamplitude auch unter den fraglichen Sondervoraussetzungen angeben läßt, sofern man im komplexen Potential neben kleinen Größen erster Ordnung auch solche zweiter Ordnung beibehält.

*S. Woinowsky-Krieger.*

**Lebedev, N. F.:** Über die Ausbreitung der Entlastungswelle im Falle linearer Verfestigung. Priklad. Mat. Mech. 15, 625—628 (1951) [Russisch].

**Šatašvili, S. Ch.:** Über stehende Schwingungen bei vorgegebenen äußeren Kräften auf der Oberfläche eines elastischen Körpers. Priklad. Mat. Mech. 15, 615—617 (1951) [Russisch].

## Hydrodynamik:

• **Randall, Robert H.:** An introduction to acoustics. (Principles of Physics series.) Cambridge: Addison-Wesley Press, Inc. 1951. XII, 340 p.

**Manacorda, Tristano:** Sulle discontinuità delle derivate del potenziale della gravità attraverso una superficie di discontinuità per la densità. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 42—48 (1951).

Unter Benutzung vektoranalytischer Hilfsmittel, wie sie insbesondere von Burgatti [Atti Accad. Sci. Bologna 40, 93—106 (1936)] entwickelt wurden, erhält Verf. sehr schnell die Sprungwerte der zweiten Ableitungen des Raumpotentials beim Durchgang durch eine Unstetigkeitsfläche der Dichte, die Ertel (dies. Zbl. 29, 131) durch rein „skalare“ Betrachtungen herleitete, und ferner die Sprungwerte der dritten Ableitungen. Anwendung auf einen gravitierenden rotierenden Körper.

*Karl Maruhn.*

**Dolapčiev, Bl.:** Die Anwendung der Verfahren von N. E. Kočín zur Untersuchung des Gleichgewichtszustandes zweiparametriger Wirbelstraßen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 29—32 (1951) [Russisch].

Verf. untersucht zwei parallele „Straßen“ mit äquidistanten, gegeneinander versetzten Wirbeln mittels der Methode der kleinen Schwingungen (Linearisierung der Bewegungsgleichungen) auf Stabilität. Es zeigt sich, daß unter der Bedingung  $\sin(\lambda\pi) = \sin(\lambda'\pi)$  ( $\lambda, \lambda'$  für die Wirbelanordnung charakteristische Parameter), die für  $\lambda = \frac{1}{2}$  die v. Karmansche stabile Anordnung ergibt, die Bewegung (sie liefert bei Störung eine Schrägverschiebung der Straßen) bei genügend allgemein gehaltener Definition noch gewissermaßen als stabil angesehen werden kann. Solche Bewegungen ordnen sich folgender, von N. E. Kočín [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 24, Nr. 1 (1939)] formulierten Definition ein: Ein Wirbelsystem heißt dann stabil, wenn nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl  $\varepsilon$  eine Zahl  $\delta > 0$  so bestimmt werden kann, daß bei einer Anfangsverschiebung der Wirbel um weniger

als  $\delta$  der Abstand zweier beliebiger Wirbel während der ganzen Zeit der Bewegung sich von dem entsprechenden Abstand bei der ungestörten Bewegung um weniger als  $\varepsilon$  unterscheidet.

*Karl Maruhn.*

**Meksyn, D.: Motion in the wake of a thin plate at zero incidence.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 207, 370—380 (1951).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 40, 405) wird die Grenzschichtgleichung durch sukzessive Approximationen integriert, um die Nachlaufströmung hinter einer Platte nahe der Hinterkante zu berechnen. In weitem Abstand von der Hinterkante weicht bereits die erste Näherung für das Geschwindigkeitsprofil von derjenigen ab, die nach der von der dritten Näherung an unbrauchbaren Oseenschen Methode berechnet wurde.

*Joachim Pretsch.*

**Stephenson, J. M.: Secondary flow in cascades.** J. aeronaut. Sci. 18, 699—700 (1951).

**Shiffman, M. and D. C. Spence: The force of impact on a cone striking a water surface (vertical entry).** Commun. pure appl. Math. 4, 379—417 (1951).

**Polubarinova-Kočina, P. Ja.: Zur Theorie der instationären Bewegungen in einem mehrschichtigen Medium.** Priklad. Mat. Mech. 15, 511—514 (1951) [Russisch].

**Gerber, Robert: Sur l'existence des écoulements irrotationnels, plans périodiques, d'un liquide pesant incompressible.** C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1261—1263 (1951).

**Lowe, John: Automatic computation as an aid in aeronautical engineering.** Math. Mag. 25, 37—42 (1951).

**Imai, Isao: On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to Filon's paradox.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 208, 487—516 (1951).

Die Stokessche Näherung, welche bei der Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen die Trägheitsglieder vollständig vernachlässigt (schleichende Bewegung), ist später von Oseen durch teilweise Berücksichtigung der Trägheitsglieder verbessert worden. Dabei kann die Oseensche Verbesserung als eine Entwicklung nach steigenden Potenzen der Reynoldsschen Zahl aufgefaßt werden, die somit auch nur für kleine Reynoldszahlen Gültigkeit beanspruchen kann. Bei der Berechnung der höheren Näherungen dieser Oseenschen Verbesserung war von Filon 1926 ein paradoxes Ergebnis erhalten worden, insofern als sich für die ebene Strömung um einen zylindrischen Körper das von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübte Moment als logarithmisch unendlich ergab, wenn man die für den Impulssatz angesetzte Kontrollfläche sehr groß werden läßt. Verf. zeigt, daß jenes paradoxe Ergebnis daher rührt, daß Filon in der Entwicklung der Stromfunktion nach Potenzen des Abstandes vom Körper nicht genügend Glieder berücksichtigt hatte. Es wurde jetzt bis zur dritten Oseenschen Näherung gerechnet und gezeigt, daß dabei das paradoxe Ergebnis von Filon nicht mehr besteht.

*H. Schlichting.*

**Gerbes, Werner: Zur instationären, laminaren Strömung einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit in kreiszylindrischen Rohren.** Z. angew. Phys. 3, 267—271 (1951).

Mit Hilfe der Laplace-Transformation wird die Geschwindigkeitsverteilung in einem kreiszylindrischen Rohr berechnet, die sich beim plötzlichen Anlegen eines konstanten Druckes aus der Ruhe heraus bzw. beim plötzlichen Abschalten des Druckes zum Ruhestand hin entwickelt, sowie die Geschwindigkeitsverteilung beim Einwirken eines harmonischen Druckes. Diese Probleme sind bereits, was dem Verf. unbekannt geblieben zu sein scheint, von P. Szymanski [J. Math. pur. appl. IX. Ser. 11, 67—107 (1932); dies. Zbl. 4, 83] behandelt und zum Teil auch numerisch gelöst worden.

*Joachim Pretsch.*



Stewartson, K.: On the impulsive motion of a flat plate in a viscous fluid. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 182—198 (1951).

Für die instationäre Grenzschicht an einer plötzlich aus der Ruhe heraus in ihrer Ebene mit der Geschwindigkeit  $u$  bewegten Platte wird die Geschwindigkeitsverteilung um  $u t = x$  und bei  $t \rightarrow \infty$ , auch für kompressible Strömung untersucht.

Joachim Pretsch.

Bellman, Richard: On an equation occurring in the harmonic analysis of viscous fluid flow. Quart. appl. Math. 9, 218—223 (1951).

Die Fourier-Transformierte der Wirbelverteilung einer ebenen zähen inkompressiblen Strömung ist nach Kampé de Fériet [dies. Zbl. 29, 425; in dem Referat ist  $z$  mit  $W(m, n, t)$  wiedergegeben] Lösung einer nichtlinearen Integrodifferentialgleichung (in der vorliegenden Arbeit mit einer Zeichenänderung und  $v$  statt  $v$  aufgeführt). Verf. löst die Gleichung durch schrittweise Näherungen und zeigt, daß  $W(t)$  durch die Anfangswerte  $W(m, n, 0)$  mit  $|W(m, n, 0)| < A$  bei hinreichend kleinem  $A$  in folgender Weise beschränkt ist:  $|W(m, n, t)| \leq 8A/(1+u)^2$  mit  $u = v(m^2 + n^2)t$ . Es hat den Anschein, daß hierin  $(1+u)^2$  wohl durch  $(1+u)^k$  mit  $k > 2$ , aber kaum durch  $e^u$  ersetzt werden könnte.

Uwe Timm Bödewadt.

Synge, J. L.: Conditions satisfied by the expansion and vorticity of a viscous fluid in a fixed container. Quart. appl. Math. 9, 319—322 (1951).

Dafür, daß bei einer zähen Flüssigkeit Divergenz und Rotor in einem einfach zusammenhängenden Raum gegeben werden können, wenn die Flüssigkeit am Rande haften soll, wird die hinreichende und notwendige Bedingung angegeben. Die Arbeit ist unabhängig von analogen Untersuchungen Truesdells und von van den Dungen.

Georg Hamel.

Lessen, Martin: On the flow of viscous incompressible fluids in prismatic ducts. J. aeronaut. Sci. 18, 844—845 (1951).

Riabouchinsky, Dimitri: Sur la résistance de frottement des disques tournant dans un fluide et les équations intégrales appliquées à ce problème. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 899—901 (1951).

Tomotika, S. and T. Aoi: An expansion formula for the drag on a circular cylinder moving through a viscous fluid at small Reynolds numbers. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 401—406 (1951).

Pacella, Giovan Battista: Considerazioni sul contributo del Pizzetti e del Somigliana al problema di Stokes. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 69—73 (1951).

Meksyn, D.: Numerical integration of the boundary-layer equation. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 209, 375—379 (1951).

Emmons, H. W.: The laminar-turbulent transition in a boundary layer. I. J. aeronaut. Sci. 18, 490—498 (1951).

Verf. teilt neue Beobachtungen zum laminar turbulenten Umschlag bei der Plattenströmung mit. Erstellt fest, daß in einer dünnen Wasserschicht (3 bis 6 mm Stärke), die längs einer schwach geneigten Glasplatte laminar strömt, sich an unregelmäßig verteilten Stellen in zeitlich unregelmäßiger Folge sog. „Turbulenzquellen“ bilden. Dies sind Stellen, wo plötzlich die Laminarströmung turbulent wird, und von wo aus sich die Turbulenz stromabwärts in einem Winkelraum von etwa  $10^\circ$  Öffnungswinkel ausbreitet. Nach einiger Zeit erlischt eine solche Turbulenzquelle wieder, und es entstehen an anderen Stellen neue Turbulenzquellen. Die Ursache für diese Turbulenzentstehung wird teils in Unregelmäßigkeiten (Rauigkeiten) der beströmten Oberfläche, teils in Störungen der Zuströmung gesehen. Quantitative Messungen über diese Erscheinungen liegen noch nicht vor. Aber es wird versucht, auf diesen Beobachtungen eine phänomenologische Theorie der Turbulenzentstehung aufzubauen.

H. Schlichting.

Chandrasekhar, S.: The invariant theory of isotropic turbulence in magnetohydrodynamics. I. II. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 204, 435—449, 207, 301—306 (1951).

I. Die von Batchelor (dies. Zbl. 40, 142) aufgestellten Bewegungsgleichungen für eine inkompressible, gut leitende, turbulente Flüssigkeit ohne äußeres magneti-

sches und elektrisches Feld werden diskutiert. Durch Einführung von Doppel- und Dreifachkorrelationstensoren und unter Benutzung der vom Verf. und Robertson in früheren Arbeiten aufgestellten Invariantentheorie werden diese Gleichungen in analoger Weise umgeformt, wie Kármán und Howarth die Navier-Stokes-Gleichungen behandelt haben. Man erhält drei Differentialgleichungen für die Skalare, die diese Tensoren beherrschen. In Analogie zur gewöhnlichen Turbulenz gibt es hierzu Integrale vom Loitsianskyschen Typ. Die umgeformten Gleichungen gestatten auch die Berechnung der Energiezerstreuung durch Viskosität und Erzeugung Joulescher Wärme. Schließlich wird die Energiezufuhr einer äußeren Energiequelle untersucht. — II. Im zweiten Teil wird die Invariantentheorie durch Einführung von Vierfachkorrelationstensoren erweitert. Beziehungen zwischen den Skalaren, die diese Tensoren beherrschen, und denen der Zweifachkorrelationstensoren werden angegeben.

W. Kertz.

Townsend, A. A.: On the fine-scale structure of turbulence. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 208, 534—542 (1951).

Neue experimentelle Untersuchungen der isotropen Turbulenz (Stewart u. Townsend), haben gezeigt, daß die ursprüngliche Annahme einer Ähnlichkeit der Zerfallsprozesse nur für die kleineren Turbulenzelemente gilt, die weniger als  $\frac{1}{3}$  der gesamten Energie enthalten, daß dagegen das daraus folgende lineare Zerfallsgesetz merkwürdigerweise sehr genau gilt. Um diese und noch weitere aus den Versuchen folgende Anomalien zu erklären, entwickelt Verf. ein neues Modell der turbulenten Energieübertragung bei großen Wellenzahlen. Er macht dabei die Annahme, daß die kleinsten Turbulenzelemente aus kleinen Störungen entstehen, die dem Hauptwirbelfeld überlagert sind. Unter der Verzerrungswirkung des Hauptwirbelfeldes werden diese kleinen Störungen zu Wirbelschichten oder Wirbellinien konzentriert und erreichen ein Gleichgewicht, bei dem der Energiegewinn aus dem Hauptfeld dem Energieverlust durch Zähigkeitwirkung die Waage hält. Verf. entwickelt das Modell für zwei besonders einfache Hauptwirbelfelder, nämlich für ein ebenes Scherfeld ( $u = \alpha x$ ,  $v = -\alpha y$ ,  $\alpha > 0$ ) sowie ein axiales Scherfeld ( $u = 2\beta x$ ,  $v = -\beta y$ ,  $w = -\beta z$ ,  $\beta > 0$ ). Die stationären Lösungen, die sich als asymptotische Lösungen erweisen, stellen im ebenen Fall eine Wirbelschicht endlicher Dicke, im axialen Fall einen Wirbelfaden endlicher Dicke dar. Bei Berechnung der Spektralfunktion ergibt sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Versuchen insbesondere bei Annahme von Wirbelschichten. Abschließend betrachtet Verf. die Folgerungen, die sich für die Anwendbarkeit der Heisenbergschen Form der turbulenten Energieübertragung ergeben.

Walter Wuest.

Townsend, A. A.: The passage of turbulence through wire gauzes. Quart J. Mech. appl. Math. 4, 308—332 (1951).

Squire, William: On Broszko's theory of turbulent flow. J. aeronaut. Sci. 18, 502—503 (1951).

Ein älterer Ansatz von M. Broszko (1939) über den Zusammenhang zwischen den turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten und dem zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit ist vom Verf. für die Rohr- und Kanalströmung nachgeprüft worden. Dabei hat sich für das sog. „Mittengesetz“ der Geschwindigkeitsverteilung gute Übereinstimmung mit Messungen ergeben.

H. Schlichting.

Li, T. Y. and H. T. Nagamatsu: Effects of density fluctuations on the turbulent skin friction of an insulated flat plate at high supersonic speeds. J. aeronaut. Sci. 18, 696—697 (1951).

Oswatitsch, Klaus: Der Kompressibilitätseffekt bei schlanken Rotationskörpern in Unter- und Überschallströmung. Arch. der Math 2, 401—404 (1951).

Im Rahmen der linearen Theorie der achsensymmetrischen Strömung um hinreichend schlanke Drehkörper läßt sich das Geschwindigkeitspotential bekanntlich durch ein Integral über eine Quellverteilung längs der Körperachse darstellen, wobei die Quellstärke gleich dem Differentialquotienten der Querschnittfläche ist. Verf. stellt diese Ansätze für  $M < 1$  (Unterschall) und  $M > 1$  (Überschall) einander gegenüber und leitet hieraus unmittelbar einfache „Prandtl'sche Regeln“ für die Störgeschwindigkeit an der Körperoberfläche und im Fall  $M > 1$  für den Wellenwiderstand des Körpers her.

Robert Sauer.

Wang, Chi-Teh and Socrates de los Santos: Approximate solutions of compressible flows past bodies of revolution by variational method. *J. appl. Mech.* 18, 260—266 (1951).

In einer Reihe von früheren Veröffentlichungen haben der erstgenannte Verf. und seine Mitarbeiter Variationsmethoden auf ebene Unterschallströmungen angewandt, wobei sie die Verfahren von Rayleigh-Ritz, Galerkin und Biezeno-Koch benutzten. In der vorliegenden Arbeit, die einen kurzen Auszug aus der Dissertation des zweitgenannten Verf. darstellt, wird die Variationsmethode nach Rayleigh-Ritz für die stationäre, wirbelfreie, rotationssymmetrische Unterschallströmung formuliert und der Lösungsweg angedeutet. Um einen Vergleich mit den bereits bekannten Ergebnissen nach anderen Näherungsverfahren ziehen zu können, werden zwei Sonderfälle numerisch behandelt, nämlich die Unterschallströmung um die Kugel und um ein Rotationsellipsoid vom Achsenverhältnis 0,8. Die Ergebnisse der verschiedenen Berechnungsverfahren stimmen sehr gut miteinander überein. Für die Kugel wird eine kritische Machzahl  $M = 0,57$  gefunden.

Walter Wuest.

Howarth, L.: Some aspects of Rayleigh's problem for a compressible fluid. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 4, 157—169 (1951).

Die Strömung um eine Platte wird untersucht, die parallel zu sich selbst aus der Ruhe sprunghaft in eine Bewegung konstanter Geschwindigkeit versetzt wird. Das für ein inkompressibles Medium zuerst von Rayleigh behandelte Problem wird hier für ein Gas behandelt. Für kleine Mach-Zahlen kann linearisiert werden, für große Mach-Zahlen kann nur der Anfang der Bewegung einfacher berechnet werden. Dabei bleibt im Gegensatz zur stationären Grenzschichtströmung die Dichte konstant, während sich der Druck ändert. Starke Änderungen treten bereits in den ersten  $10^{-10}$  sec ein, Vorgänge die also nur mit molekulartheoretischen Methoden richtig erfaßt werden können, weshalb Verf. einen zu großen Aufwand mit klassischen Methoden für ungerechtfertigt hält. Abschließend wird mit anderen Ergebnissen verglichen.

Klaus Oswatitsch.

Schultz-Piszachich, W.: Beitrag zur formelmäßigen Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung gewölbter Tragflügelprofile in Unter- und Überschallströmung. Österreich. Ingenieur-Arch. 5, 226—240 (1951).

Verf. stellt dem üblichen Singularitätenverfahren der linearisierten zweidimensionalen Strömung um Tragflügel im Unterschall- und Überschallbereich ein „Deviationsverfahren“ zur Seite. Dieses geht von einer Entwicklung des Störpotentials nach Potenzen von  $y$  aus, wobei die Koeffizienten Funktionen von  $x$  sind. Sie lassen sich nach einem einfachen Bildungsgesetz aus zwei Grundfunktionen („Deviations“) herleiten, die selbst durch eine „Deviationsbedingung“ verknüpft sind. Es wird hierauf die Geschwindigkeitsverteilung gewölbter Profile berechnet. Im Überschallbereich werden geschlossene Formeln angegeben, in die man die Gleichungen von „Skelett“ und „Tropfen“ einzusetzen hat. Von der Literatur über den behandelten Gegenstand werden nur Arbeiten vor 1945 zitiert. Robert Sauer.

Cole, Julian D.: Drag of a finite wedge at high subsonic speeds. *J. Math. Physics* 30, 79—93 (1951).

Fabri, Jean, Raymond Siestrunk et Claude Fouré: Sur le calcul du champ aérodynamique des flammes stabilisées. *C. r. Acad. Sci., Paris* 233, 1263—1265 (1951).

Ribaud, Gustave: Sur l'établissement du régime des pressions dans un conduit de transport de gaz à grande distance. *C. r. Acad. Sci., Paris* 233, 1153—1156 (1951).

Kämmerer, C.: Stationäre Gasströmung durch ein gerades Rohr mit und ohne Wärmedurchgang und Reibung. Österreich. Ingenieur-Arch. 5, 340—370 (1951).

Ansoff, H. I.: Discussion to „Stability of flow in a rocket motor“, by D. F. Gunder and D. R. Friant, *J. appl. Mech.* 17, 327—333 (1950). *J. appl. Mech.* 18, 114 (1951).



**Yachter, M.:** Discussion to „Stability of flow in a rocket motor“, by D. F. Gunder and D. R. Friant, *J. appl. Mech.* 17, 327—333 (1950). *J. appl. Mech.* 18, 114—116 (1951).

**Migotsky, E. and M. V. Morkovin:** Three-dimensional shock-wave reflections. *J. aeronaut. Sci.* 18, 484—489 (1951).

Die Reflexion räumlich gekrümmter Stoßflächen an räumlich gekrümmten Körperflächen kann analytisch so behandelt werden, daß man örtlich die räumlichen Flächen durch ihre Tangentialebenen ersetzt. Zwei Sonderfälle, nämlich das schiefe Auftreffen einer ebenen Stoßfläche auf einen Kreiszylinder und die Reflexion einer kegeligen Stoßfront an einer ebenen Wand werden eingehend behandelt. Es zeigt sich dabei, daß diese beiden Fälle für örtliche Bereiche identisch sind. Es wird der Schluß gezogen, daß sogar dann, wenn an der Auftreffstelle der Stoßfront auf den Körper eine reguläre Reflexion möglich ist, es immer Bereiche gibt, wo die reguläre Reflexion durch eine Machreflexion ersetzt werden muß. Es gibt auch Bereiche, wo keine Reflexion möglich wäre, wenn die Stoßfront eben bleiben würde. Offenbar entsteht auf der Leeseite des Kreiszylinders ein Expansionsgebiet, damit die Strömung tangential zur Körperoberfläche verläuft. Diese Expansionswellen verändern aber die Stoßfront, die somit nicht mehr eben bleibt. Die praktische Bedeutung dieser Erscheinungen insbesondere für die Messung räumlicher Modelle in rechteckigen Windkanälen und die Druckmessung in der Nähe von Stoßfronten sowie die möglichen Abänderungen durch Grenzschichteinflüsse werden kurz erörtert.

*Walter Wuest.*

**Stocker, P. M.:** On a problem of interaction of plane waves of finite amplitude involving retardation of shock-formation by an expansion wave. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 4, 170—181 (1951).

Es wird das eindimensionale Problem des Zusammenspiels einer zurückweichenden Verdichtungswelle und einer vorwärtsschreitenden Verdünnungswelle untersucht. Die den Grenzlinien entsprechenden Singularitäten und Ort und Zeit für das erste Auftreten einer Grenzlinie, die als Näherung für den Stoß angesehen werden können, werden für die beiden Fälle berechnet, daß der die Kompressionswelle definierende Kolben konstante oder linear von der Zeit abhängige Beschleunigung hat.

*Joachim Pretsch.*

**Seeger, R. J. and H. Polachek:** On shock-wave phenomena: Waterlike substances. *J. appl. Phys.* 22, 640—654 (1951).

In wasserähnlichen Substanzen, für die die innere Energie in zwei Anteile aufgespalten werden kann, von denen der eine nur von der Dichte und der andere nur von der spezifischen Entropie abhängt, verhalten sich Stoßwellen häufig anders als in idealen Gasen. Beim Überholen einer Stoßwelle durch eine andere wird im Wasser eine Verdünnung, im idealen Gas ein Stoß gespiegelt. Wenn eine Verdünnung eine Stoßwelle überholt, so ist die reflektierte Welle im Wasser ein Stoß, im Gas kann sie eine Verdünnung sein. Während beim idealen Gas für genügend schwache einfallende Stöße immer ein Bereich mit Gabelstößen existiert, gibt es in wasserähnlichen Stoffen einen Bereich ohne Gabelstöße.

*Joachim Pretsch.*

**Roseau, Maurice:** Sur les mouvements ondulatoires de la mer sur une plage. *C. r. Acad. Sci., Paris* 232, 211—213 (1951).

Das Problem der Meereswellen über einem seichten Strand, das von E. Isaacson [*Commun. pure appl. Math.* 3, 11—31 (1950)] auf Grund einer neuen Darstellung der Lewyschen Lösungen behandelt wurde, wird durch die Berechnung der allgemeinen Lösung für Potentiale der Form  $\Phi = e^{i\sigma t} \varphi(x, y)$  direkt gelöst.

*Joachim Pretsch.*

**Roseau, Maurice:** Ondes liquides de gravité en profondeur variable. *C. r. Acad. Sci., Paris* 233, 844—845 (1951).

Die ebenen Schwerewellen einer Flüssigkeit werden berechnet für einen Kanal, der von einer langen Strecke konstanten Niveaus in eine lange Strecke niederen konstanten Niveaus übergeht und für einen Strand konstanter Neigung, der sich in Meeresgrund bei konstanter Tiefe fortsetzt.

*Joachim Pretsch.*

Roseau, Maurice: Résolution d'équations fonctionnelles qui se présentent dans le problème des ondes liquides de gravité en profondeur variable. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 916—917 (1951).

Die beiden Funktionen, die die Lösung des in der vorsteh. besprochenen Arbeit behandelten Schwerewellenproblems bestimmen, werden in ihrem analytischen Verhalten näher untersucht.

*Joachim Pretsch.*

Dorrestein, R.: General linearized theory of the effect of surface films on water ripples. I. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B 54, 260—272 (1951).

Es ist seit alten Zeiten bekannt, daß Ölfilme die Dämpfung von Wasserwellen erhöhen. Aitken erklärte diese Wirkung durch die Änderung der Oberflächenspannung. Verf. gibt eine vollständige linearisierte Theorie für Wasserwellen bei Gegenwart von bestimmten Oberflächenfilmen. Die Randbedingungen an der Oberfläche für Normaldruck und Schubspannung liefern eine Beziehung zwischen Wellenzahl und Frequenz. Die Dämpfungsfaktoren und Geschwindigkeitsverteilungen für die Grenzfälle verschwindenden bzw. vorherrschenden Einflusses des Oberflächenfilmes werden miteinander verglichen. Für geringe Kompressibilität des Ölfilms ist die Dämpfung doppelt so groß als für Inkompressibilität; andererseits steigt die Dämpfung bei konstanter Oberflächenspannung mit wachsender Oberflächenzähigkeit. Weitere Mitteilung wird angekündigt.

*Joachim Pretsch.*

Lavrent'ev, V. M.: Der Einfluß der Grenzschicht auf den Wellenwiderstand eines Schiffes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 857—860 (1951) [Russisch].

Sekerž-Zenkovič, Ja. I.: Zusammengesetzte stehende Wellen endlicher Amplitude auf der Oberfläche einer schweren Flüssigkeit von unendlicher Tiefe. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geofiz. 1951, Nr. 5, 68—83 (1951) [Russisch].

Zajcev, L. P. und N. V. Zvolinskij: Untersuchung der axialsymmetrischen Hauptwelle, die an der ebenen Trennungsfläche zweier elastischer Flüssigkeiten entsteht. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geofiz. 1951, 40—50 (1951) [Russisch].

Polubarinova-Kočina, P. Ja.: Über die Dynamik des Grundwassers bei Regen. Priklad. Mat. Mech. 15, 649—654 (1951) [Russisch].

Kočina, N. N.: Das ebene Problem des Auseinanderfließens einer Erhöhung des Grundwassers in einer Schicht von unendlicher Dicke. Priklad. Mat. Mech. 15, 679—682 (1951) [Russisch].

Sokolov, D. Ju.: Über den Zufluß von Grundwasser zu einem Drainagegraben von trapezförmigem Querschnitt. Priklad. Mat. Mech. 15, 683—688 (1951) [Russisch].

Sokolevskij, V. V.: Über das Grenzgleichgewicht eines körnigen Mediums. Priklad. Mat. Mech. 15, 689—708 (1951) [Russisch].

Ludwig, H.: Die ausgebildete Kanalströmung in einem rotierenden System. Ingenieur-Arch. 19, 296—308 (1951).

## Wärmelehre:

● Foà, Emanuele: Fondamenti di termodinamica. A cura di A. Giulianini. Prefaz. di C. Codegone. Bologna: Nicola Zanichelli Ed. 1951. XI, 255 p. 3000 Lire.

Dieses Buch, dessen vom Verf. nachgelassenes Manuskript von seinem langjährigen Mitarbeiter Giulianini vollendet wurde, stellt die Grundlagen der Thermodynamik dar. Dabei wurden Fragen wie die der Wärmeleitung, kinetisch-statistische Theorien, und bei den Anwendungen Turbinen und Strahltriebwerke, nicht in den Kreis der Betrachtungen gezogen. Aber das Gebiet der klassischen Thermodynamik, wie es für die normalen Anwendungen in der technischen Physik gebraucht wird, findet sich in wohlgegliederter und durchsichtiger Form behandelt. Dem Werke ist anzumerken, daß den Verf. ihre Wissenschaft von der theoretischen

Schau bis zur praktischen Anwendung vertraut war. Man kann es wohl mit zu den besten neueren Lehrbüchern der Thermodynamik rechnen. *Uwe Timm Bödewadt.*

● **Hawkins, George Andrew:** *Thermodynamics.* — 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd., 1951. XV, 563 p. 52 s.

**Niehrs, Heinz:** Herleitung einer Mengenfunktion aus einer „assoziativen“ Funktion und die Begriffsbildung physikalischer Größen. *Z. Phys.* **127**, 187—193 (1950).

Allein aus der evidenten Tatsache, daß die Regel für die Mischungstemperatur dem assoziativen Gesetz genügt (zusammen mit ebenso evidenten Stetigkeitsvoraussetzungen), wird gezeigt, daß es eine Größe gibt, die während der Mischung einem Erhaltungssatz genügt und die mit der „Wärmemenge“ identifiziert werden kann. Anschließend wird versucht, diese Überlegung auch für die Einführung der Begriffe „Elektrizitätsmenge“ und „schwere Masse“ zu verwenden. *Georg Süßmann.*

**Niehrs, Heinz:** Analyse der Begriffe Temperatur und Wärmemenge. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt.* **1951**, Nr. 1, 28 S. (1951).

Verf. wendet sich gegen eine konventionalistische Auffassung der physikalischen Größen: nicht die Definition der Größe bedeute den Fortschritt der Erkenntnis, sondern die Einsicht in die Möglichkeit einer solchen Definition. Dazu wird gezeigt (vgl. vorsteh. Referat), daß bereits wenige evidente, qualitative „Grunderfahrungen“ die Einführung der Begriffe Temperatur und Wärmemenge ermöglichen. Insbesondere folgt der Wärmeerhaltungssatz nicht erst aus einer quantitativen Mischungsregel, für die in den meisten elementaren Darstellungen sogar Konstanz der spezifischen Wärmen vorausgesetzt wird, sondern bereits aus der Assoziativität des Mischens. Verf. fordert eine ähnliche Begriffseinführung für alle physikalischen Grundgrößen.

*Georg Süßmann.*

**Tharrats Vidal, Jésus Marie:** Dilatation des corps par la chaleur. *C. r. Acad. Sci., Paris* **233**, 228—230 (1951).

**Broer, L. F. J.:** On the dynamical behaviour of a canonical ensemble. *Physica* **17**, 531—542 (1951).

The paper is concerned with a statistical mechanical system, having generalised coordinates  $q$  and generalised momenta  $p$ , which depends on an external parameter  $a$ . Associated with the latter are a force  $-\partial E/\partial a$ , where  $E(p, q, a)$  is the energy of a certain configuration, some arbitrary configuration function  $G(p, q, a)$  whose average value is  $\bar{G}$ , and isothermal and adiabatic susceptibilities  $\chi_T = (\partial \bar{G}/\partial a)_T$ ,  $\chi_S = (\partial G/\partial a)_S$ . If the adiabatic change in the system is calculated by purely dynamical methods applied to a canonical ensemble a susceptibility  $\chi_{is}$  is obtained. In the classical case it is shown that  $\chi_{is} \sim \chi_S$ , but this appears not to be the case in the quantum-mechanical case. This result leads to several difficulties, one of which is the proper interpretation of experiments on paramagnetic relaxation. These difficulties are discussed by the author, but remain unresolved.

*Peter T. Landsberg.*

**Nanda, V. S.:** Partition theory and thermodynamics of multi-dimensional oscillator assemblies. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **47**, 591—601 (1951).

Verf. betrachtet zunächst die quantentheoretischen Energieniveaus  $\varepsilon_j = j + \frac{1}{2}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  eines linearen Oszillators und die zur Verteilung unter  $N$  lineare Oszillatoren verfügbare Energie  $E - \frac{1}{2} N$  ( $E$  Gesamtenergie,  $\frac{1}{2} N$  Nullpunktsenergie). Ist  $n_j$  die Anzahl der Oszillatoren im Zustand  $j$ , so gilt  $n = \sum_j j n_j$ ,  $\sum_j n_j = N$ . Wird die Bose-Einsteinsche Statistik zugrunde gelegt,

so kann  $n_j$  alle ganzen positiven Werte (einschließlich Null) durchlaufen. — Auf diese Weise gelangt man zur Theorie der sogenannten „partitions“ der Zahl  $n$  in Klassen ganzer Zahlen mit der einzigen Nebenbedingung, daß die Gesamtzahl der Summanden in keiner Partition  $N$  übersteigt. Diese Zusammenhänge untersucht Verf. nunmehr im Falle thermodynamischer Systeme (assemblies) von zwei und dreidimensionalen Oszillatoren. Zunächst werden asymptotische Ausdrücke abgeleitet, die eine Verallgemeinerung von Hardy-Ramanujans Formel für  $p(n)$  dar-



stellen, welcher ein System linearer Oszillatoren entspricht:  $p(n) \sim (1/4\sqrt{3n}) \exp\{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\}$  = Anzahl der unbeschränkten Partitionen der Zahl  $n$ . Die Theorie verwendet erzeugende Funktionen, welche den bereits früher von Mac Mahon eingeführten gleichen (Combinatory analysis, Cambridge 1946, Sections IX, X and XI). Zur anschaulichen Darstellung derartiger mehrdimensionaler Partitionen lassen sich gewisse graphische Hilfsmittel verwenden. — Die thermodynamische „Zustandssumme“ einer (veränderlichen) Menge zweidimensionaler Oszillatoren erweist sich identisch mit der erzeugenden Funktion einer ebenen Partition. Es kommt dann darauf an, eine Beziehung zwischen zwei anscheinend verschiedenen Typen von Partitionen aufzustellen. Der Fall zweidimensionaler Oszillatorsysteme kann speziell noch mit der Theorie sogenannter gebundener Abzählungen (bi-partitions) in Verbindung gebracht werden. *Max Pinl.*

Podolsky, Boris: A problem in heat conduction. J. appl. Phys. 22, 581—585 (1951).

Für das Temperaturfeld, welches eine periodisch auf Null abnehmende punktförmige Wärmequelle (= Wechselstromheizung) in einer gleichmäßigen unendlichen Strömung erzeugt, findet Verf. einen ziemlich einfachen Ausdruck: eine mit wachsender Entfernung abklingende Temperaturschwingung, deren Phasenflächen konzentrische Kugeln um die Quelle sind, deren Phasen aber außerdem einen nach konfokalen Paraboloidflächen fortschreitenden Dämpfungsfaktor enthalten. Hervorzuheben ist die klare Ableitung des Ergebnisses. — Wenn die Strömungsgeschwindigkeit den in ruhender Flüssigkeit erscheinenden Grenzwert der Phasengeschwindigkeit merklich übersteigt, so fällt die Phasengeschwindigkeit der Wärmequellen nahezu mit der Strömungsgeschwindigkeit zusammen. *Uwe Timm Bödewadt.*

Storm, M. L.: Heat conduction in simple metals. J. appl. Phys. 22, 940—951 (1951).

Wenn in der Gleichung  $\nabla(K \nabla T) = S(\partial T/\partial t)$  die Wärmeleitfähigkeit  $K$  und die spezifische Volumenwärme  $S = \rho c_p$  von der Temperatur  $T$  abhängen, so ist keine allgemeine analytische Lösung bekannt. Falls aber für  $\sqrt{S/K} = \varphi(T)$  und  $\sqrt{KS} = \psi(T)$  die Voraussetzung  $d\varphi/dT = A \varphi \psi = AS$  mit festem  $A$  zutrifft, so kommt man im eindimensionalen Fall mit den

Substitutionen  $\int_c^x \varphi dx = X$ ,  $\int_{T_0}^T \psi dT = Q(X, t)$  auf die Diff.-Gl.  $\partial^2 Q/\partial X^2 = \partial Q/\partial t + A(\partial Q/\partial X)^2 + A\Phi(\partial Q/\partial X)$ , worin der durch  $x=c$  eintretende Wärmefluß  $\Phi = -K(\partial T/\partial x)_c$  über  $t$  gegeben sein muß. Für  $\zeta = \exp(-AQ)$  entsteht dann die lösbare lineare Gl.  $\partial^2 \zeta/\partial X^2 = \partial \zeta/\partial t + A\Phi \partial \zeta/\partial X$ . — Für die einfachen Metalle (einatomig, mit vollständig besetzter oder leerer  $d$ -Schale) zeigt eine theoretische Untersuchung, welche die Elektronen als wesentliche Träger der Wärmeleitung ansieht, ebenso wie eine Zusammenstellung gemessener Werte, daß die Voraussetzung über die Konstanz von  $A$  ziemlich gut in der Weise zutrifft, daß sich  $\varphi^2 = S/K$  exponentiell und  $\psi^2 = KS$  gar nicht mit  $T$  ändern. Auch für Eisen sowie für Stahl mit 0,8% C stimmt die Voraussetzung. Geschmolzener Quarz, in dem nicht Elektronen die Wärmeleitung bewirken, verhält sich anders. — Für den halbusendlichen Körper mit konstanter Wärmezufuhr wird die analytische Lösung gegeben und an einem Beispiel numerisch mit der Lösung für konstante  $K$ ,  $S$  verglichen. *Uwe Timm Bödewadt.*

Loeb, Arthur L.: A theory of the envelope type of thermal conductivity tests. J. appl. Phys. 22, 282—285 (1951).

Die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit aus einem stationären Temperaturgradienten an einem von innen geheizten unendlich langen Hohlzylinder wird in der Praxis bei der nur endlichen Zylinderlänge dadurch beeinträchtigt, daß die Oberfläche des heizenden Kernes und die Außenfläche des Probekörpers an den Enden nicht streng isotherm sein können. Dieses Ziel läßt sich auch nicht durch Anfügung von Halbkugeln an die Zylinderenden erreichen. Verf. weist darauf hin, daß (wie aus der Potentialtheorie bekannt ist) konfokale Drehellipsoide geeignet sind, und rechnet die Verteilung der Temperatur und des Wärmeflusses aus. *Uwe Timm Bödewadt.*

Matricon, M.: Étude de la répartition de la chaleur dans l'anticathode d'un tube à rayons X. J. Phys. Radium 12, 15—25 (1951).

Antikathoden in Röntgenröhren, welche aus einer in eine Cu-Fläche eingebetteten Wscheibe bestehen, sind für die Wärmeleitung als halbusendliche Zwei-Schichten-Körper anzusehen. Verf. deutet die (bekannte) Lösung im Falle homogener Wärmezufuhr als Überlagerung einer Folge paralleler Wärmequellenebenen in einem unendlichen homogenen Körper. Durch

Überlagerung entsprechend angeordneter punktförmiger Wärmequellen (die Temperaturverteilung zu einer punktförmigen Wärmequelle am homogenen unendlichen Körper ist bekannt) erhält Verf. eine Temperaturverteilung, welche das Problem der Antikathode, also der Punktquelle auf dem halbumendlichen Zweischichtenkörper, beinahe löst; sie entspricht nämlich dem Falle einer anisotropen Tiefenschicht (statt des Cu), die der Tiefe zu die richtige, aber seitlich eine veränderte Wärmeleitfähigkeit hat. Verf. überlegt, daß dieser Mangel im betrachteten Falle nicht sehr stören könne, leitet durch Integration eine Formel für mehr flächenhafte Wärmezufuhr ab und wertet sie für einige numerische Beispiele zahlenmäßig aus.

*Uwe Timm Bödewadt.*

**Blackwell, J. H. and A. D. Misener:** Approximate solution of a transient heat flow problem. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 1132—1133 (1951).

## **Elektrodynamik. Optik:**

● **Ivanenko, D. und A. Sokolov:** Die klassische Feldtheorie. (Neuere Probleme.)

2. Aufl. Moskau, Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1951. 479 S. R.11,20 [Russisch].

Das Buch soll nicht ein Lehrbuch der klassischen Elektrodynamik ersetzen, vielmehr wird diese zum Verständnis vorausgesetzt. Weiterhin will es keine deduktive Ableitung der Grundgleichungen, etwa der des Mesonenfeldes, ohne Anleihe an die Quantentheorie geben, letztere wird aber in halbempirischer Weise hineingesteckt. Ferner werden einige erst durch sie eingeführten Begriffe fruchtbringend in der alten bekannten Feldphysik verarbeitet. So wird die Benutzung der  $\delta$ -Funktion im Zusammenhang mit der Greenschen Funktion konsequent durchgeführt (Kap. 1—3). Eine strenge Begründung bleibt den Mathematikern überlassen. Die Methode der retardierten und avancierten „Potentiale“ wird bis auf die Wärmeleitungsgleichung ausgedehnt (hier kann allerdings eine av. Lösung nicht auftreten). Die (Sommerfeldsche) Ausstrahlungsbedingung wird dann besonders einfach. Das 4. Kap.: Klassische Elektrodynamik, das 5. Kap.: Klassische Mesodynamik. Im 4. Kap. wird aufgezeigt, wie die klassische Feldtheorie zur Theorie der Teilchen und Felder bisher beigetragen hat und wahrscheinlich noch beitragen wird, und inwieweit sie für eine spätere Theorie der Eigenmasse der Elementarteilchen wegweisend sein wird. Einer kurzen prägnanten Darstellung der Maxwell-Lorentz-Theorie und ihrer Integrale folgt die Behandlung der gleichförmigen Bewegung eines Elektrons in einer Form, die die Verallgemeinerung zur Tscherenkow-Strahlung unmittelbar zuläßt. Es folgen: Energie-Impulstensor, elektromagnetische Masse, nichtlineare Elektrodynamik (Born-Infeld), die klassische Bewegungsgleichung und ihre Integration, Theorie des Betatrons und das „lichtausstrahlende“ Elektron. Das 5. Kap.: zunächst eine Zusammenfassung der Grundprobleme über die Kernkräfte. Begründung des (u. a.) von einem der Verff. aufgestellten Nukleonenmodells. Skalares, pseudoskalares, vektorielles Mesonenfeld. Allgemeine Form der Kernkräfte (Verff. 1944, Møller-Rosenfeld 1940, Schwinger 1942), Integration der Gleichungen, Ausstrahlung der vektoriellen Mesonenwellen von quasielektischen und quasimagnetischen Dipolen. Ebenso: Streuung bei Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung (Sokolow), Gravitation und Elementarteilchen. Nach dem 5. Kap. folgt ein kurzer Zusatz über die Entwicklung der Theorie des Vakuums, u. a.: magnetisches Moment des Elektrons, Regularisierung (Pauli-Villars 1949, Feynman 1948). (Anm. d. Ref.: Das Buch erscheint demnächst in deutscher Übersetzung im Akademieverlag.)

*Detlof Lyons.*

● **Landau, L. and E. Lifshitz:** The classical theory of fields. — Translated from the Russian by Morton Hamermesh. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press. Inc., 1951. \$ 7,50.

Das Buch ist ein Lehrbuch und stellt einen Teil eines Kurses über Theoretische Physik dar. Es enthält die klassische (d. h. unquantisierte) Theorie des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes. Die Behandlung des elektromagnetischen Feldes erfolgt auf der Grundlage der speziellen Relativitätstheorie. Deshalb werden 2 Kapitel über das Relativitätsprinzip und über relativistische Mechanik vorausgeschickt. Die Bewegungsgleichungen werden hier und an allen späteren Stellen aus dem vierdimensional formulierten Prinzip der kleinsten Wirkung gewonnen. Die Behandlung der Elektrodynamik beschränkt sich auf Felder im Vakuum; die Ladungen sind als punktförmig angenommen. Ein Kapitel über geometrische Optik und Beugung scheint zunächst etwas außerhalb der Linien des Buches zu liegen; es wird aber im wesentlichen die Beziehungen zwischen optischen Strahlen und Teilchenbahnen klarstellen sollen. — Auf über 50 Seiten wird die Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen durch bewegte Teilchen dargestellt. Nach Ansicht des Ref. handelt es sich hier um einen der wertvollsten Teile des Werkes und (wie aus der besonders großen Zahl von Übungsaufgaben ersehen werden darf) wohl auch um ein Lieblingskapitel der Verff. U. a. werden behandelt: Ausstrahlung bei Zusammenstößen, speziell bei Coulombscher Wechselwirkung, Ausstrahlung durch schnell bewegte Teilchen, Strahlungsdämpfung (Ableitung nach Lorentz, aber relativistische Verallgemeinerung,



so daß Bewegungsgleichungen in Diracscher Form erhalten), spektrale Zerlegung der Strahlung im extrem relativistischen Fall und Streuung durch freie Ladungen. Die Grenzen der Anwendbarkeit der Bewegungsgleichungen mit Strahlungsdämpfungsglied werden eingehend diskutiert. — Zwei abschließende Kapitel sind dem Gravitationsfeld gewidmet, wobei auf kurzem Raum ein überraschend vollständiges Bild der allgemeinen Relativitätstheorie entwickelt wird. Zunächst werden das Äquivalenzprinzip, der Tensorkalkül und die Beziehungen zur Newtonschen Gravitationstheorie (was Bahnverläufe angeht) dargestellt. Bereits an dieser Stelle wird die Gravitations-Rotverschiebung behandelt. Das letzte Kapitel umfaßt u. a.: Aufstellung der Feldgleichungen für das Gravitationsfeld, kugelsymmetrisches Gravitationsfeld, Gravitationswellen, insbesondere deren Ausstrahlung (dabei Berechnung des Energieverlustes durch Ausstrahlung von Gravitationswellen) und schließlich isotrope Räume, also Lösungen der Feldgleichungen in kosmologischen Dimensionen. — Neben der logischen Geschlossenheit der Darstellung (z. B. einheitliches Wirkungsprinzip) ist nach Ansicht des Ref. besonders die vollständige Behandlung grundlegender Einzelprobleme, speziell im Kapitel über Ausstrahlung, hervorzuheben.

Gerhart Lüders.

**Buehler, Robert J. and Joseph O. Hirschfelder: Bipolar expansion of coulombic potentials.** Phys. Review, II. Ser. 83, 628—633 (1951).

Klassische und quantenmechanische Rechnungen, in denen die Coulombsche Wechselwirkung zwischen zwei räumlich getrennten Ladungsverteilungen vorkommt, werden wesentlich vereinfacht durch Benützung der Beziehung

$$1/r_{12} = \sum B_{n_1, n_2, m}(r_1, r_2, R) P_{n_1}^m(\cos \vartheta_1) P_{n_2}^m(\cos \vartheta_2) \exp \{im(\varphi_1 - \varphi_2)\}.$$

Hier bedeutet  $r_{12}$  den Abstand zweier Punkte in den beiden Ladungsverteilungen, von denen der erste relativ zum Schwerpunkt der ersten Verteilung die Polarkoordinaten  $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$  und der zweite relativ zum Schwerpunkt der zweiten die Polarkoordinaten  $r_2, \vartheta_2, \varphi_2$  hat. Polarachse ist in beiden Fällen die Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte, welche einen gegenseitigen Abstand  $R$  haben mögen. Die hierbei auftretenden Koeffizienten  $B$  wurden von B. C. Carlson und G. S. Rushbrooke (dies. Zbl. 39, 67) für die Fälle  $R > r_1 + r_2$ ,  $r_2 > R + r_1$  und  $r_1 > R + r_2$  berechnet. Der noch ausstehende vierte wichtigste und schwierigste Fall  $|r_1 - r_2| \leq R \leq r_1 + r_2$  wurde in der vorliegenden Arbeit durchgerechnet und für die niedrigsten Werte von  $n_1, n_2$  und  $m$  in Tabellenform zusammengestellt.

Fritz Sauter.

**Levin, M. L.: Über den geometrischen Sinn der Existenzbedingungen für transversale elektrische und transversale magnetische Felder in krummlinigen Koordinatensystemen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 589—590 (1951) [Russisch].

Let  $u, v, w$  be orthogonal curvilinear coordinates in the space  $r = r(u, v, w)$ . In order that there may exist an electromagnetic field in which either the electric or the magnetic vector has no longitudinal  $w$ -component, known conditions are

$e_w = 1, \frac{\partial(e_u/e_v)}{\partial w} = 0$ , where the metric coefficients  $e_u, e_v, e_w$  are given by  $(e_u)^2 = (r_u)^2$ , etc. By differential-geometrical arguments it is proved that the surfaces  $w = \text{const.}$  must be either concentric spheres or parallel planes.

Frederick V. Atkinson.

**Daymond, S. D.: The resistance of a rectangular metal plate with an internal electrode.** Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 23—28 (1951).

Es wird der effektive Widerstand einer rechteckigen Metallplatte untersucht, unter der Bedingung, daß ein stetiger Strom durch eine kreisförmige mitten in der Platte gelegene Elektrode einfließt und durch den Rand ausfließt. Das Problem läuft also auf die Bestimmung einer ebenen Potentialfunktion hinaus, die an den beiden Elektroden konstante Werte hat. Hierfür wendet Verf. die Spiegelbildmethode an und findet durch konforme Abbildung die Potentialfunktion in Jakobi-schen elliptischen Funktionen ausdrückbar. Die zugehörigen  $\vartheta$ -Funktionen zeigen sich aber für die folgenden numerischen Rechnungen geeigneter und werden verwendet.

S. C. Kar.

**İşlinskij, A. Ju.: Die Umformung eines doppelten Konturintegrals in ein doppeltes Flächenintegral mit Anwendung auf die Bestimmung des Koeffizienten der**



gegenseitigen Induktion zweier voneinander entfernter Spulen oder Drahtrahmen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 353 (1951) [Russisch].

Colombani, Antoine: Sur l'effet de proximité et le coefficient d'induction mutuelle en haute fréquence d'un fil et d'une portion de plan de grande épaisseur, conducteurs et parallèles. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1267—1269 (1951).

Roubine, Élie: Propriétés du champ électromagnétique des hélices. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1174—1176 (1951).

Syngé, J. L.: The fundamental theorem of electrical networks. Quart. appl. Math. 9, 113—127 (1951).

Eine für Elektrotechniker geschriebene Einführung in die mathematische Theorie der Netzwerke. Die erforderlichen grundlegenden topologischen Sätze über Streckenkomplexe werden anschaulich bewiesen; für die ebenfalls wohlbekannten Relationen zwischen Zweig-EMKs, Kreis-EMKs, Kreisströmen und Zweigströmen wird Matrixschreibweise benutzt. Alfred Stöhr.

Vlahavas, George N.: A graphical solution for the starconnected three-phase circuit. Z. angew. Math. Phys. 2, 489—491 (1951).

Feinstein, J. and H. K. Sen: Radio wave generation by multistream charge interaction. Phys. Review, II. Ser. 83, 405—412 (1951).

Die Erregung von angefachten Schwingungen bei der translatorischen Bewegung mehrerer Plasmen relativ zueinander wird diskutiert, wobei statische Felder und Ionenbewegungen vernachlässigt werden. Zunächst wird der schon von A. V. Haeff [Proc. Inst. Radio Engin. 37, 4 (1949)] behandelte Fall der Wechselwirkung zweier diskreter Elektronenstrahlen nochmals behandelt und ein dort unterlaufener Fehler berücksichtigt, und dann das Zusammenwirken eines Elektronen-Strahles mit einem Plasma mit einer kontinuierlichen Geschwindigkeitsverteilung, wobei speziell die Geschwindigkeit zwischen den Grenzen  $-v_0$  bis  $+v_0$  liegt, und die Verteilungskurve in diesem Gebiet eine Konstante ist. Es wird dadurch angenähert eine Maxwell-Verteilung nachgebildet und es zeigt sich, daß die Möglichkeit einer Anfachtung auch dann besteht, wenn die Strahlgeschwindigkeit viel kleiner ist als die mittlere thermische Geschwindigkeit, was von M. Ryle [Proc. phys. Soc., A 62, 483 (1949)] bezweifelt wurde und was für die Vorgänge in der Sonnenatmosphäre wichtig ist. Nur schmale Frequenzbereiche könne in diesem Fall angefacht werden. Als Ursache der Entstehung dieser Schwingungen werden untersucht 1. Periodische zeitliche Schwankungen in einem bestimmten Raumpunkt gegeben wie bei den Röhren der Technik,  $\alpha$  reell,  $\alpha$  d. h. räumliches Anwachsen komplex. 2. Gegeben eine räumliche periodische Verteilung,  $\alpha$  reell,  $\omega$  komplex, d. h. zeitliches Anwachsen wie z. B. in der Sonnenatmosphäre mit anfänglichen räumlichen Störungen der Dichte oder des Stromes. Der 2. Fall ergibt ein breiteres Frequenzband des Anwachsens als der erste Fall. — Die Mechanismen, die die zunächst entstehenden longitudinalen Schwingungen in transversale Wellen umwandeln, werden diskutiert. W. O. Schumann.

Grün, Otto: Berechnung des elektrischen Feldes bei einer gewissen Materialverteilung. Math. Nachr. 4, Erhard Schmidt z. 75. Geburtstag, 419—433 (1951).

L'A., ispirandosi ad un lavoro di H. v. Hörschelmann, Über die Wirkungsweise des geknickten Marconischen Senders in der drahtlosen Telegraphie [Jbuch drahtlose Telegraphie Telephonie 5, 14—34, 188—211 (1911)], si propone il problema di caratterizzare il campo elettromagnetico generato da una qualunque distribuzione di dipoli hertziani, oscillanti con frequenze arbitrarie nello spazio supposto diviso da quattro piani paralleli, nell'ipotesi che le costanti materiali varino dall'una all'altra delle cinque regioni determinate dai piani stessi. Il problema può essere semplificato supponendo che in ognuna delle regioni parziali si trovi un solo dipolo e che tutti i dipoli abbiano la stessa frequenza e i loro momenti abbiano la direzione ortogonale ai piani assegnati. Allora si tratta di trovare una soluzione dell'equazione  $\Delta u + \kappa^2 u = 0$  tale che il parametro complesso  $\kappa^2 = \frac{i\omega\mu}{c^2} (4\pi\sigma - i\omega\varepsilon)$  assumendo differenti valori nelle cinque regioni e che siano soddisfatte le condizioni di continuità delle componenti tangenziali di  $\mathcal{E}$  e di  $\mathcal{H}$  sui piani assegnati e le condizioni all'infinito. — I calcoli sono molto complicati. L'A. considera il problema da un punto di vista puramente matematico e allude appena alla possibilità che gli sviluppi indicati nella sua nota abbiano interessanti interpretazioni fisiche.

Giovanni Lampariello.

**Rice, Stephen O.:** Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces. *Commun. pure appl. Math.* **4**, 351—378 (S 351—S 378) (1951).

Die hier behandelte Frage der Reflexion elektromagnetischer Wellen an etwas rauhen Flächen ist von besonderem Interesse für die Ausbreitung von Radiowellen über rauhem Grund sowie über See. Nach Hinweis auf Arbeiten anderer Verf., in denen ähnliche Fragestellungen behandelt werden, beschäftigt sich Verf. besonders mit der Reflexion ebener elektromagnetischer Wellen durch eine Fläche  $z(x, y)$ , die im wesentlichen, doch nicht vollständig glatt ist. Die Abweichungen der Fläche von der  $xy$ -Ebene sollen zufälliger Natur sein. Die Fläche wird als ein vollkommener Leiter vorausgesetzt. Es wird darauf hingewiesen, daß in praktischen Fällen die Flächen im allgemeinen rauher sind, als es hier vorausgesetzt wird, doch zeigt das Problem noch mit genügender Deutlichkeit die Wirkung der Rauigkeiten. Diese Rauigkeit der Fläche wird durch ein Rauigkeitsspektrum oder durch eine Verteilungsfunktion  $W(p, q)$  der Rauigkeiten beschrieben. Diese Funktion  $W(p, q)$  wird zunächst aufgestellt und im Hinblick auf ihre Eigenschaften untersucht. Die Fragestellung wird sowohl für den Fall, daß die einfallende Welle horizontal polarisiert, als auch für den Fall, daß sie vertikal polarisiert ist, behandelt. Dann werden die Ergebnisse auf einige spezielle Fälle angewandt. Auch der Fall, daß wir es mit nahezu streifendem Einfall zu tun haben, bei dem sich eine typische Oberflächenwelle ausbildet, deren Feld mit dem Abstand von der Fläche exponentiell abnimmt, wird eingehend untersucht. Endlich findet noch der Fall seine Behandlung, daß zwei Medien eine wellige Grenzfläche gegeneinander besitzen und an dieser welligen Grenzfläche Reflexionen einer elektromagnetischen Welle horizontaler Polarisation stattfindet. Dabei wird vorausgesetzt, daß beide angrenzenden Medien die gleiche Permeabilität, aber verschiedene Dielektrizitätskonstanten besitzen. Die untere der beiden Schichten wird als leitfähig, die obere als nichtleitend vorausgesetzt.

Johannes Picht.

**Schelkunoff, S. A.:** Remarks concerning wave propagation in stratified media. *Commun. pure appl. Math.* **4**, 117—128 (S 181—S 192) (1951).

Das Studium der Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen in einem inhomogenen Medium führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form  $du/dx = -i f(x) v$ ,  $dv/dy = -i g(x) u$  ( $u, v$  gesucht;  $f, g$  bekannt). Von diesen werden nach einer Umformung Näherungslösungen (ohne Konvergenzbetrachtungen) hergestellt, aus denen sich insbesondere der Reflexionskoeffizient ergibt.

Karl Maruhn.

**Jessel, Maurice:** Rayonnement d'une antenne placée dans un guide d'onde à section rectangulaire. *C. r. Acad. Sci., Paris* **233**, 783—785 (1951).

**Fürth, R.:** Considerations regarding the emission of photons from sources of radio waves. *Physica* **17**, 259—265 (1951).

**Hopkins, H. H.:** The concept of partial coherence in optics. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **208**, 263—277 (1951).

Wenn zwei Erregungen  $A_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $A_2 e^{i\varphi_2}$  auf einen Punkt wirken, so ist die Intensität dort allgemein  $J = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \gamma_{12}$ . Für völlig inkohärente Schwingungen ist  $\gamma_{12} = 0$ , für völlig kohärente ist  $\gamma_{12} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ , also zwischen +1 und -1. Unter einfacherer Ableitung und Verallgemeinerung von Sätzen, die P. H. van Cittert und F. Zernike gegeben haben, soll der Phasen-Kohärenz-Faktor  $\gamma_{12}$  und seine Bedeutung genau untersucht werden. — Es seien  $P_1, P_2$  zwei von einer Lichtquelle  $\Sigma$  beleuchtete Punkte (enge Blendenöffnungen), die auf einen gegebenen Punkt  $P$  wirken;  $u_1, u_2$  die komplexen Amplituden, die von einem Flächenelement der Lichtquelle in  $P_1, P_2$  erzeugt werden;  $f_1, f_2$  die Amplituden, die Einheitsamplituden für  $P_1, P_2$  in  $P$  bewirken würden (zwischen  $P_1, P_2$  und  $P$  kann eine optisch wirkende Flächenfolge oder auch zwei verschiedene liegen), so kann man die Intensität in  $P$  schreiben

$$J_P = \left\{ \int_{\Sigma} |u_1|^2 d\sigma \right\} |f_1|^2 + \left\{ \int_{\Sigma} |u_2|^2 d\sigma \right\} |f_2|^2 + 2R \left\{ \int_{\Sigma} u_1 \bar{u}_2 d\sigma \right\} f_1 \bar{f}_2 \\ = J_1 |f_1|^2 + J_2 |f_2|^2 + 2\sqrt{J_1 J_2} R \{\gamma_{12} f_1 \bar{f}_2\}.$$

Hier ist  $\bar{u}_2$  konjugiert zu  $u_2$ ,  $R$  drückt den reellen Teil aus,  $J_1, J_2$  sind die Intensitäten in  $P_1, P_2$ ;

$\gamma_{12} = \frac{1}{\sqrt{J_1 J_2}} \int_{\Sigma} u_1 \bar{u}_2 d\sigma$  ist der Phasen-Kohärenz-Faktor. Man kann schreiben  $\gamma_{12} = V_{12} e^{i\beta_{12}}$ .  $V_{12}$  drückt die Kohärenz aus,  $\beta_{12}$  den Phasenunterschied, durch den die Interferenzstreifen entstehen. Es ist  $|\gamma_{12}| \leq 1$ , bei Inkohärenz  $\gamma_{12} = 0$ . Untersucht man nun den Wert von  $\gamma_{12}$  für

zwei Punkte  $P_1, P_2$  in einer Ebene parallel zu der der Lichtquelle, so ist  $u_1 = \frac{\sqrt{J(\xi, \eta)}}{R_1} e^{-ikR_1}$ ,

$u_2 = \frac{\sqrt{J(\xi, \eta)}}{R_2} e^{-ikR_2}$  ( $\xi, \eta$  laufende Koordinaten der Punkte  $A$  in der Ebene  $\Sigma$  der Lichtquelle;



$R_1 = A P_1$ ,  $R_2 = A P_2$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ . Der Ausdruck für  $\gamma_{12}$  wird ein Integral über  $\xi, \eta$ ; worin  $e^{i k (R_2 - R_1)}$  vorkommt.  $R_2 - R_1$  wird behandelt, wobei die Fälle von großem und kleinem  $\Sigma$  zu unterscheiden sind. Für kleine Ausdehnung der Lichtquelle wird insbesondere der Fall untersucht, daß diese kreisförmig ist. Erscheint sie von  $P_1$  aus unter dem Winkel  $2\alpha$ , so kommt man schließlich zu der Näherungsformel  $\gamma_{12} = \frac{2J_1(z)}{z} e^{i k \varrho^2/2R}$ ; hier ist  $\varrho = P_1 P_2$ ,  $R$  der Abstand

von  $P_1$  und  $P_2$  von der Ebene  $\Sigma$ ,  $J$  Besselsche Funktion,  $z = \frac{2\pi}{R} \varrho N \sin \alpha$ ,  $N$  Brechungsverhältnis, also  $N \sin \alpha$  Beleuchtungsapertur. Für verschwindendes  $\alpha$  oder  $\varrho$  wird  $2J_1(z)/z = 1$ ,  $\gamma_{12} = 1$ ; für  $z = 1$  wird  $2J_1(z)/z = 0,880$ . Indem geschätzt wird, daß man bis soweit von Kohärenz sprechen könne, käme man dahin, daß ein Kreis mit dem Halbmesser  $d = 0,16\lambda/N \sin \alpha$  kohärent beleuchtet wäre. Es wird die Fortpflanzung des Phasen-Kohärenz-Faktors untersucht, d. h. festgestellt, wie  $\gamma'_{12}$  zwischen Punkten  $P'_1, P'_2$  hinter der Ebene  $S$  von  $P_1, P_2$  von  $\gamma_{12}$  und seiner Veränderlichkeit abhängt, man erhält zwei verschiedene Formeln, je nachdem  $P'_1 P'_2$  in der Ebene des optischen Bildes von  $S$  liegen oder nicht. Dies wird angewandt auf die Beleuchtung beim Mikroskop. Im Falle, daß die Lichtquelle durch den Kondensor in der Dingebene abgebildet wird, ist der Faktor derselbe, wie wenn der Kondensor durch eine Lichtquelle gleicher Größe und Form ersetzt würde, wobei auch jeder Punkt der Lichtquelle dieselbe Intensität hat, wie der entsprechende des Kondensors. Zum Schluß wird eine Formel für den Einfluß des Phasen-Kohärenz-Faktors auf die Abbildung im durchfallenden Licht mitgeteilt.

H. Boegehold.

Gabor, D.: Microscopy by reconstructed wave fronts. II. Proc. phys. Soc., Sect. B 64, 449—469 (1951).

In vorliegender Arbeit setzt Verf. seine Untersuchungen [dies. Zbl. 33, 90; Proc. phys. Soc., Sect. B 64, 244—255 (1951)] fort. Hier handelt es sich um eine „Zwei-Schritt-Methode“ zur Bilderzeugung eines Objektes. Es wird rekonstruiert durch optische Mittel aus einem Beugungsdiagramm, das durch kohärente Beleuchtung des Objektes mit Licht oder Elektronen gewonnen wurde. Es wird darauf hingewiesen, daß die früher vom Verf. beschriebene „Projektionsmethode“ sowie die kürzlich von Haine und Dyson [Nature 166, 315 (1950)] vorgeschlagene „Transmissionsmethode“ zwei Varianten darstellen, die durch ein und dieselbe Theorie behandelt werden können. Der Vorgang der Bilderzeugung, die Kohärenzanforderungen sowie die Bedingung für eine gute Rekonstruktion werden im einzelnen diskutiert. Es wird gezeigt, daß das rekonstruierte Bild eines ausgedehnten Objektes bis auf geringe Einzelheiten den Anforderungen genügt; diese Abweichungen können aber leicht überwunden werden in der „Dunkelfeldmethode“ der Rekonstruktion, in der die beleuchtende Welle ausgeschaltet wird, nachdem sie durch das Beugungsdiagramm hindurchgegangen ist. Einleitend werden die genannten verschiedenen Methoden noch einmal kurz skizziert und besprochen. Verf. geht noch einmal auf das Prinzip der Wellenfront-Konstruktion ein, wobei er auch die verschiedenen sich in den Wellenaberrationen ausdrückenden Bildfehler der Abbildungssysteme berücksichtigt. Auch den Einfluß der Kohärenz diskutiert Verf., wobei er zwischen transversaler, longitudinaler und chromatischer Kohärenz unterscheidet. Die Fragen der Kohärenz überträgt Verf. auf die Beleuchtung des Objektes durch Elektronen im Elektronenmikroskop, wobei er kohärente Ströme definiert, deren Kohärenz von der Temperatur der Wolframkathode abhängt. Zum Schluß behandelt er die Theorie der Dunkelfeldmethode der Rekonstruktion.

Johannes Picht.

Bremmer, H.: On the theory of optical images affected by artificial influences in the focal plane. Physica 17, 63—70 (1951).

Durch eine künstliche Modifikation des Beugungsfeldes in der bildseitigen Brennebene läßt sich bekanntlich — s. das Phasenkontrastverfahren — eine Beeinflussung der optischen Abbildung herbeiführen. Verf. diskutiert die Wirkung dieser Modifikation, indem er zunächst von einer völlig willkürlichen Verteilung der Phasen- und Amplitudenbeeinflussung in den einzelnen Punkten der Brennebene ausgeht. Er wählt dann für die diese Modifikation angegebene Funktion  $\varphi(K)$  verschiedene mathematische Ausdrücke, nämlich 1.  $\Phi(K) = 1 - A \delta(x_K) \cdot \delta(y_K)$ , wobei  $\delta(x)$  die



Diracsche Impulsfunktion ist. Ist  $A$  reell, so ergibt sich die Darstellung für Dunkel-feldbeleuchtung. Für rein imaginäres  $A$  ist die Absorption mit einer Phasendrehung von  $\frac{1}{2}$  verbunden, so daß die Verhältnisse einer unendlich kleinen Phasenplatte entsprechen, wie sie in der Phasenmikroskopie benutzt wird. — 2.  $\varphi(K) = A \cdot x_K$ . Hier entsprechen die Verhältnisse unter gewissen Voraussetzungen der Anwendung der Schlierenmethode. Es werden noch eine Reihe weiterer Annahmen für  $\varphi(K)$  zugrunde gelegt und jeweils der Ausdruck für die Amplitudenverteilung in der Bildebene, der sich unter jener Voraussetzung ergibt, bestimmt. *Johannes Picht.*

**Bremmer, H.:** The W. K. B. approximation as the first term of a geometric-optical series. Commun. pure appl. Math. 4, 105—115 (S 169—S 179) (1951).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Reflexion einer auf die ebene Begrenzungsfläche eines inhomogenen isotropen Mediums fallenden ebenen Welle und dem in das Medium eintretenden und durch das Medium hindurchgehenden Lichtanteil. Dabei ist angenommen, daß das inhomogene Medium als aus unendlich dünnen homogenen Schichten bestehend angenommen werden kann, die der Begrenzungsfläche gegen das homogene Medium parallel liegen. Die Wellenzahl  $k = 2\pi/\lambda$  wird demnach als lineare Funktion von  $x$ , der Variablen senkrecht zur Begrenzungsfläche angenommen. An jeder einzelnen Trennfläche zwischen zwei benachbarten Schichten wird die auftretende Welle in einen durchgehenden und einen reflektierten Anteil aufgespalten. Der reflektierte Anteil (und ebenso der durchgehende) wird an allen übrigen Trennschichten erneut zum Teil durchgelassen, zum Teil reflektiert. (Das Verfahren ist nach Ansicht des Ref. auch in früheren Arbeiten bereits benutzt.) Durch Summation aller sich in der einen bzw. in der anderen Richtung ausbreitenden Anteile ergibt sich so der Ausdruck der Lichtbewegung (nach Amplitude und Phase) für die fortschreitende bzw. für die reflektierte Welle. Durch Einführung eines Parameters  $\varepsilon$ , der den Wert 1 hat und also nur formal eingeführt wird, läßt sich das Ergebnis als Potenzreihe von  $\varepsilon$  darstellen. Betrachtet man die einfallende ebene Welle als von unten nach oben gehend, so läßt sich die fortschreitende bzw. reflektierte Welle darstellen durch die beiden Potenzreihen  $u_{\uparrow} = u_0 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^4 u_4 + \dots$ ,  $u_{\downarrow} = \varepsilon u_1 + \varepsilon^3 u_3 + \varepsilon^5 u_5 + \dots$ , wo sich  $u_{2N}(x)$  und  $u_{2N+1}(x)$  durch die Rekursionsformeln

$$u_{2N}(x) - \frac{1}{2[k(x)]^{1/2}} \int_0^x ds \frac{k'(s)}{[k(s)]^{1/2}} u_{2N-1}(s) \exp \left\{ i \int_s^x k(\sigma) d\sigma \right\},$$

$$u_{2N+1}(x) = - \frac{1}{2[k(x)]^{1/2}} \int_x^\infty ds \frac{k'(s)}{[k(s)]^{1/2}} u_{2N}(s) \exp \left\{ i \int_x^s k(\sigma) d\sigma \right\}$$

ergeben. Die gesamte durchgehende Welle und die gesamte reflektierte Welle genügen einem System von Integralgleichungen, und zwar den Gleichungen

$$u_{\uparrow}(x) - \frac{\varepsilon}{2[k(x)]^{1/2}} \int_0^x ds \frac{k'(s)}{[k(s)]^{1/2}} u_{\downarrow}(s) \exp \left\{ i \int_s^x k(\sigma) d\sigma \right\} = u_0(x),$$

$$u_{\downarrow}(x) + \frac{\varepsilon}{2[k(x)]^{1/2}} \int_x^\infty ds \frac{k'(s)}{[k(s)]^{1/2}} u_{\uparrow}(s) \exp \left\{ i \int_x^s k(\sigma) d\sigma \right\} = 0.$$

Durch Elimination von  $u_{\downarrow}(x)$  bzw.  $u_{\uparrow}(x)$  kommt man zu einer einzelnen Integralgleichung Volterraschen Typs. Die Entwicklung nach Potenzen von  $\varepsilon$  ist identisch mit dem Neumann-Liouvilleschen Ausdruck der Lösung dieser Integralgleichung mit Hilfe des iterierten Kernes. Ein anderes System von Differentialgleichungen ist  $u_{\uparrow} = u/2 + u'/2 i k$ ,  $u_{\downarrow} = u/2 - u'/2 i k$ .

Durch Einführung der Koordinaten-Transformation  $\xi = \int_0^x k(s) ds$  und  $I(x) = [k(x)]^{1/2} u(x)$  läßt sich eine wesentliche Vereinfachung zur Bestimmung der  $u_N$ -Terme erreichen. [Diese Transformation entspricht etwa der bei Fragen des Strahlungsgleichgewichts benutzten (der Ref.).] Man wird so auf die Differentialgleichung

$$d^2 I/d\xi^2 + \{1 - \varepsilon dR(\xi)/d\xi - \varepsilon^2 R^2(\xi)\} I = 0$$

geführt, die den Grenzbedingungen  $I(1 + i\varepsilon R) - i dI/d\xi = 2(k_0)^{1/2}$  bei  $\xi = 0$ ,  $I(1 - i\varepsilon R) + i dI/d\xi = 0$  im Unendlichen genügt. Die Lösung wird nach Potenzen von  $y$  entwickelt. Der neue Parameter  $R$  ist definiert durch  $R = \frac{dk/dx}{2k^2} = \frac{dk/d\xi}{2k}$ . Zum Schluß betrachtet Verf. als

Beispiel der geometrisch-optischen Reihen die Verhältnisse in einem inhomogenen Medium mit  $R(\xi) = -R_0 = \text{const.}$  *Johannes Picht.*

Bremmer, H.: On the diffraction theory of gaussian optics. Commun. pure appl. Math. 4, 61—74 (S 125—S 138) (1951).

Verf. geht aus von der aus der Greenschen Formel folgenden Gleichung

$$u(P) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_P} \iint df_Q u(Q) \frac{\exp\{i k_0 \cdot \overline{QP}\}}{\overline{QP}},$$

wo  $Q$  das zur  $z$ -Achse senkrecht durchstrahlte Objekt,  $u_P$  die Lichtbewegung bzw. eine Komponente des Lichtvektors im Raum (im Sinne der Lichtfortpflanzung) hinter dem Objekt in einem Punkt  $P$  ist. Die Wellenzahl  $k_0$  wird komplex (mit möglichst kleinem positiven Imaginärteil) vorausgesetzt, als Grenzbedingung wird in der achsensenkrechten unendlich ausgedehnten Objektebene  $z_Q = 0$  angenommen:  $u(x, y, 0+) = 1 + \varepsilon(x, y)$ . Diese Grenzbedingung entspricht

der Identität  $\mp \frac{1}{2\pi} \lim_{z_P \rightarrow z_Q} \frac{\partial}{\partial z_P} \iint df_Q \cdot F(Q) \frac{\exp\{i k_0 \cdot \overline{QP}\}}{\overline{QP}} = F(P)$ , die als geometrische Interpretation des Neumannschen Integraltheorems  $F(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du u \iint df_Q F(Q) J_0(u \cdot \overline{PQ})$  an-

genommen werden kann. — Anschließend wird unter Berücksichtigung der mit der Abbildung des Objekts durch ein optisches System verbundenen Vergrößerung der Ausdruck  $u_P$  im Bildraum zwischen dem System und der paraxialen Bildebene aufgestellt, zunächst unter der Annahme unbegrenzter Öffnung des Systems. Entsprechend werden die Ausdrücke für  $u_P$  in und hinter der paraxialen Bildebene angegeben, also insgesamt drei Ausdrücke, von denen sich die beiden vor bzw. hinter der Bildebene geltenden im Vorzeichen unterscheiden, also den Phasensprung  $\pi$  besitzen. — Handelt es sich um ein abbildendes System endlicher Öffnung, so tritt noch eine weitere Flächenintegration über die Öffnung des Systems hinzu. Statt der Integration über die Öffnungsblende kann auch die Integration über eine beliebige zwischen dem abbildenden System und der Bildebene gelegenen Ebene benutzt werden, sofern das  $u$  in dieser Ebene bekannt ist. Dies ist von Bedeutung, wenn sich in einer Zwischenebene noch eine die Amplitude oder Phase des Lichtes beeinflussende Anordnung, z. B. eine Phasenplatte befindet. — Die Überlegungen werden ausgedehnt auf den Fall, daß das abbildende System eine begrenzte Öffnung besitzt, was zu einem vierdimensionalen Integral führt. Auch auf nicht Gaußsche Systeme dehnt Verf. seine Überlegungen aus. Johannes Picht.

Havlicek, F. I.: A formula for determining the wave-surface if the spherical aberrations are known. Nature 168, 743 (1951).

Blackman, M.: Diffraction from a bent crystal. Proc. phys. Soc., Sect. B 64, 625—630 (1951).

Es handelt sich um die Beugung ebener Wellen durch einen gekrümmten Kristall. Verf. weist darauf hin, daß von Darbyshire und Cooper [Proc. roy. Soc. London, Ser. A 152, 104 (1935)] sowie von Finch und Wilman [Trans. Faraday Soc. 32, 1539 (1936)] beim Durchgang von Elektronen durch Glimmer und Molybdän-Kristalle u. a. Beugungsaufnahmen gewonnen wurden, die sehr ähnlich, wenn auch nicht identisch waren mit Beugungsaufnahmen, die gewonnen wurden, wenn man bei der photographischen Aufnahme unter Benutzung normaler Substanz der genannten Stoffe diese rotieren ließ. Hieraus war geschlossen worden, daß es sich bei den betreffenden Versuchen um gekrümmte Kristalle gehandelt hatte. Die erhaltenen Beugungsaufnahmen lassen sich auch unter dieser Annahme deuten, also unter der Annahme, daß die durchstrahlten Kristalle gekrümmt waren. Verf. versucht daher, die bei gekrümmten Kristallen theoretisch zu erwartenden Formeln der Beugungsmaxima zu bestimmen. Zu diesem Zweck führt er eine eingehende allgemeine Diskussion der bei der theoretischen Behandlung zu beachtenden Gesichtspunkte durch. Da die Überlagerungssumme der von den einzelnen Gitterpunkten herrührenden Beiträge zur Interferenzintensität sich streng kaum auswerten läßt, führt Verf. Reihenentwicklungen der Einzelbeiträge aus, die er mit dem ersten Glied abbricht. Die Abstände der gekrümmten Gitterflächen sowie der Gitterpunkte einer Fläche werden als gleich groß vorausgesetzt. Nach der allgemeinen Diskussion werden Ergebnisse von Zahlenrechnungen mitgeteilt, die in graphischen Darstellungen die verschiedene Form der zu erwartenden Beugungslinien verschiedener Ordnung erkennen lassen. Johannes Picht.

Blackman, M.: Diffraction from a curved linear lattice. Proc. phys. Soc., Sect. B 64, 631—637 (1951).

Verf. nimmt Bezug auf eine Arbeit von Fock und Kolpinsky [J. Physics Acad. Sci. USSR 3, 125 (1940)], in der in Verbindung mit der Lichtbewegung in einem gekrümmten Kristall das Problem der Beugung an einem gekrümmten Gitter für den Fall behandelt wird, daß sich die störenden Gitterpunkte (zweidimensional betrachtet) in gleichem Abstand voneinander auf dem Umfang eines Kreises be-

finden. Er versucht, die dort durchgeführten Überlegungen auf den Fall zu übertragen bzw. zu erweitern, daß die die störenden Punkte enthaltende Kurve kein Kreis, sondern eine beliebige Kurve ist. Die Durchführung geschieht mathematisch unter Voraussetzung der Anwendbarkeit von Näherungen, indem der Bereich „stationärer Phase“ näher betrachtet und die die streuenden Gitterpunkte enthaltende Kurve in der Nachbarschaft der einzelnen Gitterpunkte jeweils durch ihren Krümmungskreis angenähert wird.

Johannes Picht.

● Raaz, F. und H. Tertsch: Geometrische Kristallographie und Kristalloptik und deren Arbeitsmethoden. — 2. verbesserte Aufl. Wien: Springer-Verlag 1951. X, 215 S., S. 78; sfr. 19,50; § 4,50; DM 19,—.

Bini, Umberto: Due aspetti del quoto nel teorema di Fermat. Archimede 3, 189—191 (1951).

Wendt, Georg: Zur Dioptrik elektrostatischer Elektronenlinsen. Z. angew. Phys. 3, 219—225 (1951).

Für zwei extreme elektrostatische Linsentypen, die Beschleunigungslinse aus zwei eng benachbarten Kreis Lochscheiben und die Beschleunigungslinse aus zwei koachsialen Kreis Lochscheiben gleichen Durchmessers wird zunächst die achsiale Koordinate  $z$  als Funktion des Achsenpotentials  $s = \Phi(z)$  wiedergegeben und festgestellt, daß für beide Linsentypen  $dz/ds = (1 - s^2)^n$  ist, wobei für die Kreis Lochlinse  $n = 3/2$  und für die Rohrlinse  $n = 1$  zu setzen ist. Verf. untersucht daher alle Beschleunigungslinsen vom analogen Typus mit  $1 < n < 3/2$ . Die Elektroden solcher Linsen können in Lochscheiben, Kegel oder zylindrische Rohre auslaufen. Ersetzt man in der Differentialgleichung der achsennahen Elektronenbahnen gleichfalls die achsiale Koordinate  $z$  durch das Achsenpotential  $s = \Phi(z)$ , so erhält man für alle Typen eine Heunische Differentialgleichung. In einigen Spezialfällen artet die Heunische Differentialgleichung in eine hypergeometrische aus. Als solcher Spezialfall wird ein aus einer ebenen Kathode mit Lochscheibenförmiger Anode bestehendes Immersionsystem behandelt und die Lage der virtuellen Bildebenen, die Vergrößerung, die Lage des Überkreuzungspunktes und der Strahlöffnungswinkel berechnet. Eine Verallgemeinerung der Grundtypen z. B. auf Rohrlinsen mit verschiedenem Rohrdurchmesser führt wieder zu einer Differentialgleichung vom Fuchschen Typus für die Elektronenbahnen.

Walter Glaser.

Grivet, Pierre et Michel Bernard: Éléments gaussiens dans la lentille électrostatique formée de deux cylindres coaxiaux de même diamètre. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 788—790 (1951).

Verf. bestimmt den Verlauf der Strahlen in einer durch zwei koaxiale hintereinanderstehende Zylinder gleichen Durchmessers gebildeten elektrostatischen Linse nach der charakteristischen Gleichung von Picht  $R'' + \frac{3}{16} [T(z)]^2 R = 0$ . Hierbei befinden sich die beiden hintereinanderstehenden Zylinder auf verschiedenem Potential  $\Phi_1$  bzw.  $\Phi_2$ . Die beiden Zylinder besitzen einen sehr kleinen Abstand voneinander. Das Verhältnis  $\Phi_1/\Phi_2$  setzt er  $= \gamma$ . Es wird gezeigt, daß es sich hier um eine symmetrische Glockenkurve handelt, die man durch eine Funktion von Glaser mit einer Genauigkeit von 2% mit Bezug auf den Wert der Brennweite darstellen kann. Unter Zugrundelegung der Glaserschen Funktion

$$T = T_m/[1 + (Z/a)^2] \text{ mit } T_m = -2\omega \mathfrak{Tg}(\omega z_m) \text{ und } z_m = \frac{1}{4}\omega \log \gamma$$

findet er für  $a$  in erster Näherung den Ausdruck  $a_1 = \frac{1}{2}\omega \mathfrak{Re} \operatorname{Coj} \left[ 2 + \frac{1}{2} \left( 1/\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma} \right) \right]$ . Auch für die zweite Näherung von  $a_2$  wird der Wert angegeben. Das Potentialfeld selbst läßt sich darstellen durch  $\Phi = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \left[ 1 + \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \mathfrak{Tg}(\omega z) \right]$  mit  $\omega = 1,318$ .

Es werden die Ausdrücke für die objektseitige und bildseitige Brennweite sowie für die Lage der Brennpunkte angegeben und in einer Tabelle zahlenmäßig die Werte der objektseitigen Brennweite in Abhängigkeit von  $\gamma$  angegeben, wobei  $\gamma$  zwischen 1,2 und 11 variiert. Zur Berechnung der objektseitigen Brennweite werden für  $1,2 < \gamma < 3$  die Näherungsformeln 1. Ordnung, für  $3 < \gamma < 11$  die genaueren Formeln benutzt.

Johannes Picht.

Bernard, Michel: Éléments gaussiens des lentilles à grilles. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1354—1356 (1951).



Ploke, M.: Elementare Theorie der Elektronenstrahlerzeugung mit Triodensystemen. I. Eigenschaften des statischen Feldes der gebräuchlichen Strahlsysteme. Z. angew. Phys. 3, 441—449 (1951).

Bernard, Michel: Sur un modèle de potentiel permettant l'étude de la lentille à trois électrodes. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1438—1440 (1951).

Regenstreif, Édouard: Sur la théorie du régime transgaussien de la lentille électrostatique elliptique. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 854—856 (1951).

Regenstreif, Édouard: Sur la théorie des rayons du troisième ordre dans la lentille électrostatique indépendante. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1588—1590 (1951).

Sturrock, Peter: Propriétés optiques des champs magnétiques de révolution de la forme  $H = H_0/[1 - (2/a^2)]$  et  $H = H_0/[(2/a)^2 - 1]$  sur l'axe optique. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 401—403 (1951).

Vom Ref. wurde darauf hingewiesen, daß eine Magnetlinse mit einer Feldkurve, welche der optischen Achse die gewölbte Seite zukehrt hinsichtlich des Öffnungsfehlers günstiger ist als die konventionellen Feldformen. K. Siegbahn und H. Slätis haben diese Tatsache mit Vorteil zur Konstruktion eines Beta-Spektrographen größerer Lichtstärke benutzt. Verf. zeigt, daß die optischen Kenngrößen eines derartigen Feldtypus aus dem vom Ref. behandelten Glockenfeld  $H/[1 + (z/a^*)^2]$  folgen, wenn man hier einfach  $a^* = ia$  ( $i^2 = -1$ ) setzt, wobei natürlich die Fälle  $|z| < a$  und  $|z| > a$  gesondert behandelt werden. Insbesondere ergibt sich, daß Farb- und Öffnungsfehler  $C_F/f_0$  und  $C_0/f_0$  beliebig klein gemacht werden können.

Walter Glaser.

Sturrock, P. A.: The aberrations of magnetic electron lenses due to asymmetries. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 243, 387—429 (1951).

Die Arbeit faßt im wesentlichen in formal anderer Weise die allgemeinen Untersuchungen des Einflusses von Feldasymmetrien auf die optische Abbildung, wie sie vom Ref., F. Bertein, J. Hillier und E. Ramberg ausgeführt worden sind, zusammen, indem an Stelle der vom Ref. benutzten reellen Schreibart des Eikonals stets komplexe Koordinaten und entsprechend definierte komplexe Feldpotentiale verwendet werden. Die Feldstörung durch eine unrunde Bohrung der Polschuhe wird wie bei F. Bertein als elektrostatische Verformung der entsprechenden Potentialflächen aufgefaßt und danach berechnet. Die numerische Auswertung für eine Magnetlinse, deren Bohrungsdurchmesser gleich dem Polschuhabstand ist, ergibt, daß die astigmatische Differenz ungefähr zwei und einhalb mal so groß wie die gesamte Variation des Bohrungsdurchmessers ist. Wenn der halbe Aperturwinkel gleich 0,002 gewählt wird, ist die auf die Objektebene bezogene Länge der Brennnlinien 50 Å, wenn die gesamte Variation des Bohrungsradius 0,5  $\mu$  beträgt. Die Abschätzungen beziehen sich auf unendlich hohe Permeabilität, Sättigungseffekte werden nicht in Betracht gezogen.

Walter Glaser.

Nadeau, Gérard: Correction zonale de l'aberration sphérique dans les lentilles magnétiques. Atti Acad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 225—229 (1951).

Verf. gibt eine Abschätzung der Verbesserung der Strahlenvereinigung, die man für eine Zone einer Magnetlinse erzielen kann, wenn man dieser zwei Dipolfelder vor und hinter der Linse nach einem Vorschlag von E. Persico (1950) (M. v. Ardenne, 1933) überlagert. Als Linsenfeld wird das eines Kreisstromes zugrunde gelegt und vorausgesetzt, daß die Dipolfelder unabhängig vom Kreisstromfeld betrachtet werden können. Eine Abschätzung des Verf. ergibt, daß durch die zusätzlichen Dipolfelder die Lichtstärke der Kreisstrom-Linse um den Faktor 40 gesteigert werden kann.

Walter Glaser.

Lafoucrière, J.: L'application de la méthode de la trochoïde aux spectres bêta. (Un procédé de focalisation en champ magnétique inhomogène). Ann. de Physique 6, 610—661 (1951).

Verf. gibt eine allgemeine Diskussion des Verlaufes der Elektronenbahnen in einer achsensymmetrischen Symmetrieebene eines inhomogenen rotationssymmetrischen Magnetfeldes, soweit dies ohne Kenntnis des speziellen Feldverlaufs allein auf Grund des Energie- und Drehimpulssatzes möglich ist. Auf Anwendungen zur Analyse des kontinuierlichen Betaspektrums wird hingewiesen. *Walter Glaser.*

### Relativitätstheorie:

Castro Brzezicki, A. de: Die relativistischen Theorien Einsteins. *Gac. mat., Madrid* **3**, 18—27 (1951) [Spanisch].

Schlomka, Teodor: Das Ohmsche Gesetz bei bewegten Körpern. *Ann. der Physik*, VI. F. **8**, 246—252 (1951).

Introduisant, comme d'habitude, les deux composantes  $s'^i$  et  $s''^i$  de la quadri-densité de courant respectivement parallèle et perpendiculaire à la quadrivitesse  $v$  de la matière conductrice, l'A. définit le tenseur antisymétrique

$$s^{ik} = v^i s^k - v^k s^i \equiv v^i s''^k - v^k s''^i;$$

il remarque alors que l'écriture  $v_k s^{ik} = c \sigma v_k F^{ik}$  équivaut aux formules quadri-dimensionnelles classiques de la loi d'Ohm. — On discute l'interprétation des composantes des divers tenseurs en termes de deux acceptions différentes des mots convection et conduction. *Olivier Costa de Beauregard.*

Lampariello, Giovanni: Relatività ed elettrodinamica. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **6**, 118—142 (1951).

Ein historischer Überblick über die Entwicklung des Relativitätsprinzips in der phänomenologischen Elektrodynamik. Besonderes Gewicht wird auf die Schwierigkeiten einer befriedigenden Definition des Spannungstensors bei Anwesenheit von Materie gelegt, für die verschiedene Konkurrenzvorschläge zur Diskussion stehen. Eine neue Behandlung dieses Problems wird in Aussicht gestellt.

*M. R. Schaafroth.*

McCrea, W. H.: The clock paradox in relativity theory. *Nature* **167**, 680 (1951).

Wilker, P.: Über die relativistische Invarianz der kanonischen Grundgleichung. *Helvet. phys. Acta* **24**, 319—321 (1951).

Bequerel, Jean: Sur la structure de l'espace-temps et la notion physique du temps dans un champ de gravitation statique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **233**, 590—593 (1951).

Das Schwarzschildsche Linienelement wird durch Plausibilitätsbetrachtungen im Rahmen der spez. Rel. Th. abgeleitet ohne Benutzung der Feldgleichungen der allg. Rel. Th. *Otto Heckmann.*

Zaycoff, Raschko: Verallgemeinerte Theorie der Gravitation. *Izvestija Bulgarskata Akad. Nauk, Otdel. fiz.-mat. techn. Nauki*, Ser. fiz. **1**, 244—258, russische und deutsche Zusammenfassg. 259—260, 260—262 (1951) [Bulgarisch].

Die Verteilung der Massen deformiert das raum-zeitliche Kontinuum der Punkt Ereignisse  $R_4$  und ruft innerhalb desselben eine Riemannsche Metrik hervor, die sich vermöge der 10 Komponenten  $g_{\lambda\mu}$  des metrischen Grundtensors beschreiben läßt. Diese ist die Grundannahme der Einsteinschen Theorie der Gravitation, in der die Größen  $g_{\lambda\mu}$  mit den Gravitationspotentialen identifiziert wurden. Wir werden nun außerdem annehmen, daß auch Gravitationsladungen vorhanden sind, die positiv und den schweren Massen proportional sind und analoger Weise wie die elektrischen Ladungen in der Elektrodynamik von Maxwell-Lorentz wirken, indem sie ein neues Gravitationsfeld hervorrufen, das durch die 4 Komponenten  $g_\lambda$  eines Vektorpotentials im  $R_4$  beschrieben wird. — Unsere Theorie führt bei passender Wahl der Integrationskonstanten zu denselben Werten für die Rotverschiebung und die Perihelbewegung des Merkurs, wie jene in der Einsteinschen Theorie der Gravitation. Sie ergibt aber für die Lichtablenkung im Gravitationsfelde der Sonne den Wert  $2'' \cdot 275$ , der innerhalb der Fehlergrenzen mit dem von Freundlich erhaltenen empirischen Wert  $2'' \cdot 24 \pm 0'' \cdot 10$  übereinstimmt.

(Aus der Zusammenfassung des Autors.)

Majumdar, N. G.: On thermodynamics of matter in a static field. *Bull. Calcutta math. Soc.* **43**, 51—55 (1951).

Die Wärmeleitungsgleichung wird im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie für eine vierdimensionale Riemannsche Weltmannigfaltigkeit verallgemeinert. Hat das Linienelement die Form  $ds^2 = -g_{11}(dx^1)^2 - g_{22}(dx^2)^2 - g_{33}(dx^3)^2 + g_{44}(dx^4)^2$  mit zeitlich konstanten  $g_{ii}$ , dann ist wie im euklidischen Falle die einzige stationäre Lösung die der räumlich konstanten Temperaturverteilung. Dabei ist die Temperatur in bezug auf ein fest gewähltes Koordinatensystem der Weltmannigfaltigkeit zu messen. Bei der Herleitung kommt Verf. ohne die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie aus. Geht man zur Eigentemperatur  $T_0$  über, dann folgt die Tolman-Bedingung  $T_0 \sqrt{g_{44}} = \text{konst.}$ , die für einen Spezialfall schon früher (R. C. Tolman, dies. Zbl. 9, 413) hergeleitet wurde.

*Rudolf Kippenhahn.*

**Heckmann, O., P. Jordan und W. Fricke: Zur erweiterten Gravitationstheorie.**

**I. Z. Astrophys. 28, 113—149 (1951).**

In dieser Arbeit werden kugelsymmetrische Lösungen der Gravitationsgleichungen untersucht, wie sie allgemein in früheren Arbeiten aufgestellt wurden. (Zusammenfassend dargestellt in: G. Ludwig, Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie. Braunschweig, 1951.) Es gelingt den Verff., das Feld einer punktförmigen Ladungsverteilung exakt zu berechnen. Um mit der Erfahrung der Periheldrehung des Merkur und der Ablenkung des Lichtes am Sonnenrande nicht in Widerspruch zu kommen, müssen die Feldgleichungen aufgegeben werden, die sich einfach durch  $R_{\mu\nu} = 0$  darstellen lassen, wobei  $R_{\mu\nu}$  der fünfdimensionale verjüngte Krümmungstensor ist. Schon um die kosmologischen Erfahrungen darzustellen, hatte Ref. andere Feldgleichungen vorgeschlagen (s. obiges Buch). Diese selben Feldgleichungen lassen auch, wie in der vorliegenden Arbeit ausführlich diskutiert wird, ein Feld eines Massenpunktes als Lösung zu, das die Erfahrungen wiederzugeben gestattet. Es ist das Eigenartige dieser neuen Gravitationstheorie, daß für einen singulären Massenpunkt, nicht wie in der alten Einsteinschen Theorie, nur eine Konstante, nämlich die Masse, frei wählbar bleibt, sondern noch eine zweite. Selbstverständlich muß diese zweite Konstante auf irgendeine Weise durch die Eigenart der Masse gegeben sein, durch die das Gravitationsfeld erzeugt wird. Hier nun kommt man nicht herum um spezielle Annahmen über den Energieimpulstensor und das Verhalten der Materie in dem das Gravitationsfeld erzeugenden Stern. Die Diskussion wird unter plausiblen Annahmen durchgeführt. Das Ergebnis läßt sich mit den Erfahrungen in Einklang bringen, wenn man einer schon früher in der Theorie freibleibenden Konstante einen nicht zu kleinen Wert erteilt. Es scheint nicht möglich, die Theorie etwa so zu formulieren, daß sich für die Periheldrehung der aus der allgemeinen Relativitätstheorie gefolgte Wert ergibt, und andererseits die Ablenkung des Lichtes am Sonnenrande eine Abweichung von dem Einsteinschen Werte erhält, was die Erfahrung zu zeigen scheint.

*Günther Ludwig.*

**Papapetrou, A. and E. Schrödinger: The point-charge in the non-symmetric field theory. Nature 168, 40—41 (1951).**

**Tonnelat, Marie-Antoinette: Compatibilité des équations de la théorie unitaire des champs. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 2407—2409 (1951).**

Dans le cadre d'une théorie unitaire des champs développée antérieurement (ce Zbl. 36, 429; 41, 328), l'A. se préoccupe, à la suite d'une remarque de M. Einstein, de la compatibilité des équations choisies. La détermination, à partir des champs, de la connexion affine  $\Delta$  (notations du II<sup>e</sup> travail cité) conduit à la résolution d'une équation (\*)  $R_{+-}^{\mu\nu} = 0$ ; d'autre part les combinaisons linéaires  $\Delta_{\mu\varphi}^{\varphi}$  des composantes de la connexion doivent être considérées comme données. Y a-t-il compatibilité entre (1) et cette donnée. L'A. établit d'abord que pour (\*) nécessairement  $\Delta_{\mu\varphi}^{\varphi} = f_{\mu} - f_{\bar{\mu}}$ . Puis en introduisant des changements de connexion  $\Delta$ , il montre que les équations de la théorie sont compatibles dans des cas étendus. Cette étude apporte des éclaircissements intéressants sur la théorie.

*André Lichnerowicz.*

**Tonnelat, Marie-Antoinette: Les équations du champ unitaire et leurs approximations. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 513—516 (1951).**

L'A. donne les formes explicites et approchées des équations du champ, dans le cadre des théories unitaires développées par elle (ce Zbl. 41, 328) à la suite des travaux d'Einstein-Schrödinger. Dans une première partie, les équations du champ  $R_{\mu\nu} = \lambda r_{\mu\nu}$  sont explicitées pour les différents choix possibles du tenseur



$R_{\mu\nu}$ . Dans une seconde partie, les équations approchées sont formés en seconde approximation, sous la seule hypothèse que le champ antisymétrique  $\varphi_{\mu\nu}$  est petit. Les équations électromagnétiques obtenues ne sont pas maxwelliennes, alors que les équations gravifiques sont, en première approximation et dans tous les cas, celles de la relativité générale.

*André Lichnerowicz.*

**Tonnellat, Marie-Antoinette:** Les équations électromagnétiques déduites d'une théorie unitaire des champs. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 555—557 (1951).

Etude développée des équations électromagnétiques approchées, formées dans un précédent travail (voir referat précédent) pour les trois hypothèses possibles sur le tenseur  $R_{\mu\nu}$ . L'A. établit que dans le cas  $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ , on ne peut avoir des équations maxwelliennes, avec  $\lambda \neq 0$  et  $\Gamma_\mu$  (vecteur de torsion)  $= 0$ . Au contraire dans les deux autres cas, les équations sont indépendantes de  $\Gamma_\mu$  et on peut annuler éventuellement ce vecteur.

*André Lichnerowicz.*

**Vigier, Jean-Pierre:** Introduction géométrique des particules élémentaires en théorie unitaire affine. C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 1187—1189 (1951).

Partant de la théorie unitaire affine de M. Schrödinger dans laquelle l'espace est défini par les 64 coefficients de connexion affine  $\Gamma_{kl}^i$ , l'A. assimile les champs physiques réels définissant les particules aux déformations infinitésimales de l'espace-temps euclidien, les particules élémentaires correspondant aux déformations infinitésimales de base au moyen desquelles on peut reconstituer n'importe quelle autre déformation. On montre que ces déformations élémentaires infinitésimales se ramènent à trois: 1° La pseudo-torsion à laquelle correspond le lagrangien des corpuscules de spin 1, 2° la translation correspondant au lagrangien des particules de spin 1/2, 3° la transformation autométrique correspondant au lagrangien des particules de spin 0.

*Gérard Petiau.*

**Bandyopadhyay, Gaganbihari:** A strange feature of Einstein's most recent generalized field theory. Nature **167**, 648—649 (1951).

Es wird gezeigt, daß die neueste Form der Einsteinschen verallgemeinerten Feld-Theorie im Falle

$$g_{11} = -\alpha(r); \quad g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta; \quad g_{44} = v(r); \quad g_{14} = -g_{41} = w(r)$$

unter der Voraussetzung einer sehr naheliegenden Definition von Ladung und Masse auf das merkwürdige Resultat führt, daß die Existenz einer geladenen Masse ausgeschlossen, dagegen die einer ladungslosen Masse und einer masselosen Ladung möglich ist.

*Otto Heckmann.*

**Tonnellat, M. A.:** Théorie unitaire affine du champ physique. J. Phys. Radium **12**, 81—88 (1951).

Aus der Krümmungsgröße einer affinen Übertragung werden fünf Affinoren der Valenz zwei abgeleitet, und es wird gefordert, daß die Weltfunktion nur mittels dieser Affinorensoden  $\Gamma_{\mu\nu}^k$  abhängen soll. Sodann erhält man bei Ausführung der Variation eine Verallgemeinerung der Gravitationsgleichungen. Von diesen Gleichungen läßt sich die allgemeine Lösung angeben, und es ergeben sich daraus die Feldgleichungen. Am Schluß werden die Resultate gesammelt und zu den Einsteinschen in Beziehung gesetzt.

*Jan Arnoldus Schouten.*

**Ingraham, Richard:** Sur une théorie de la „relativité conforme“. C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 938—940 (1951).

**Ingraham, Richard:** Relativité conforme. C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 1072—1074 (1951).

Es handelt sich eigentlich nur um eine Ankündigung einer inzwischen erschienenen Arbeit (dies. Zbl. **40**, 129) über konforme Relativität. Es wird ungefähr angedeutet, wie man unter Verwendung von Hilfsräumen mittels eines Variationsprinzips zu Feldgleichungen gelangen kann.

*Jan Arnoldus Schouten.*

**Gião, Antonio:** Équations du champ, équations du mouvement et fonctions d'onde. I. J. Phys. Radium 12, 31—40 (1951).

L'A. rappelle d'abord les équations fondamentales de sa théorie unitaire du champ. L'univers  $V_4$ , variété riemannienne de métrique hyperbolique normale  $(g_{ik})$ , est considérée comme hypersurface d'un  $V_5$  et la forme quadratique de plongement  $(\omega_{ik})$  joue un rôle fondamental. Dans les conceptions de l'A., la forme  $(g_{ik})$  caractérise les phénomènes gravitationnels, tandis que la forme  $(\omega_{ik})$  caractérise les phénomènes électromagnétiques. Les équations du champ sont alors

$$R_{ik} - \frac{1}{2}(R + \lambda_g) g_{ik} = T_{ik}, \quad S_{ik} - \frac{1}{2}(S + \lambda_\omega) \omega_{ik} = U_{ik},$$

où  $R_{ik}$  et  $S_{ik}$  sont les tenseurs de Ricci associés respectivement aux formes quadratiques  $(g_{ik})$  et  $(\omega_{ik})$ ,  $\lambda_g, \lambda_\omega$  deux constantes et où les seconds membres constituent la généralisation du classique tenseur d'impulsion-énergie. A ces équations, il convient d'adjoindre les équations de compatibilité de Gauss. Dans une seconde partie, l'A. déduit classiquement les équations du mouvement pour les fluides élémentaires (de matière et d'électricité) des conditions de conservation des deux tenseurs  $T_{ik}$  et  $U_{ik}$  relatifs à ces fluides. Dans les conceptions de l'A., le champ électromagnétique se trouve alors représenté par les symboles de Christoffel relatif aux  $(\omega_{ik})$  et ne se réduit qu'approximativement au tenseur électromagnétique classique. La réaction de rayonnement et les forces dépendant du spin des particules font leur apparition quand on opère la transition des particules infinitésimales (équations densitaires) vers des particules de masse et charge finies.

*André Lichnerowicz.*

**Gião, Antonio:** Équations du champ, équations du mouvement et fonctions d'onde. II. J. Phys. Radium 12, 99—106 (1951).

Suite de la théorie de l'A. (v. ce Zbl. 40, 279). L'A. introduit d'abord les fonctions propres des opérateurs laplaciens associés à la métrique „interne“ et à la métrique „externe“ de l'espace-temps; il analyse au moyen de ces fonctions les propriétés des fluides élémentaires de matière et d'électricité. La quantification des équations du champ écrites dans la première partie de ce papier conduit à de nouveaux potentiels gravifiques, nucléaires et électromagnétiques (sans infinis) auxquels correspondent des énergies propres finies pour les particules et champs quantifiés. Ces potentiels ont une forme analogue à ceux introduits par L. de Broglie (ce Zbl. 34, 426, 427) ou à leur généralisation pour les systèmes de particules.

*André Lichnerowicz.*

### Quantentheorie:

**Lüders, Gerhart:** Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß. Ann. der Physik, VI. F. 8, 322—328 (1951).

Im Anschluß an die Betrachtungen über den Meßprozeß in dem Buch von J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Berlin 1932) wird vom Verf. eine allgemeine Regel hergeleitet, nach welcher man aus dem statistischen Operator vor einer Messung denjenigen nach einer Messung erhält, falls man eine Observable mit diskretem Eigenspektrum gemessen hat. Die Ableitung ergibt sich ziemlich zwangsläufig aus der Deutung der Quantenmechanik. Die Vorschrift entspricht genau dem, was man sonst auch schon in speziellen Fällen gewohnt war durchzuführen. Sie lautet kurz zusammengefaßt, daß für den Fall eines statistischen Operators  $Z$  vor der Messung sich nach der Messung der statistische Operator  $Z' = P_k Z P_k$  ergibt, wobei  $P_k$  den Projektionsoperator für den zum  $k$ -ten Eigenwert gehörigen Eigenraum darstellen möge.

*Günther Ludwig.*

**Stueckelberg, E. C. G. and A. Petermann:** The normalization group in quantum theory. Helvet. phys. Acta 24, 317—319 (1951).

**Putnam, C. R.:** The quantum-mechanical equations of motion and commutation relations. Phys. Review, II. Ser. 83, 1047—1048 (1951).

Hamiltonfunktion  $H = \frac{1}{2} p^2 + V(q)$  und Bewegungsgleichungen  $i[H, q] = p$ ,  $i[H, p] = -\partial V/\partial q$  setzen nicht notwendig die Vertauschungsregel  $i[p, q] = 1$  voraus (Wigner, dies. Zbl. 36, 143). Diese Vertauschungsregel ist aber notwendig, wenn  $V = a q^n + b$  mit ungeradem  $n$  ist. Friedrich Hund.

**Feynman, Richard P.:** The concept of probability in quantum mechanics. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 533—541 (1951).

**Lenzen, Victor F.:** Philosophical problems of the statistical interpretation of quantum mechanics. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 567—579 (1951).

**Broglie, Louis de:** Remarques sur la théorie de l'onde pilote. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 641—644 (1951).

Darstellung der Gründe, die Verf. um 1928 bewogen haben, die Interpretation der quantenmechanischen Wellenfunktion als Führungswelle (onde pilote) aufzugeben, als Entgegnung auf eine Arbeit von Bohm [Phys. Review, II. Ser. 85, 166 (1952)]. Gerhart Lüders.

**Vallée, Robert:** Aspect informationnel de certaines relations d'incertitude. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1580—1581 (1951).

**Ludwig, Günther:** Die erzwungenen Schwingungen des harmonischen Oszillators nach der Quantentheorie. Z. Phys. 130, 468—476 (1951).

Die erzwungene Schwingung des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik wird exakt dargestellt und diskutiert. M. R. Schafroth.

**Landauer, Rolf:** Reflections in one-dimensional wave mechanics. Phys. Review, II. Ser. 82, 80—83 (1951).

Es wird eine Lösung der eindimensionalen Schrödingergleichung in Form einer unendlichen Reihe angegeben, welche in Gebieten regulären Potentials konvergiert und eine Verbesserung der bekannten WKB-Methode darstellt. Der erste Term der Reihe ist die WKB-Lösung: sie kann anschaulich so verstanden werden, daß man das (glatte) Potential durch eine Treppenfunktion approximiert und zwar die Variation der Wellenlänge an den Stufen, nicht aber die Erzeugung reflektierter Wellen an den Stufenkanten berücksichtigt. Der zweite Term der Reihe entspricht dann eben diesen reflektierten Wellen und gibt eine einfach anzuschreibende Korrektur zur WKB-Amplitude. Die Bedeutung der höheren Terme ist entsprechend. — Die Methode wird auf den Fall eines periodischen Potentials angewandt. Hier liefert die WKB-Methode bekanntlich die Bänderstruktur nur für die Zustände, in denen das Teilchen klassisch „gefangen“ ist, nicht aber für die höheren. Dies ist auch verständlich, stammen doch die verbotenen Energiezonen gerade von der (Braggschen) Reflexion der Wellen. In der Tat liefert auch der zweite Term der Entwicklung das Auftreten solcher verbotener Zonen. M. R. Schafroth.

**Latter, A. L.:** A scattering approximation. Phys. Review, II. Ser. 83, 1056—1057 (1951).

**Goldberger, M. L.:** Note on the general theory of scattering. Phys. Review, II. Ser. 82, 757 (1951).

**Dirac, P. A. M.:** The relation of classical to quantum mechanics. Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver 1949, 10—31 (1951).

Verf. stellt zunächst, ohne besondere Vorkenntnisse vorauszusetzen, den Zusammenhang von klassischer Mechanik und Quantenmechanik dar. Er geht dann auf die noch offenen Probleme der Quantentheorie ein und vergleicht dabei die gegenwärtige Situation mit der von 1924: trotz der großen Erfolge in den letzten Jahren wird vermutlich eine Änderung in den Grundlagen der Theorie notwendig sein, die auch zu einer Neuformulierung der heutigen nichtrelativistischen Quantenmechanik führen könnte. Die Schwierigkeiten scheinen miteinander verknüpft zu sein, dennoch sollte man versuchen, sie zu separieren und getrennt zu behandeln. Abschließend diskutiert Verf. einige seiner neuen Ideen, insbesondere zur relativistischen Dynamik. Gerhard Höhler.



Valatin, Jean G.: Sur la seconde quantification. II. Théorie du positron. J. Phys. Radium 12, 542—549 (1951).

Die Positrontheorie (Löchertheorie) wird in üblicher Weise entwickelt, wobei im Sinne einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 42, 453) die Nomenklatur der Grassmannschen „äußeren Algebra“ verwendet wird. *M. R. Schafroth.*

Valatin, Jean G.: Sur l'interprétation des opérateurs de la théorie du positron. J. Phys. Radium 12, 607—615 (1951).

Eine Fortsetzung der vorsteh. besprochenen Arbeit. Die Ladungskonjugation wird eingeführt und ein bekanntes Symmetrietheorem bewiesen. *M. R. Schafroth.*

Géhéniau, J.: Les fonctions singulières de l'équation de Klein-Gordon, tenant compte d'un champ magnétique extérieur. Physica 16, 822—830 (1950).

(Voranzeige s. dies. Zbl. 39, 430.) Es handelt sich um die Klein-Gordon-Schrödingersche (relativistische) Wellengleichung

$$(*) \quad (\Delta - \partial^2/\partial t^2 - 2i \partial/\partial y - x^2 - m^2) \psi(x, y, z, t) = 0$$

für eine Partikel mit der Ladung  $e$ , der Ruhmasse  $m$  und einem homogenen konstanten Magnetfeld. Eine singuläre Funktion  $D(P, P')$  muß außer (\*) noch der zu (\*) adjungierten Differentialgleichung genügen (in den Variablen  $x', y', t', z'$  des Punktes  $P'$  im Minkowskischen Kontinuum). Das bedeutet  $D(P, P') = 0$ ,  $\partial D/\partial t' = -\partial D/\partial t = \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(\zeta)$  für  $\tau = 0$ ,  $t = t'$ , wenn  $\delta$  Diracs Funktion bezeichnet und die Symbole  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  die Differenzen  $\xi = x' - x$ ,  $\eta = y' - y$ ,  $\zeta = z' - z$ ,  $\tau = t' - t$  bedeuten. Nach ausführlicher Diskussion der singulären Funktion  $D(P, P')$  betrachtet Verf. weitere singuläre Funktionen  $D_+(P, P')$  und  $D_-(P, P')$ , deren Zusammenhang mit d'Hadamards Elementarlösung  $D_{(1)}$  der Klein-Gordon-Schrödingerschen Gleichung abgesehen von einem Faktor durch  $D_{(1)} = i(D_+ - D_-)$  gegeben ist. Singuläre Funktionen dieser Art wurden bereits von Feynman behandelt.

*Max Pintl.*

Géhéniau, J. et M. Demeur: Solutions singulières des équations de Dirac, tenant compte d'un champ magnétique extérieur. Physica 17, 71—75 (1951).

Etant donné un électron placé dans un champ magnétique uniforme, constant, ( $A_\mu = \delta_{\mu 2} H x$ ), les Aa. déterminent une matrice solution:  $S(P, P')$  avec  $P(x, y, z, t)$ ,  $P'(x', y', z', t')$  se réduisant pour  $t = t'$  à:  $i \gamma_4 \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$ . Cette solution obtenue par une méthode analogue à celle de Wentzel est donnée par

le produit de:  $\left\{ \gamma^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) + m \right\}$  par une matrice:  $\Delta(e, e')$  d'expression relativement simple. Enfin  $S(P, P')$  est également calculée à partir d'équations de Gordon-Klein dont les solutions singulières ont été précédemment étudiées par J. Géhéniau (v. l'analyse précéd.).

*Antoine Visconti.*

Snyder, Hartland S.: Remarks concerning the existence of the Foldy-Wouthuysen transformation. Phys. Review, II. Ser. 84, 1052—1053 (1951).

Yang, L. M.: A note on the trace of the product of Dirac's matrices. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 1333 (1951).

Petiau, Gérard: Sur la création de paires électrons-positons dans les processus de collisions entre particules de spin  $\hbar/2$ . C. r. Acad. Sci., Paris 232, 1910—1912 (1951).

Extension de calculs précédents de l'A. à un problème étudié par ailleurs par Bhabha et Racah, notamment. Les calculs, faits dans un formalisme covariant, concernent des particules chargées, initialement et finalement libres.

*Olivier Costa de Beauregard.*

Wu, Shi-Shu: A remark on the conventional perturbation theory. Phys. Review, II. Ser. 83, 730—734 (1951).

Verf. zeigt am Beispiel der Quantenelektrodynamik, wie man von der alten Störungstheorie im Schrödingerbild zu der Dysonschen Formel für die  $S$ -Matrix (dies. Zbl. 33, 142) kommt.

*Gerhard Höhler.*

Frank, R. M.: The fourth-order contribution to the selfenergy of the electron. Phys. Review, II. Ser. 83, 1189—1193 (1951).

Nach den Methoden von Feynman wird der divergente Teil der  $e^4$ -Näherung zur Selbstenergie eines freien Elektrons berechnet. Die Abhängigkeit von der Hilfsmasse  $\lambda$  ergibt sich zu  $\frac{m e^4}{4 \pi^2} \left\{ -\frac{19}{8} \ln^2 \left( \frac{\lambda^2}{m^2} \right) + \frac{7}{12} \ln \left( \frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right\}$ . *Harry Lehmann.*

**Sollfrey, W. and G. Goertzel:** Some quantum-mechanical divergences of a simple field. *Phys. Review, II. Ser. 83, 1038—1044 (1951).*

Als einfaches Modell eines klassischen bzw. quantisierten Feldes wird eine Saite betrachtet, an die in der Mitte ein Oszillator angekoppelt ist. Nach einer kurzgefaßten klassischen Behandlung der endlichen bzw. unendlichen Saite werden Saite und Oszillator quantisiert und der Energienullpunkt wird in den Grundzustand des gekoppelten Systems gelegt. Wählt man als Anfangszustand einen Eigenzustand des ungekoppelten Systems, so ergibt sich bei endlicher Saitenlänge der Erwartungswert der Energie als endlich — bei unendlicher Saitenlänge tritt eine Ultrarotdivergenz auf —, der Zustandsvektor ändert jedoch zunächst mit unendlicher Geschwindigkeit seine Lage im Hilbertraum. Es wird diskutiert, ob das Herauspräparieren eines solchen Anfangszustandes überhaupt physikalisch sinnvoll ist, und eine Modifikation des Anfangszustandes infolge endlicher Zeitdauer des Meßprozesses vorgeschlagen. Für den zunächst streng ermittelten Erwartungswert der Energie für den angegebenen Anfangszustand werden dann für kleine Kopplungskonstante  $e$  Näherungsausdrücke angegeben. Für hinreichend große Saitenlänge  $L$  tritt dabei ein Ausdruck  $\text{prop. } e \log e L$  auf, der bei Entwicklung nach Potenzen von  $e$  zu scheinbaren Divergenzen führt. *Gerhart Lüders.*

**Källén, G.:** Mass- and charge-renormalizations in quantum electrodynamics without use of the interaction representation. *Ark. Fys. 2, Nr. 19, 187—194 (1950).*

Verf. weist auf folgenden Umstand hin: 1. Man kann die Operatoren der „interaction“-Darstellung auffassen als die Größen nullter Näherung im Rahmen einer Störungsrechnung, welche direkt an die Feldgleichungen des „Heisenberg-Bildes“ anknüpft. 2. Die Lösung der Bewegungsgleichung durch Schwinger einerseits, Dyson andererseits läuft darauf hinaus, die „Heisenberg-Operatoren“ durch die Operatoren der „interaction“-Darstellung auszudrücken. Die an diese Feststellungen anknüpfende Vermutung, daß die Ergebnisse von Schwinger bzw. Dyson auch durch eine direkte störungstheoretische Berechnung der Operatoren im Heisenberg-Bild erhalten werden können, wird bestätigt für das Problem der Vakuumpolarisation in beliebig hoher Ordnung bei Teilchen vom Spin  $\frac{1}{2}$  oder 0 und für die Strahlungskorrektur 2. Ordnung an der Stromdichte für Diraceteilchen. Die Rechnung gestaltet sich etwas durchsichtiger als bei Benutzung des Schwingerschen Formalismus. Andererseits scheint die Feynman-Dysonsche Methode — jedenfalls bei Dirac-Teilchen — rascher zum Ziel zu führen. Verf. weist jedoch darauf hin, daß bei Teilchen mit ganzzahligem Spin in der interaction-Darstellung die Normalenrichtungen eines Systems raumartiger Flächen explizit ingehen und die Zwischenrechnung belasten, während diese Komplikation bei seiner Methode nicht auftritt. *R. Haag.*

**Källén, Gunnar:** Formal integration of the equations of quantum theory in the Heisenberg representation. *Ark. Fys. 2, Nr. 37, 371—410 (1951).*

Die direkte störungstheoretische Behandlung der Feldgleichungen im Heisenberg-Bild wird systematisch durchgeführt. Die Operatoren nullter Näherung sind dabei identisch mit denen der „interaction“-Darstellung (s. vorsteh. Referat). Verf. beweist zunächst die Äquivalenz der einzelnen Näherungsstufen mit den entsprechenden bei Schwinger bzw. Dyson, indem er zeigt, daß die von diesen Autoren gegebenen Lösungen die Rekursionsformeln der Störungsrechnung erfüllen. — Im 2. Teil der Arbeit wird die Lösung unmittelbar (ohne Verwendung der Hamiltondichte) durchgeführt. Die Struktur der entstehenden Ausdrücke wird diskutiert. Bezüglich der Einfachheit des Verfahrens vgl. vorstehendes Referat. *R. Haag.*

**Thirring, Walter E.:** Zum Wert der Renormalisationskonstanten. *Z. Naturforsch. 6a, 462—463 (1951).*

Verf. weist auf die Möglichkeit hin, daß bei strenger Rechnung in der Quantenelektrodynamik keine divergenten Terme für die Renormierung von Ladung und

Masse auftreten. Um diese Frage zu entscheiden, hätte man nach Dyson in den betreffenden irreduziblen Graphen strenge Scheitelanteile und  $S'_F$ -Funktionen zu benutzen. Mit einer gewissen Näherung für die  $S'_F$ -Funktion zeigt der Verf. für die Vakuumpolarisation, daß man hierdurch möglicherweise konvergente Integrale erhält.

*Harry Lehmann.*

**Snyder, Hartland S.: Charge renormalization in the Hartree approximation.** Phys. Review, II. Ser. 82, 279 (1951).

Es wird kurz skizziert, daß in der Hartreeschen Näherung sich ebenfalls eine Form für die bekannte Ladungsrenormalisierung ergibt.

*Günther Ludwig.*

**Demeur, M.: Charge-renormalization accompanying radiative corrections.** Nature 168, 1037—1038 (1951).

**Burton, W. K.: Lagrangian S-matrix.** Phys. Review, II. Ser. 84, 158 (1951).

**May, Michael M.: On the polarization of high energy Bremsstrahlung and of high energy pairs.** Phys. Review, II. Ser. 84, 265—270 (1951).

**Franz, W. und L. Tewordt: Die Multipole des Mesonenfeldes.** Z. Phys. 130, 457—467 (1951).

Es werden die Multipollösungen für skalare und vektorielle Mesonfelder angegeben. Die letzteren, welche für verschwindende Masse in die elektromagnetischen Multipolfelder übergehen, zerfallen in drei Klassen: a) die „magnetischen“ Multipolfelder, ganz analog denen des elektromagnetischen Feldes; sie sind insbesondere transversal. b) die „elektrisch-transversalen“ Multipolfelder, welche ebenso den elektrischen des elektromagnetischen Feldes entsprechen. c) die „elektrisch-longitudinalen“ Multipolfelder, ohne Analogon im elektromagnetischen Falle. -- Bei Anwesenheit eines elektrostatischen Kraftfeldes werden die Fälle b) und c) gemischt.

*M. R. Schafroth.*

**Klein, Abraham: The coupling of a Dirac field to a Kemmer field.** Phys. Review, II. Ser. 82, 639—646 (1951).

Ein Mesonfeld wird nach Duffin und Kemmer durch eine Gleichung vom Diracschen Typ  $(\beta_\mu p_\mu + \kappa)\Phi(x) = 0$  und Vertauschungsregeln für 16-reihige Matrizen  $\beta_\mu$  dargestellt (dies. Zbl. 23, 190); es ist dann pseudoskalares und vektoriell-feld zusammengefaßt. Aus einem allgemeinen invarianten Kopplungsansatz vom Typ  $\bar{\psi}\psi\Phi$  zwischen einem Diracfeld  $\psi$  und einem Mesonfeld  $\Phi$  können durch Spezialisierung die aus der feldmäßigen Behandlung bekannten Kopplungen gewonnen werden.

*Friedrich Hund.*

**Rzewuski, Jan: The self-energy of scalar mesons in interaction with nuclei.** Acta phys. Polon. 10, 141—150 (1951).

Nach der Methode von Schwinger wird die Selbstenergie skalarer Mesonen bei skalarer und vektorieller Kopplung mit Nucleonen betrachtet. Die Arbeit ist 1949, etwa gleichzeitig mit der Untersuchung von Matthews (dies. Zbl. 35, 137) über den gleichen Problemkreis durchgeführt worden. Eine vom Verf. diskutierte Komplikation bei Vektorkopplung dürfte unnötig sein, wenn man (wie bei Matthews) die fraglichen Ausdrücke genauer auswertet.

*Harry Lehmann.*

**Rayski, J. and J. Rzewuski: On a system of fields free of divergences of the mass-renormalization type.** Acta phys. Polon. 10, 159—172 (1951).

Bei der Kopplung mehrerer Felder untereinander erscheint es möglich, daß auftretende Divergenzen sich gegenseitig kompensieren. Daß dies tatsächlich so ist, zeigen Verff. an einem Beispiel. Allerdings müssen den benutzten Parametern, wie Masse und Kopplungskonstanten, in dem von ihnen gewählten Beispiel Werte erteilt werden, die nicht mit der Erfahrung in Übereinstimmung stehen. Weiterhin ist es noch nicht klar, ob in höherer Näherung nicht doch Divergenzen auftreten können; doch ist es lehrreich, zu sehen, daß bei der sicher in der Natur vorhandenen Kopplung dieser Einzelfelder untereinander die Selbstenergien sich sicherlich nicht aus einer Feldtheorie mit einem oder zwei Feldern ergeben können.

*Günther Ludwig.*



**Rayski, Jerzy:** Remarks on some non-linear effects in field theory. I. Acta phys. Polon. 10, 151—158 (1951).

Als einfaches Beispiel für das Auftreten nichtlinearer Effekte in einer quantisierten Feldtheorie berechnet der Verf. das Matricelement für die Streuung neutraler skalärer Teilchen aneinander, die als Folge ihrer Kopplung mit einem geladenen skalaren Feld auftritt. Weiterhin wird die Wahrscheinlichkeit für den spontanen Zerfall eines derartigen neutralen Teilchens bestimmt. *Harry Lehmann.*

**Rayski, Jerzy and Bronislaw Średniawa:** Non linear effects in the theory of quantized fields. II. Acta phys. Polon. 10, 207—212 (1951).

Verff. untersuchen das Matricelement für die Streuung von Licht an Licht bei Kopplung des elektromagnetischen Feldes mit einem geladenen Mesonfeld vom Spin Null. Die Rechnung wird nach der Methode von Feynman-Dyson durchgeführt. Außer für kleine Energien sind die notwendigen Integrationen z. T. nur numerisch durchführbar. *Harry Lehmann.*

**Gunn, J. C., E. A. Power and B. F. Touschek:** The production of mesons in proton-proton collisions. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 523—536 (1951).

Verff. berechnen den Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von  $\pi^+$  Mesonen durch Proton-Proton-Stoß. Die Protonen werden nichtrelativistisch behandelt. Die Wechselwirkung der Nucleonen wird durch ein phänomenologisches Potential beschrieben, unter Berücksichtigung der Kopplung der Nucleonen im Anfangs- und Endzustand, sowie der Bildung von Deuteronen. Die Rechnung wird für skalare Mesonen mit skalärer Kopplung und für pseudoskalare Mesonen mit pseudovektorieller Kopplung durchgeführt. Das Energiespektrum der Mesonen hat ein Maximum bei den größtmöglichen Werten in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Die Winkelverteilung wird durch skalare Mesonen am besten wiedergegeben (vgl. hierzu jedoch nachst. Referat). *Harry Lehmann.*

**Brueckner, Keith:** Production of  $\pi$ -mesons in nucleon-nucleon collisions. Phys. Review, II. Ser. 82, 598—606 (1951).

Es wird der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von geladenen und neutralen  $\pi$ -Mesonen durch Nucleon-Nucleon-Stoß für Spin 0 und Spin 1 (Vektorkopplung) berechnet. Die Rechnung wird einmal rein feldtheoretisch als Effekt dritter Ordnung, zum anderen mit Benutzung eines phänomenologischen Nucleonpotentials durchgeführt. Verf. untersucht die Berechtigung des letzteren Vorgehens und kommt zum Ergebnis, daß es für pseudoskalare Mesonen mit pseudoskalärer Kopplung nicht anwendbar ist, sonst jedoch zu brauchbaren Ergebnissen führt. Ebenfalls wird darauf hingewiesen, daß die Kopplung der Endnucleonen berücksichtigt werden muß. Qualitative Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen hinsichtlich des gesamten Wirkungsquerschnittes für die Erzeugung geladener und neutraler Mesonen und der Winkelverteilung wird durch pseudoskalare Mesonen mit Pseudovektorkopplung erreicht. *Harry Lehmann.*

**Roberts, K. V.:** An equivalence theorem in meson theory. Phys. Review, II. Ser. 83, 188—189 (1951).

Verf. betrachtet die Wechselwirkung geladener skalärer Teilchen mit dem elektromagnetischen Feld in den beiden Formulierungen mit bzw. ohne  $\beta$ -Matrizen. Durch Untersuchung der Feynmanschen Funktionen dieser beiden Fälle sieht man in einfacher Weise, wie die Unterschiede zwischen beiden Formulierungen kompensiert werden, so daß sie zur selben S-Matrix führen. *Harry Lehmann.*

**Foldy, L. L.:** New aspects of the pseudoscalar meson theory. Phys. Review, II. Ser. 84, 168 (1951).

**Pease, Jane S.:** Theory of dibaric particles. Phys. Review, II. Ser. 84, 167 (1951).

Jean, Maurice: Les méthodes de seconde quantification et de l'espace de configuration en théorie relativiste des systèmes de particules. I. Fermions sans interaction. II. Bosons de spin zéro sans interaction. III. Dérivation d'équations relativistes pour des particules en interaction. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 1183—1185, 1290—1291, 2405—2407 (1951).

Zur Herleitung einer Gleichung für das relativistische Zwei-Nukleonen-Problem betrachtet Verf. zunächst gequantelte Nukleonen- und Mesonen-Wellenfelder und geht dann ähnlich wie Fock (dies. Zbl. 4, 280) zum Konfigurationsraum über.

*Gerhard Höhler.*

Heisenberg, W.: On the mathematical frame of the theory of elementary particles. Commun. pure appl. Math. 4, 15—22 (1951).

Verf. gibt eine Übersicht über das von ihm in verschiedenen Arbeiten (dies. Zbl. 36, 268, 38, 408) entwickelte allgemeine Schema für eine Theorie der Elementarteilchen. Die Tatsache, daß bei hochenergetischen Prozessen alle Teilchensorten ineinander verwandelt werden können, legt es nahe, die gesamte Materie durch ein einziges Spinorfeld zu beschreiben. Dieses hat zur Vermeidung von Divergenzen regulären Vertauschungsrelationen zu genügen; dies hinwiederum bewirkt, daß die kausale Zeitordnung gestört ist. Nach einer eingehenden Diskussion dieses Zusammenhangs gibt Verf. der Hoffnung Ausdruck, daß man innerhalb seines Schemas eine Theorie werde finden können, bei welcher Abweichungen von der Kausalität nur innerhalb kleinster Zeitintervalle auftreten.

*M. R. Schaafroth.*

Finkelstein, R., R. Le Levier and M. Ruderman: Nonlinear spinor fields. Phys. Review, II. Ser. 83, 326—332 (1951).

Verff. untersuchen ein klassisches nichtlineares Spinorfeld. Die Lagrange-funktion enthält gegenüber der Diracschen Theorie ein Zusatzglied, das eine Linearkombination der Invarianten  $(i\psi^+\psi)^2$  und  $\sum_1^5 (\psi^+\gamma_u\psi)^2$  darstellt. Für die Lösungen der Feldgleichungen wird ein Ansatz mit einfacher Zeit- und Winkelabhängigkeit gemacht. Die Forderung nach Lösungen, die überall endlich und quadratisch integrierbar sind, führt auf ein nichtlineares Eigenwertproblem, das von den Verff. numerisch mit einem Differential-Analysator behandelt wurde. Die Quantentheorie wird dann in der Weise berücksichtigt, daß die Gesamtladung ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung ist. Man erhält so Lösungen, die Teilchen mit bestimmten Massen entsprechen. Die Anzahl der Massen ist in den betrachteten Fällen klein. Für gewisse Lagrange-funktionen treten keine negativen Energien auf.

*Harry Lehmann.*

Vrkljan, V. S.: Die de Brogliesche Theorie der Partikeln mit dem maximalen Spin 3/2 und die Schrödingerschen Oszillationen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1951 (88), 90—103 (1951).

Auch Wellengleichungen vom Diracschen Typus zum Spin  $\frac{3}{2}$  (Bhabha-Gleichungen) führen auf eine Schrödingersche Zitterbewegung. Die Zitterbewegung als Folge virtueller Emissions-Reabsorptionsprozesse muß als quantenhaftes Überbleibsel von allen physikalisch bedeutsamen klassischen Spin-Wellengleichungen erwartet werden. Sie zu untersuchen kann Aufschluß geben über die Art von Quanten, durch die sie bei den höheren Gleichungsstufen hervorgerufen wird. Verf. kann über den Spin  $\frac{3}{2}$  wegen zunehmender Kompliziertheit der Basismatrizen der Wellengleichung nicht hinausgelangen; jedoch könnte eine undorielle oder tensorielle Komponentenschreibweise der Spin-Wellengleichungen diese Schwierigkeiten überwinden helfen.

*Friedrich Leo Bauer.*

Darling, B. T. and M. Leichter: Group uniqueness in the irreducible volume character of events. Phys. Review, II. Ser. 84, 598—599 (1951).

**Sakata, Shoichi, Hiroomi Umzawa and Nusumu Kamefuchi:** Applicability of the renormalization theory and the structure of elementary particles. *Phys. Review*, II. Ser. **84**, 154—155 (1951).

**Rayski, J.:** Remarks on the non-local electrodynamics. *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A **206**, 575—583 (1951).

Verf. geht von einem nichtlokalen Spinorfeld aus, das den von Yukawa (dies. Zbl. **36**, 267) betrachteten Gleichungen genügt, und untersucht dann die Kopplung dieses Feldes mit dem (lokalen) elektromagnetischen Feld. Es wird eine Regel gegeben, um die Elemente der *S*-Matrix aufzustellen. Diese sind frei von Divergenzen. Nach Ansicht des Ref. führt der angegebene Ansatz jedoch zu größeren Abweichungen von der üblichen Theorie.

*Harry Lehmann.*

**Rayski, J.:** On the reciprocal field theory. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **64**, 657—659 (1951).

Verf. erläutert einen Ansatz für die Kopplung nichtlokaler Felder am Beispiel der Kopplung eines nichtlokalen skalaren Feldes mit einem lokalen skalaren Feld. Die Feldgleichungen für den gekoppelten Fall werden angegeben. Zur Konstruktion der *S*-Matrix wird auf die Methode von Yang-Feldman verwiesen (dies. Zbl. **38**, 407).

*Harry Lehmann.*

**Salecker, H.:** Zur Frage eines Massenunterschiedes zwischen Elektron und Positron. *Z. Naturforsch.* **6a**, 484—486 (1951).

Verschiedene (neuerdings wieder angezweifelte) experimentelle Ergebnisse des letzten Jahres [J. W. Du Mond, *Phys. Review*, II. Ser. **81**, 468 (1951) und A. Hedgran und D. A. Lind, *Phys. Review*, II. Ser. **82**, 126 (1951)], welche darauf hinzuweisen schienen, daß die Masse des Positrons nicht exakt gleich der des Elektrons ist, haben Verf. veranlaßt, diese Frage vom theoretischen Standpunkt zu beleuchten. Ein solcher Massenunterschied kann nur in einer nicht ladungssymmetrischen Theorie auftreten. Verf. betrachtet als vernünftiges Beispiel einer solchen die direkte Kopplung der Elektronen und Positronen an Neutrinos und Nukleonen, welche den  $\beta$ -Zerfall beschreibt, unter der wesentlichen Annahme, daß kein negatives Proton existiert. Die durch diese Kopplung bewirkte Selbstenergie des Elektrons verschwindet, während die des Positrons bei geeigneter Regularisierung wenigstens größenordnungsmäßig mit der elektrodynamischen verglichen werden kann. Falls man letztere mit der Gesamtmasse des Elektrons identifiziert, so ergibt erstere einen nach Vorzeichen und Größe mit dem von Du Mond angegebenen Wert vereinbaren Zusatz. Falls der Effekt sich also als reell herausstellte, könnte er als Hinweis auf die Nichtexistenz des negativen Protons (nicht aber als Beweis dafür!) aufgefaßt werden; umgekehrt verlangt die exakte Massengleichheit von Positron und Elektron die Ladungssymmetrie der Welt und damit die Existenz des negativen Protons.

*M. R. Schafroth.*

**Flint, H. T. and E. Marjorie Williamson:** The quantum mechanics of the electron. *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A **207**, 380—388 (1951).

Ausgehend von der 5-dimensionalen Symmetrie der Dirac-Gleichung versuchen Verff. eine Zusammenfassung einiger Größen zu 5-dimensionalen Vektoren und Tensoren: als 5. Komponente des (kinetischen) Energie-Impulsvektors dient die Ruhenergie, als 5. Koordinate  $x_5$  im wesentlichen der klassische Elektronenradius. Damit ergeben sich für die Komponenten  $M_{\mu 54} = X_\mu$  des Tensors der Drehimpulsdichten Größen, die mit den Ortskoordinaten  $x_\mu$  übereinstimmen bis auf Zusatzglieder von der Größenordnung der Compton-Wellenlänge, welche die Spinmatrizen enthalten. Die nichtvertauschbaren Größen  $X_\mu$  werden gedeutet als Operatoren des Teilchenorts. Es ist bemerkenswert, daß der so definierte Ort  $X_\mu$  keine Zitterbewegung ausführt. Seine Zeitableitung steht — im feldfreien Raum — mit dem Impuls in der klassischen Beziehung. Bei Anwesenheit von Feldern tritt jedoch ein Zusatzglied auf, das von den Verff. in Zusammenhang mit der Strahlungsdämpfung gebracht wird.

*R. Haag.*



**Destouches-Février, Paulette:** Sur la notion de système physique. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 604—606 (1951).

L'A. examine la possibilité d'obtenir une représentation des systèmes de corpuscules élémentaires compatible avec les phénomènes de création et annihilation de paires de corpuscules et propose à partir d'une correspondance biunivoque établie entre espèces de corpuscules et nombres premiers une représentation de la grandeur „composition“ permettant la description quantique d'un système indéterminé.

*Gérard Petiau.*

**König, H. W.:** Materielle und quantenhafte Eigenschaften elektromagnetischer Wellenfelder. Acta phys. Austr. 4, 405—430 (1951).

An Hand einer speziellen, einer räumlich quermodulierten ebenen Welle entsprechenden Lösung der Wellengleichung (mit zunächst beliebigem Dispersionsgesetz) versucht Verf. eine Rückführung der Quantentheorie der Strahlung auf klassische Begriffe. Das durch diese Lösung als Hertzscher Vektor bestimmte Feld gliedert sich in energetisch abgeschlossene Bezirke, „Phasenteilchen“ genannt, die sich mit Phasengeschwindigkeit bewegen. Eine (willkürliche) Aufspaltung der Energie eines solchen Phasenteilchens in „Strömungsenergie“, welche sich mit einer bestimmten „Energiegeschwindigkeit“ längs der Ausbreitungsrichtung der Welle fortpflanzt, und „Schwingungsenergie“, welche quer dazu pendelt und sich nur durch Rückverwandlung in die andere Energieform „vorwärtsbewegen“ kann, wird als physikalisch sinnvoll betrachtet. Identifiziert man die „Schwingungsenergie“ mit der Ruhmasse des Phasenteilchens, so bestehen für dieses die Beziehungen der speziellen Relativitätstheorie zwischen Energie, Impuls, Masse und Geschwindigkeit, wenn man für letztere die „Energiegeschwindigkeit“ setzt. — Über diese formalen Zusammenhänge hinaus schreitet Verf., wenn er versucht, die Quantentheorie einzuführen, indem er die Gesamtenergie des Phasenteilchens  $= h\nu$  setzt; dies legt ihm außerdem das Dispersionsgesetz fest. Durch die mathematisch nicht ganz durchsichtige „Kettenhypothese“ wird dann versucht, die Existenzfähigkeit eines isolierten Phasenteilchens zu demonstrieren, das Verf. gerne mit dem Lichtquant identifizieren möchte. Abgesehen von der Schwierigkeit, daß das Lichtquant dadurch eine von seiner „Form“ oder „Ausdehnung“ abhängige Ruhmasse erhält und eine ebenfalls ausdehnungsabhängige Dispersion im Vakuum erleidet — von der Verf. bemüht ist, zu zeigen, daß sie mit den Experimenten nicht im Widerspruch steht —, liegt es auf der Hand, daß dieses Modell eines bestimmten Energiepakets allen den durch das Stichwort „Komplementarität“ gekennzeichneten Eigenschaften der Quantentheorie in keiner Weise gerecht zu werden vermag.

*M. R. Schafröth.*

**Acheson jr., Louis K.:** Effect of finite nuclear size on the elastic scattering of electrons. Phys. Review, II. Ser. 82, 488—494 (1951).

Um den Einfluß der endlichen Ausdehnung des Kerns auf die Streuung schneller Elektronen zu ermitteln — die numerischen Rechnungen werden für den Energiebereich zwischen 15 und 35 MeV durchgeführt —, werden für die Kernladungszahlen  $Z = 13, 29, 50$  und  $79$  die beiden Fälle einer homogenen Raumladung und einer reinen Oberflächenladung, beidesmal vom gleichen Kugelradius  $1,45 \cdot 10^{-13} \text{ A}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}$ , nach der Phasenmethode im Anschluß an die Diracgleichung durchgerechnet. Es zeigt sich, daß Unterschiede gegenüber dem Fall einer Punktladung fast nur durch die zu  $j = 1/2$  gehörigen Anteile der Streufunktionen bedingt sind, daß aber andererseits der Unterschied zwischen den beiden diskutierten Kernmodellen doch hinreichend groß wäre, um durch genaue Messungen festgestellt werden zu können.

*Fritz Sauter.*

**Gluckstern, R. L. and H. A. Bethe:** Neutron-deuteron scattering at high energy. Phys. Review, II. Ser. 81, 761—781 (1951).

Die Schwierigkeiten bei der Behandlung dieses Problems sind einmal formal rechnerischer Art (Dreikörperproblem), zweitens und vor allem liegen sie in der mangelhaften Kenntnis der Kernkräfte zwischen Nucleonen hoher Energie (90 MeV) begründet. Umgekehrt rührt von eben dieser zweiten Schwierigkeit das Interesse am Problem her, da es verspricht zusätzlich Aufschluß über diese Kräfte zu geben. Die Berkeley-Versuche der letzten Jahre haben ergeben, daß die Proton-Neutron-Kraft durch den Ansatz von Serber (Zentralkraft mit 50% Austauschanteil) dargestellt werden kann; bei der Proton-Proton-Kraft bestehen dagegen erhebliche Unklarheiten. Deshalb wird auch in der vorliegenden Arbeit die Rechnung zwar mit der Serberschen Neutron-Proton-Kraft, dagegen mit verschiedenen Ansätzen für die Neutron-Neutron-Kraft ausgeführt, die nach allem bisherigen Wissen bis auf den Coulombanteil mit der Proton-Proton-Kraft übereinstimmen sollte. Der elastische Streuquerschnitt von Neutronen an Deute-

ronen ergab sich hierbei als recht gut in Übereinstimmung mit den vorliegenden Experimenten, sofern auch für die Neutron-Neutron-Kraft der Serbersche Austauschtyp (verschwindende Kraft in Zuständen ungerader Drehimpulsquantenzahl) angenommen wird. Das gleiche ergab sich aus dem unelastischen Querschnitt für Zertrümmerung des gestoßenen Deuterons (Protonenverteilung berechnet). — Da dies Ergebnis wahrscheinlich durch die neueren Erkenntnisse hinsichtlich der Proton-Proton-Streuung bei hohen Energien bereits überholt ist, gewinnt der methodische Teil an Interesse. Es wird im wesentlichen in Bornscher Näherung gerechnet, was den Vorteil hat, daß der Gesamtquerschnitt zerlegt werden kann in einen Neutron-Proton-Anteil, einen Neutron-Neutron-Anteil und einen Interferenzterm. Dadurch ist es möglich, in den einzelnen Anteilen die experimentellen Ergebnisse des einfacheren Zweikörperproblems zu verwenden und Fehler der Rechenmethode bis zu einem gewissen Grade zu eliminieren. In diesem Sinne ist nach Ansicht der Verf. auch die Verwendung der Bornschen Näherung für derartige Probleme zu rechtfertigen.

*S. Flugge.*

**Katscher, Friedrich:** Berechnung des Rechteckpotentials für die Neutron-Proton-Wechselwirkung aus den Experimenten. *Acta phys. Austr.* 5, 89—122 (1951).

**Olsson, P. O.:** Neutron-proton scattering with repulsive forces. *Phys. Review*, II. Ser. 83, 845 (1951).

**Feshbach, Herman and Julian Schwinger:** On a phenomenological neutron-proton interaction. *Phys. Review*, II. Ser. 84, 194—203 (1951).

**Jauho, Pekka:** On the unique determination of the nuclear potential between charged nucleons with the aid of scattering experiments. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A I, Nr. 80, 44 S. (1951).

Für Streuverhältnisse zwischen Nukleonen hat Fröberg (dies. Zbl. 30, 92, 34, 280) ein Verfahren angegeben, um aus der asymptotischen Phase das Wechselwirkungspotential zu bestimmen. Levinson (dies. Zbl. 32, 207) zeigte unter weiten Voraussetzungen die Eindeutigkeit, falls keine gebundenen Zustände existieren. Jedoch blieb der Fall geladener Nukleonen ausgeschlossen. Verf. untersucht (nicht-relativistisch) nach ähnlichen Methoden wie Levinson die Eindeutigkeit bei  $P$ - $P$ -Streuung und gibt zwei Voraussetzungen an, unter denen sie gilt. *Gerhard Höhler.*

**Fröberg, Carl-Erik:** On determination of proton-proton interaction from scattering experiments. *Ark. Fys.* 3, Nr. 1, 1—34 (1951).

Verf. hat in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 30, 92, 34, 280) das Problem der Bestimmung einer zentralen Wechselwirkung aus der asymptotischen Phase behandelt. Für den Fall der Proton-Proton-Streuung, bei dem unter gewissen Voraussetzungen nach Jauho die Lösung eindeutig ist (vorst. Ref.) rechnet Verf. numerisch aus bekannten Streudaten ein Potential aus. Da die benötigte irreguläre Coulomb- $S$ -Wellenfunktion

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)v = 0; \quad v_{\rho \rightarrow \infty} \sim \cos(\rho + \eta); \quad \eta = -\alpha \log 2\rho + \arg \Gamma(i\alpha + 1)$$

bisher nicht tabuliert war, berechnet er für sie mit der Rechenmaschine BARK (Stockholm) eine längere Tabelle. Die erste Näherung für  $V(r)$  läßt sich — nach Berücksichtigung der Unkenntnis der Phase für hohe Energien durch ein Abschneideverfahren — gut durch ein Yukawa-Potential darstellen. *Gerhard Höhler.*

**Green, H. S. and H. Messel:** The differential cross section for high energy nucleon-nucleon collisions. *Phys. Review*, II. Ser. 83, 842—843 (1951).

**Bloch, I., M. H. Hull jr., A. A. Broyles, W. G. Bourcius, B. E. Freeman and G. Breit:** Coulomb functions for reactions of protons and alpha-particles with the lighter nuclei. *Reviews modern Phys.* 23, 147—182 (1951).

**Petiau, Gérard:** Sur une simplification dans le calcul des sections efficaces des processus de collisions corpusculaires. *J. Phys. Radium* 12, 565 (1951).

**Brueckner, Keith A. and Francis Low:** Singular potentials and the theory of the effective range. *Phys. Review*, II. Ser. 83, 461—462 (1951).

**Guth, E. and C. J. Mullin:** Momentum representation of the Coulomb scattering wave functions. *Phys. Review*, II. Ser. 83, 667—668 (1951).



Coish, H. R.: Theory of internal conversion. Phys. Review, II. Ser. 84, 164—165 (1951).

Rose, M. E., G. H. Goertzel, B. I. Spinrad, J. Harr and P. Strong: The internal conversion coefficients. I. The  $K$ -shell. Phys. Review, II. Ser. 83, 79—87 (1951).

Der innere Umwandlungskoeffizient, d. h. die Zahl der „conversion-electrons“ pro  $\gamma$ -Quant, wird unter Voraussetzung eines unabgeschirmten Coulomb-Feldes in relativistischer Form für die  $K$ -Schale berechnet. 680 Koeffizienten für zwölf Werte der Kernladungszahl  $Z$  im Bereich  $10 \leq Z \leq 96$  und sechs verschiedene Werte der  $\gamma$ -Energie ( $kmc^2$ ) im Bereich  $0,3 \leq k \leq 5$  wurden jeweils für die fünf ersten elektrischen und magnetischen Multipolstrahlungen maschinell bestimmt. Die Grenzen der oben beschriebenen Bereiche sind wesentlich durch die Konvergenz der in die Berechnung eingehenden Reihenentwicklungen von hypergeometrischen und Gammafunktionen bedingt. Die Auswertung kann mit der Maschine auf vier Stellen genau durchgeführt werden. Da die Meßgenauigkeit erheblich kleiner ist, lassen sich durch Extrapolation insgesamt 4020 brauchbare Werte berechnen, die in der Arbeit teilweise graphisch wiedergegeben sind. Die Ergebnisse können zur Bestimmung von Drehimpuls- und „Parity“-Eigenschaften der Kernniveaus herangezogen werden. Die Berechnung der Umwandlungskoeffizienten der  $K$ -Schale für kleine  $\gamma$ -Energien, sowie für die  $L$ -Schale unter Berücksichtigung der Abschirmung des Coulomb-Feldes ist ebenfalls in Angriff genommen worden. *Günter Ecker.*

Arfken, G. B., L. C. Biedenharn and M. E. Rose: A note on isotropy in nuclear gamma-radiation. Phys. Review, II. Ser. 84, 89—91 (1951).

Weisskopf, V. F.: Radiative transition probabilities in nuclei. Phys. Review, II. Ser. 83, 1073 (1951).

Levinger, J. S.: The high energy nuclear photoeffect. Phys. Review, II. Ser. 84, 43—51 (1951).

Rosenfeld, L.: Electromagnetic properties of nuclei and nuclear structure. Physica 17, 461—483 (1951).

Sternheimer, R.: On nuclear quadrupole moments. Phys. Review, II. Ser. 84, 244—253 (1951).

Krüger, H.: Beiträge zur Untersuchung der reinen Kernquadrupolspektren in Kristallen. Z. Phys. 130, 371—384 (1951).

Ein Atomkern mit elektrischem Quadrupol zeigt in einem inhomogenen elektrischen Feld eine Aufspaltung der Energiewerte, die den Orientierungsmöglichkeiten des Kernes entspricht. Das Aufspaltungsbild wird für die Drehimpulszahlen  $I = \frac{3}{2}$  und  $\frac{5}{2}$  und nicht rotationssymmetrisches inhomogenes Feld in Abhängigkeit von der Abweichung von der Rotationssymmetrie untersucht. Weiter wird die Aufspaltung der Energien in einem Magnetfeld berechnet, das verschiedene Lagen zu einem rotationssymmetrischen elektrischen Feld hat; für nicht rotationssymmetrisches Feld wird die Betrachtung auf  $I = \frac{3}{2}$  und spezielle Lage beschränkt.

*Friedrich Hund.*

Bergmann, Otto: Zum Kernphotoeffekt an Beryllium. Acta phys. Austr. 4, 338—354 (1951).

Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  des Kernphotoeffektes an Beryllium  ${}^9\text{B}$  wird an Hand des Zweikörpermodelles untersucht. Die Rechnung geht aus von der allgemeinen Darstellung des Wirkungsquerschnittes durch die Summe der Quadrate der Übergangs-Matrixelemente. Entsprechend den Auswahlregeln kommen nur  $P$ - $S$ - und  $P$ - $D$ -Momente in Betracht. Die Eigenfunktionen der Grund- und Anregungszustände sind hierbei im Gegensatz zu früheren Untersuchungen für verschiedene Potentialmuldentiefe berechnet. Die Auswertung der erforderlichen Integrale ist in allen Fällen elementar möglich. Aus der Kenntnis der Schwellenenergie des Photoeffektes und der allgemeinen Annahme einer Kraftreichweite von  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm ergibt sich die Muldentiefe des Grundzustandes. Die entspre-



chende Größe der kontinuierlichen End-S-Zustände bestimmt der experimentell bekannte Verlauf des Wirkungsquerschnittes bei kleinen  $\gamma$ -Energien. Der Verlauf für hohe Energien läßt sich danach unter der Annahme gleicher Muldentiefe für die D-Endzustände berechnen.

Günter Ecker.

Granger, Sarah and R. D. Spence: Energy levels of a spheroidal nuclear well. Phys. Review, II. Ser. 83, 460—461 (1951).

Blanchard, C. H. and R. Avery: Velocity dependent interactions and nuclear shells. Phys. Review, II. Ser. 81, 35—36 (1951).

Die im Einteilchenmodell des Atomkerns auf Grund der Schalenabschlüsse nach Haxel und G. Mayer geforderte Spinbahnkoppelung zwischen dem einzelnen Nukleon und dem aus den übrigen Nukleonen gebildeten Rumpf liefert eine Energieaufspaltung, die hier behandelt wird. Es sind dabei die verschiedenen möglichen geschwindigkeitsabhängigen Zweiteilchenwechselwirkungen untersucht worden.

Wilhelm Macke.

Yang, L. M.: Nuclear shell structure and nuclear density. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 632—638 (1951).

Die experimentell ausgezeichneten Nukleonenzahlen im Kern (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126) wurden bislang durch die Arbeiten von Feenberg, G. Mayer, Haxel-Jensen-Sues und anderen durch ein Einteilchenmodell des Kerns erklärt, ohne daß sich dabei mit Sicherheit angeben ließ, wieweit die hierzu notwendigen Voraussetzungen, wie freie Bewegung der Nukleonen im Kern, wirklich berechtigt sind. Demgegenüber wird in dieser Arbeit gezeigt, daß sich diese ausgezeichneten Zahlen auch in einer Weise verstehen lassen, die keinen Bezug auf die obigen Voraussetzungen nimmt. Nach Thomas-Fermi können in einer gegebenen Dichteverteilung des Kerns nur Nukleonen bis zu einem bestimmten Maximalbahndrehimpuls  $l_{\max}$  enthalten sein. Fordert man nun  $l_{\max} = 0, 1, 2, \dots$  so werden, wie in der Arbeit ausgeführt wird, gerade die oben aufgeführten Nukleonenzahlen ausgezeichnet.

Wilhelm Macke.

Swiatecki, W. J.: The nuclear surface energy. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 226—238 (1951).

Der kinetische und der potentielle Anteil der Oberflächenenergie der Kerne wird mit dem statistischen Modell und einer „symmetrischen“ Wechselwirkung  $\sim e^{-\alpha r^2}$  zwischen den Nucleonen berechnet; für die gesamte Oberflächenenergie ergibt sich nur etwa die Hälfte des empirischen Wertes.

Friedrich Hund.

Feenberg, E. and K. C. Hammack: A note on Rainwater's spheroidal nuclear model. Phys. Review, II. Ser. 81, 285 (1951).

Die Rainwatersche Untersuchung über ein elliptisches Kernmodell, welches die großen Quadrupolmomente verschiedener schwerer Kerne erklären kann, wird durch ein Rechenbeispiel bestätigt.

Wilhelm Macke.

Gallone, S. and C. Salvetti: An asymmetric nuclear model. Phys. Review, II. Ser. 84, 1064—1065 (1951).

Román, P.: A new statistical theory of atomic nuclei. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 1, 107—114 (1951).

Für eine Kugel konstanter Dichte wird die bei Yukawascher Wechselwirkung (klassisch, daher ohne Austauscheffekte) auftretende Energie berechnet. In der empirischen Formel für die Bindungsenergie der Atomkerne ergibt sich damit eine Beziehung zwischen den bei Volumenenergie und Oberflächenenergie auftretenden Konstanten. Bei geeigneter Wahl der Kopplungskonstante des Yukawafeldes und der Masse des Mesons ( $330 m_e$ ) und bei Berücksichtigung der empirischen Beziehung zwischen Kernradius und Neutronenexzeß lassen sich die Bindungsenergien auf diese Weise mit einem Fehler von etwa 5% darstellen.

Gerhart Lüders.

Heber, G.: Zur Frage der magnetischen Momente der Nukleonen. I. II. Ann. der Physik, VI. F. 9, 151—168, 169—180 (1951).

I. Die durch skalare Kopplung der Nukleonen an ein neutrales Mesonenfeld auftretenden anomalen magnetischen Momente werden in niedrigster störungstheoretischer Näherung unter Anwendung der Methode von Källén (dies. Zbl. 43, 213) berechnet. Bei dieser Methode wird die kovariante Störungsrechnung nicht, wie üblich, in der Wechselwirkungsdarstellung, sondern in der Heisenbergdarstellung durchgeführt. Da beide Methoden mathematisch gleichwertig sind, überrascht es nicht, daß das Ergebnis des Verf. mit demjenigen von Case (dies. Zbl. 33, 327) übereinstimmt. — II. Die Rechnungen des I. Teiles werden auf geladene skalare und geladene sowie neutrale pseudoskalare Mesonen (ohne Ableitungskopplung) ausgedehnt. Die Ergebnisse stimmen wiederum mit denjenigen von Case überein.

Gerhart Lüders.

Jackson, J. L.: A variational approach to nuclear reactions. Phys. Review, II. Ser. 83, 301—304 (1951).

Für die  $R$ -Matrix des Wigner-Eisenbud-Formalismus [Phys. Review, II. Ser. 72, 29 (1947)] wird ein Variationsprinzip angegeben. Es wird gezeigt, daß man einen endlichen Abschnitt der eigentlich auftretenden unendlichen Reihe dann erhält, wenn man im inneren Gebiet eine endliche Anzahl der richtigen Eigenfunktionen („Resonanzfunktionen“) als Vergleichsfunktionen wählt. Man erhält also durch das Variationsproblem eine Lösung, die mit wachsender Zahl der berücksichtigten Funktionen gegen die richtige Lösung konvergiert. — Anm. d. Ref.: Da man die Resonanzfunktionen nicht kennt, ist einem für explizite Rechnungen hiermit wenig geholfen.

Gerhart Lüders.

Clark, A. C. and S. N. Ruddlesden: The disintegration of light nuclei by meson capture. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 1064—1078 (1951).

Pomerančuk, I.: Das Einfangen von  $\pi$ -Teilchen im Deuton. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 47—48 (1951). [Russisch].

Preston, Melvin A.: The non-central electric interaction in alpha-radioactivity. Phys. Review, II. Ser. 82, 515—520 (1951).

Die Berechnung der  $\alpha$ -Zerfallskonstanten unter Berücksichtigung des Coulombfeldes und Annahme eines bestimmten Muldenpotentialverlaufes liefert eine einfache Formel, die allerdings in ihrem Anwendungsbereich beschränkt ist. In allen Fällen, außer bei den doppelt-geraden Kernen, ist zunächst der von Pearlman, Ghiorso und Seaborg diskutierte Einfluß des „Bildungsverbotes“ zu berücksichtigen. Außerdem gelten die genannten Berechnungen nur für  $\alpha$ -Teilchen mit verschwindendem Bahndrehimpuls. Eine weitere Veränderung der Standardformel bedingt die nicht-zentrale Wechselwirkung der  $\alpha$ -Partikel mit dem Folgekern. Die vorliegende Untersuchung gibt, im Anschluß an eine bereits durchgeführte spezielle Formulierung, die allgemeine Behandlung dieses Einflusses. Die mathematischen Schwierigkeiten erfordern zwei verschiedene Lösungsmethoden, die bzw. großen und kleinen Energiedifferenzen zwischen Grund- und Anregungszuständen zugeordnet sind. Dabei erfaßt die Rechnung sowohl Dipol- als auch Multipolmomente. Für einen angenommenen Fall wird eine numerische Abschätzung der Einwirkung auf die relativen  $\alpha$ -Intensitäten für verschiedene Ausgangsverteilungen vorgenommen. Der Vergleich der Resultate mit den Experimenten ist außerordentlich erschwert, da eine sichere Zuordnung der vorhandenen Differenzen zu den verschiedenen oben beschriebenen Einflüssen noch nicht möglich ist.

Günter Ecker.

Smith, A. M.: Forbidden beta-ray spectra. Phys. Review, II. Ser. 82, 955—956 (1951).

Blin-Stoyle, R. J. and J. A. Spiers: On the theory of beta-decay. Phys. Review, II. Ser. 82, 969—970 (1951).

Trigg, George L. and Eugene Feenberg: A symmetry principle in the Fermi theory of beta-decay. Phys. Review, II. Ser. 82, 982 (1951).

Longmire, C. L. and A. M. L. Messiah: A reduction of arbitrariness in the theory of forbidden  $\beta$ -spectra. Phys. Review, II. Ser. 83, 464 (1951).

Winter, Rolf G.: Double beta-decay as a first-order process. Phys. Review, II. Ser. 83, 1070—1071 (1951).

Tolhoek, H. A. and S. R. de Groot: Mixed invariants in beta-decay and symmetries imposed on the interaction hamiltonian. Phys. Review, II. Ser. 84, 150—151 (1951).

Kofoed-Hansen, O.: Effects of the recoil on allowed  $\beta$ -transitions. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 1411—1416 (1951).

Foldy, L. L.: The electron-neutron interaction. Phys. Review, II. Ser. 83, 688 (1951).

Barden, S. E.: On resonance damping at injection in betatrons and synchrotrons. Proc. phys. Soc., Sect. B 64, 579—590 (1951).

Es sei  $\varrho = \Delta r/r_i$  die relative Abweichung vom Momentankreis mit dem Radius  $r_i$ . Die Winkelabhängigkeit der Achsialkomponente des Magnetfeldes wird in der Gestalt  $H_z(r, \varphi) = H_0 \{1 + h_0(\varphi) - [n - h_1(\varphi)] \varrho + O(\varrho^2) + \dots\}$  angenommen. Unter Vernachlässigung von  $h_0(\varphi)$  und mit der Annahme  $h_1(\varphi) = \mp \alpha_i \cos(l\varphi + \gamma_i)$  kann sowohl die radiale, wie die achsiale „Schwingung“ um den Momentankreis durch eine verallgemeinerte Mathieusche Differentialgleichung  $d^2\zeta/d\chi^2 + (a - 2g \cos 2\chi)\zeta = 0$  dargestellt werden. Für den Fall  $a \approx 1$  werden die stabilen Gebiete mittels der von Whittaker und Watson angegebenen Lösung ausführlich diskutiert. Es zeigt sich, daß unter speziellen Einschlußbedingungen infolge dieser Winkelabhängigkeit des Magnetfeldes gedämpfte Elektronenschwingungen entstehen können. Diese Tatsache wird zur Erklärung des erfolgreichen Einschusses von Elektronen in den meisten Betatrons und Synchrotrons herangezogen. Die für die Resonanzdämpfung notwendige Kuppelungsinhomogenität des Magnetfeldes beim Einschluß soll durch die starken, während der Beschleunigungsperiode zirkulierenden Ströme verursacht sein.

Walter Glaser.

Fan, Chang-Yun: On Fermi's theory of the origin of cosmic radiation. Phys. Review, II. Ser. 82, 211—216 (1951).

Die Arbeit enthält eine Weiterentwicklung von Fermis Theorie des Ursprungs der Höhenstrahlung (dies. Zbl. 32, 96). Nach dieser Theorie gewinnen alle geladenen Teilchen, die eine kinetische Energie oberhalb einer gewissen Grenze besitzen (um  $2 \cdot 10^8$  eV für Protonen), zusätzliche Energie durch Begegnungen mit wandernden magnetischen Wolken in der Milchstraße. Wenn, wie von Fermi und vom Verf. angenommen, diese Begegnungen im Mittel etwa jedes Jahr einmal erfolgen und die Wolkengeschwindigkeit um  $10^{-4}$  der Lichtgeschwindigkeit beträgt, so ist der Energiegewinn ausreichend, um ein ganzes Spektrum von Teilchen sehr hoher Energie, bis hinauf zum  $10^8$ -fachen der Anfangsenergie, zu erzeugen. Dieses Energiespektrum wird vom Verf. unter verschiedenen Annahmen über die Verteilung der Quellen (Sterne), welche die anfänglichen Teilchen hoher Energie erzeugen, durchgerechnet. Es ergibt sich Übereinstimmung mit der Beobachtung, wenn diese Quellen in der Hauptsache im Zentrum der Milchstraße angenommen werden. Zur Erklärung des Massenspektrums diskutiert Verf. die Annahme, daß primär nur Ionen vom Atomgewicht 12 oder mehr beschleunigt werden und daß alle in der Höhenstrahlung beobachteten Protonen und  $\alpha$ -Teilchen Bruchstücke von solchen schweren Teilchen sind.

Ludwig Biermann.

Unsöld, A.: Cosmic radiation and cosmic magnetic fields. I. Origin and propagation of cosmic rays in our galaxy. Phys. Review, II. Ser. 82, 857—863 (1951).

Biermann, Ludwig and Arnulf Schlüter: Cosmic radiation and cosmic magnetic fields. II. Origin of cosmic magnetic fields. Phys. Review, II. Ser. 82, 863—868 (1951).



Jánossy, Leonie and Harry Messel: On the calculation of average numbers for the electron-photon cascade. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 54, Nr. 15, 217—243 (1951).

Zacepin, G. T.: Über die Photospaltung der schweren Teilchen der kosmischen Strahlen unter dem Einfluß der Sonnenstrahlung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 577—578 (1951) [Russisch].

Rozenthal', I. L.: Über den Kern-Kaskadenprozeß in breiten atmosphärischen Schauern kosmischer Strahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 731—734 (1951) [Russisch].

### Bau der Materie:

• Jellinek, Karl: Verständliche Elemente der Wellenmechanik. II. Mehr-elektronige Atome, zwei- und mehratomige Moleküle. Basel: Wepf & Co. Verlag 1951. 58 Fig., 13 Tab., XI, 610 S. SFr. 34.—

Referat: dies. Zbl. 40, 422.

Tati, T.: Radiative corrections to the intensities for hydrogenlike atoms. Phys. Review, II. Ser. 84, 150 (1951).

Holoien, Erling: Some investigations on the stability of the negative helium ion. Arch. Math. Naturvid. 51, Nr. 5, 81—89 (1951).

Die Stabilität eines negativen Heliumions wird durch quantenmechanische Berechnung der Energiewerte nach der Variationsmethode in der von E. Hylleraas entwickelten Form untersucht. Der  $\text{He}^-$ -Zustand  $(2s)(2p)^2\ ^4P$  erweist sich als möglich, zerfällt aber schon in  $\sim 10^{-14}$  sec durch Autoionisation, so daß er zur Deutung der — im übrigen noch sehr unsicheren — experimentellen Befunde jedenfalls nicht in Frage kommt. Die Frage, ob ein anderer Energiezustand existiert, der nicht durch Autoionisation zerfällt, bleibt offen. A. Unsöld.

Holoien, Erling: Calculation of the Rydberg correction for singly excited lithium, *p*- and *d*-states. Arch. Math. Naturvid. 51, Nr. 1, 1—19 (1951).

Die Berechnung erfolgt ähnlich wie im Falle des Heliums [Ritzsches Verfahren, s. E. A. Hylleraas, Z. Phys. 83, 739ff. (1933); dies. Zbl. 7, 188] und liefert bei Berücksichtigung der Polarisierung eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Befunden. Erwin Kreyßig.

Moffitt, W.: The electronic structure of the oxygen molecule. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 210, 224—245 (1951).

Thaler, R. M.: A calculation of the electron affinity of sodium. Phys. Review, II. Ser. 83, 131—133 (1951).

Treffitz, Eleonore: Wellenfunktionen des neutralen Calciumatoms. Z. Astro-phys. 29, 287—303 (1951).

Treffitz, Eleonore: Theoretische Ansätze zur Deutung des  $\text{PrIV}$ -Spektrums. Z. Phys. 130, 561—564 (1951).

Kovner, M. A. und Š. E. Cimring: Quantenmechanik und Kraftkonstanten der Moleküle des Methans und der Deuteromethane. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 949—952 (1951) [Russisch].

Kellner, L.: The vibrations of an infinitely long chain of  $\text{CH}_2$ -groups and the infra-red spectrum of polythene. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 521—535 (1951).

Sverdlov, L. M.: Eine Beziehung zwischen den Frequenzen isotoper Moleküle (Summenregel). Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 1115—1118 (1951) [Russisch].

Taylor, R.: Complete molecular orbital treatment of the system  $\text{H}_4$ . Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 249—260 (1951).

Verf. wendet die Methode der Molekül-Eigenfunktionen in erweiterter Form (vgl. u. a. Chirgwin und Coulson, dies. Zbl. 40, 462) auf eine lineare Kette von 4 Protonen mit 4 Elektronen an (einfaches Modell für Metall). Die Erweiterung besteht in der Superposition von

approximativ (Vernachlässigung der interelektronischen Wechselwirkung) berechneten Elektronen-, Konfigurationen“ (I). Durch Variation der Koeffizienten dieser Linearkombination wird die nichtverschwindende Wechselwirkungsenergie zwischen den I zum Minimum gemacht. Ergebnis: Hinzuziehung der I-Wechselwirkung beeinflusst die Resultate hinsichtlich des Grundzustandes kaum, ist hingegen bei der Betrachtung „angeregter“ Zustände des Systems erforderlich; Berücksichtigung von Integralen der Form  $\int \int \exp \{-(r_{m1} + r_{n1} + r_{p2} + r_{q2})\} d\tau_1 d\tau_2 / r_{12}$  (wo Ziffernindizes Elektronen und Buchstaben Kerne bedeuten), ist hierzu Voraussetzung. Bei komplizierteren Systemen wachsen die mathematischen Schwierigkeiten beträchtlich.

Bernhard Ilsechner.

Hall, G. G. and Sir John Lennard-Jones: The molecular orbital theory of chemical valency. VII. Molecular structure in terms of equivalent orbitals. VIII. A method of calculating ionization potentials. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 205, 357—374, 541—552 (1951).

Referat s. dies. Zbl. 40, 284.

Lundqvist, Stig O. and Per-Olov Löwdin: On the calculation of certain integrals occurring in the theory of molecules, especially three-centre and four-centre integrals. Ark. Fys. 3, Nr. 10, 147—154 (1951).

Barnett, M. P. and C. A. Coulson: The evaluation of integrals occurring in the theory of molecular structure. I. and II. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 243, 221—249 (1951).

Teil I: Integrale vom Typus  $J(k, l, m) = \int e^{-\alpha r_a - \beta r_b} \cos^k \theta_a r_a^{l-1} r_b^{m-1} dV$  werden mit Hilfe der Entwicklung  $r_b^{m-1} e^{-\beta r_b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(r_a \varrho)^{1/2}} P_n(\cos \theta_a) \zeta_{m,n}(\beta, r_a; \varrho)$  ausgewertet. Hierbei bedeuten  $r_a, \theta_a$  bzw.  $r_b, \theta_b$  die Polarkoordinaten des Elektrons bezogen auf Kern A bzw. B und  $P_n$  die Legendreschen Polynome.  $\varrho$  ist der Kernabstand. Die  $\zeta_{m,n}$  können durch  $\zeta_{1,n} = I_{n+1/2}(\beta r_a) K_{n+1/2}(\beta \varrho)$  ausgedrückt werden. Für die modifizierten Besselschen Funktionen  $I_{n+1/2}$  und  $K_{n+1/2}$  sind Tafeln angegeben. — Teil II: Kompliziertere Integrale bei Ein- und Mehrelektronensystemen mit 2 Kernen können entweder auf die Form  $J$  gebracht oder mittels der  $\zeta_{m,n}$  und ähnlicher Hilfsfunktionen berechnet werden, wie numerische Beispiele und die Zusammenstellung von 180 verschiedenen Integralen zeigen. Erwin Kreyßig.

Warhurst, E.: The ionic character of bonds and bond properties. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 207, 32—49 (1951).

Coulson, C. A.: Critical survey of the method of ionic-homopolar resonance. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 207, 63—74 (1951).

Lennard-Jones, Sir John: The energies and bond lengths of conjugated molecules. An introductory review of theoretical developments. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 207, 75—91 (1951).

Coulson, C. A.: Bond lengths in conjugated molecules: the present position. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 207, 91—100 (1951).

Daudel, Raymond et Alexandre Laforgue: Définition des charges, moments dipolaires et moments de transition après introduction de l'interaction de configuration. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 623—625 (1951).

Chalvet, Odilon, Raymond Daudel, Monique Roux, Camille Sándorfy et Claude Vroelant: Sur les règles pratiques du dénombrement des intégrales moléculaires intervenant dans le calcul des interactions de configuration. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1277—1279 (1951).

Gouarné, René: Contribution à l'étude d'un type particulier de dérivés substitués. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1610—1612 (1951).

Staver, Tor B.: On the scattering of slow electrons by hydrogen atoms. Arch. Math. Naturvid. 51, Nr. 3, 29—59 (1951).

Der Einfluß der Austausch- und Polarisierungseffekte auf die Streuung langsamer Elektronen an Wasserstoffatomen wird untersucht. Zur Berechnung der

Wellenfunktionen bzw. der Phasenänderungen bei der Streuung (Faxén-Holtsmark) benutzt Verf. die Variationsmethode. Es wird zunächst nachgeprüft, daß deren Ergebnisse (bei Vernachlässigung von Austausch u. Polarisation) mit direkten numerischen Integrationen von Chandrasekhar gut übereinstimmen. Bei kleinen Energien erweist sich vor allem der Austausch zwischen Atom- und Streuelektronen und in 2. Linie auch die Polarisation des Atoms durch das Streu-Elektron als wesentlich. Numerische Berechnungen der partiellen Wirkungsquerschnitte für Streuung mit  $l = 0$  ohne Austausch, mit Austausch sowie mit Austausch und Polarisation sind in Tab. 8 zusammengefaßt. Im übrigen sind die Ergebnisse des Verf. wichtig für die Berechnung der  $H$ -Absorption in Sternatmosphären. *A. Unsöld.*

**Massey, H. S. W. and B. L. Moiseiwitsch:** The application of variational methods to atomic scattering problems. I. The elastic scattering of electrons by hydrogen atoms. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **205**, 483—496 (1951).

Die Variationsmethoden von Hulthén [*Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl.* **14**, no. 21 (1944)] und Kohn [*Phys. Review, II. Ser.* **74**, 1763—1772 (1948)] werden auf die Streuung langsamer Elektronen an Wasserstoffatomen angewandt. Die Verff. diskutieren ihre Ergebnisse ausführlich und vergleichen sie mit denen, die sich bei Annahme einer separablen Gesamtwellenfunktion ergeben.

*Gerhard Höhler.*

**Moiseiwitsch, B. L.:** A variational method for inelastic collision problems. *Phys. Review, II. Ser.* **82**, 753 (1951).

**Gombás, P. and R. Gáspár:** Solution of the Thomas-Fermi-Dirac equation. *Nature* **168**, 122 (1951).

**Gombás, P. und R. Gáspár:** Zur Lösung der Thomas-Fermi-Diraeschen Gleichung. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **1**, 66—74 und russische Zusammenfassg. **74** (1951).

Um die Thomas-Fermi-Diracsche statistische Grundgleichung für ein Atom oder Ion unter Berücksichtigung der Jensenschen Randbedingungen und der Austauschkorrektur zu lösen, gehen Verff. aus von einer Arbeit von K. Umeda [*J. Fac. Sci., Hokkaido Univ. Ser. II.* **3**, 171 (1942)], in der dieselbe Gleichung für andere, von Brillouin angegebene Randbedingungen numerisch gelöst wurde, und zwar für alle 92 stabilen Atome. Durch ein Näherungsverfahren lassen sich aus diesen Umedaschen Lösungen die gesuchten Lösungen numerisch ermitteln. Die Resultate werden tabellen- und kurvenmäßig für die neutralen Edelgasatome dargestellt und stimmen speziell beim Argon mit der von Jensen und Mitarbeitern direkt berechneten Lösung innerhalb der Zeichengenauigkeit überein. *Fritz Sauter.*

**Łopuszański, Jan:** Solution of Thomas-Fermi equation for molecules with axial symmetry. *Acta phys. Polon.* **10**, 213—222 (1951).

Die Thomas-Fermische Gleichung wird für zweiatomige Molekeln bei großem Abstand von den Kernen und in der Nähe der Kerne durch Reihen mit teilweise noch unbestimmten Koeffizienten genähert gelöst. Die Überbrückung des Mittelgebiets und die Bestimmung der Koeffizienten geschieht mit Interpolationspolynomen.

*Friedrich Hund.*

**Umeda, Kwai:** Asymptotic expression of the Thomas-Fermi function for a packed atom. *Phys. Review, II. Ser.* **83**, 651—652 (1951).

**Blunck, O.:** Über den Einfluß der Elektronendiffusion auf die Bremsstrahlung dünner Antikathoden. *Z. Phys.* **130**, 632—640 (1951).

**Slezkin, N. A.:** Die Grundgleichungen der Bewegung eines deformierbaren Mediums von Teilchen mit veränderlicher Masse. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **79**, 33—36 (1951) [Russisch].

L'A. étend aux milieux continus les résultats de Meschtersky (Meščerskij, 1897) relatifs à la dynamique des systèmes de points de masses variables. Il forme les équations du mouvement d'un tel milieu et en indique les applications possibles.



1. à l'étude des mouvements des gaz en tenant compte de la diffusion moléculaire et de la thermodiffusion (cf. le travail de l'A. ce Zbl. 41, 196). 2. au problème de la turbulence.

Julien Kravtchenko.

Ecker, Günter: Theorie der Polarisation des Kanalstrahllichtes. II. Berechnung der Polarisationswerte und Vergleich mit den Messungen. Z. Phys. 129, 161—189 (1951).

Mit den in Teil I (dies. Zbl. 40, 134) gewonnenen Besetzungswahrscheinlichkeiten werden die Polarisationswerte bei den Alkalien und bei der Balmerseerie des Wasserstoffes berechnet und mit gemessenen Werten verglichen. Erwin Kreyßig.

Holstein, T.: Imprisonment of resonance radiation in gases. II. Phys. Review, II. Ser. 83, 1159—1168 (1951).

In Fortführung von Teil I (dies. Zbl. 32, 331) wird das zeitliche Abklingen optisch angeregter Resonanzstrahlung (z. B. Hg  $\lambda$  2537 Å) in einem langen zylindrischen Gefäß berechnet. Berücksichtigt wird die Verbreiterung der Linien durch Dopplereffekt, Fremdgas- und Eigendruckverbreiterung. In einem Anhang A wird begründet, daß man die Reemission hinsichtlich ihrer Frequenzabhängigkeit praktisch stets proportional dem Absorptionskoeffizienten ansetzen kann. A. Unsöld.

Parzen, P. and L. Goldstein: Current fluctuations in the direct current gas discharge plasma. Phys. Review, II. Ser. 82, 724—726 (1951).

Wenn ein Strom, getragen von den unter dem Einfluß eines konstanten Feldes  $E$  sich bewegendenden Elektronen, durch ein Gas fließt, schwankt die Stromstärke infolge der thermischen Bewegung der Elektronen und infolge ihrer Zusammenstöße statistisch um einen Mittelwert und gibt Veranlassung zu einem Schwankungsrauschen (noise). Anschließend insbesondere an eine Arbeit von Rice [Bell. Syst. techn. J. 28, 283 (1949)] führen die Verff. die einschlägigen Rechnungen durch. Ausgangspunkt ist der Ansatz  $i_x(t - t_k, \theta_p) = \text{const.} (v_x + e E m^{-1} (t - t_k))$  für den von einem Elektron herrührende Stromanteil  $i_x$ , das zur Zeit  $t$  gestoßen hat und anschließend während der Zeit  $\theta_k$  frei im Feld fällt. Dazu kommt der Ansatz  $p|K| = (Z_v T)^K \exp(-Z_v T/R_n)$  für die Wahrscheinlichkeit, daß das Elektron  $K$  Stöße in der Zeit  $T$  macht, wobei  $Z_v T$  die mittlere Zahl der Stöße in der Zeit  $T$  eines Elektrons mit der Geschwindigkeit zwischen  $v$  und  $v + dv$  und  $q(\theta) = Z_v \exp(-Z_v \theta) d\theta$  die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen zwischen  $\theta$  und  $\theta + d\theta$  liegt. Für das Zeitmittel des Stromanteils  $\bar{J}(t)$  pro Elektron, für die „Korrelationsfunktion“  $\bar{\psi}(T) =$

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{J}(t) \cdot \bar{J}(t + \tau) dt$  und für das „Spektrum“  $\bar{\omega}(f) = 4 \int_0^\infty \bar{\psi}(\tau) \cos 2\pi f t d\tau$  werden die expliziten Ausdrücke angegeben und dann die Endformeln erhalten durch Summation über alle Elektronen, wobei für deren Geschwindigkeiten Maxwellverteilung angenommen wird.

Rudolf Seeliger.

Allen, J. E.: The distribution of electron energies in a discharge constricted by its self-magnetic field. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 587—589 (1951).

Das magnetische Eigenfeld einer Hochstrombogensäule kontrahiert den Entladungsquerschnitt und bedingt eine Schwächung des radialen Querfeldes, weil es auf die Elektronen nach innen wirkt, und deshalb die ambipolare Diffusion schon bei kleinerem Querfeld gewährleistet ist. Es beeinflusst aber auch die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen. Wie das Ergebnis der vorliegenden Note zeigt, wird die Maxwellverteilung deformiert in dem Sinn einer Reduktion der Relativzahlen der schnellen Elektronen und demgemäß einer Erhöhung des Verteilungsmaximums. Die quantitative Untersuchung dieser Sachlage erfolgt durch eine Entwicklung der Verteilungsfunktion ( $\vec{p} = m \vec{v}$ ) nach Kugelfunktionen bis zum zweiten Glied  $f(\vec{p}) = f_0(p) + f_1(p) \cos \theta = f_0(p) + \vec{p} \vec{f}_1(p)/p$ , woraus sich an-

schließend an eine Untersuchung von Davydov [Phys. Z. Sowjetunion 12, 269—306 (1937)] für  $f_0$  die Diff.-Gl. ergibt  $\frac{p}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + e E_r \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{1}{p} \frac{\partial f_0}{\partial p} l e^2 E_r k/c$  in der  $E_z$  bzw.  $E_1$  die longitudinale bzw. radiale Komponente des elektr. Feldes,  $H$  das magn. Eigenfeld und  $l$  die mittl. freie Weglänge ist. Wenn  $E_r$  vernachlässigt werden kann [s. oben und Thonemann u. Cowhig, Proc. phys. Soc., Sect. B, 64, 345—354 (1951)] ist die Lösung dieser Gleichung

$$f_z l \cdot \mu(v) e^{-v^2/v_0^2} \left[ \mu(v) = \exp. \left( -\frac{3m}{p_0^3} \int_0^v l e K' c dv \right) \right].$$

Rudolf Seeliger.

Nielsen, Harald H.: Anomalies in the microwave spectra of symmetric molecules. Physica 17, 432—439 (1951).

Mizushima, Masataka: The theory of pressure broadening and its application to microwave spectra. Phys. Review, II. Ser. 83, 94—103 (1951).

Die Eigendruckverbreiterung der Ammoniakbanden im Zentimeterwellengebiet wird nach der Methode von Lorentz und Weißkopf berechnet, wobei die Wechselwirkung je zweier Moleküle als adiabatisch betrachtet wird. Für das Wechselwirkungspotential wurden ein „Potentialtopf“ mit steilen Wänden und ein  $R^{-n}$ -Ansatz benützt. Es ergibt sich gute Übereinstimmung mit den Messungen, insbesondere bei hohen Rotationsquantenzahlen. — Die Verbreiterung der Sauerstoffbanden wird auf Quadrupolwechselwirkung zurückgeführt, während die der Rotationsbanden linearer und symmetrischer Kreisel-Moleküle auf Dipolwechselwirkung beruht. Die bekannten Dipolmomente (Debye) führen zu einer guten Darstellung der gemessenen Linienbreiten.

A. Unsöld.

Nijboer, B. R. A. et L. van Hove: Sur la fonction de distribution radiale d'un gaz imparfait et le principe de superposition. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B 54, 256—259 (1951).

In der Entwicklung der radialen Verteilungsfunktion

$$g(r) = e^{-V(r)/kT} [1 + \varrho g_1(r) + \varrho^2 g_2(r) + \dots]$$

eines unvollkommenen Gases nach Potenzen der Dichte  $\varrho$  [ $V(r)$  = potentielle Energie eines Molekülpaars vom Abstand  $r$ ] wird  $g_2(r)$  für ein aus starren Kugeln bestehendes Gas streng berechnet und mit dem Näherungswert verglichen, der sich nach dem von Kirkwood in der Theorie der Flüssigkeiten eingeführten Superpositionsprinzip ergibt.

Josef Meixner.

Hiby, J. W. und M. Pahl: Einzelstreuung von Molekülen in einem Gas mit Maxwell-Verteilung. Z. Phys. 129, 517—529 (1951).

Es wird der Fall betrachtet, daß ein Molekularstrahl bestimmter Geschwindigkeitsrichtung und Maxwellverteilung der Geschwindigkeitsbeträge mit den Teilchen eines ruhenden Gases der gleichen Art und der gleichen Temperatur zusammentrifft und an diesen gestreut wird. Unter der Vorstellung, daß diese Zusammenstöße nach den klassischen Stoßgesetzen für zwei starre Kugeln behandelt werden dürfen, wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, infolge dieser Zusammenstöße — für die Strahlteilchen wird jeweils nur ein Zusammenstoß in Rechnung gesetzt — in einer gegen die Strahlrichtung geneigten Richtung ein zusätzliches Teilchen zu finden. Die elementaren Rechnungen führen zu recht kompliziert gebauten Integralausdrücken, die durch einfache Näherungsformeln approximiert werden.

Fritz Sauter.

Verschaffelt, J. R.: La thermomécanique des phénomènes de transport. J. Phys. Radium 12, 93—98 (1951).

Tsien, H. S.: Influence of flame front on the flow field. J. appl. Mech. 18, 188—194 (1951).

Wenzl, F.: Wandströme, Ionenbeweglichkeit und Ionentemperatur im Plasma. *Z. angew. Phys.* 3, 332—343 (1951).

Gordeev, G. V.: Plasmaschwingungen und Schichten (in Gasentladungen). *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 79, 771—774 (1951) [Russisch].

Dumézil-Curien, Perrine: Entropie d'un mélange de gaz en équilibre d'excitation et d'ionisation. *C. r. Acad. Sci., Paris* 232, 1471—1472 (1951).

Vallander, S. V. und M. P. Elovskich: Die theoretische Abhängigkeit der Wärmeleitkoeffizienten von Gasen von der Temperatur. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 79, 37—40 (1951) [Russisch].

Klobe, Gerhard: Der Adiabatenkoeffizient dissoziierender Feuergase bei adiabatisch-isentropischer Entspannung. *Z. angew. Math. Phys.* 2, 394—402 (1951).

Heer, C. V. and J. G. Daunt: A contribution to the theory of Bose-Einstein liquids. *Phys. Review*, II. Ser. 81, 447—454 (1951).

Im Anschluß an die Messungen der Dampfdruckkurven für den  $\lambda$ -Übergang im flüssigen Heliumgemisch unter verschiedenen Konzentrationen von  $^4\text{He}$  und  $^3\text{He}$  wird gezeigt, daß sich das experimentelle Material verstehen läßt in einer Beschreibung von  $^4\text{He}$  bzw.  $^3\text{He}$  als ideales Bose- bzw. Fermigas. *Wilhelm Macke.*

Temperley, H. N. V.: The theory of the propagation in liquid helium II of „temperature-waves“ of finite amplitude. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 64, 105—114 (1951).

Die Ausbreitung von Temperaturänderungen (second sound) im Helium II wird mit dem Zweiflüssigkeitenmodell untersucht. Insbesondere werden Wellenamplituden und Stoßwellenfronten untersucht von endlicher Amplitude. Ihre Bewegung kann durch ein Gleichungssystem beschrieben werden, welches sich ganz analog zu demjenigen von Riemann und Rankine-Hugoniot für gewöhnliche Schallwellen aufstellen läßt. Die irreversiblen Effekte, welche mit der Ausbreitung verbunden sind, wachsen mit der 3. Potenz der Wellenamplitude. *Wilhelm Macke.*

Gorter, C. J., K. W. Taconis and J. J. M. Beenakker: Some considerations about temperature gradients in helium II. *Physica* 17, 841—846 (1951).

Pippard, A. B.: Ultrasonic propagation in liquid helium near the lambda-point. *Philos. Mag., VII. Ser.* 42, 1209—1223 (1951).

Eisenschitz, R.: Recent theories of transport processes in liquids. *Nature* 167, 216—220 (1951).

Die Probleme, Methoden und Erfolge neuerer Untersuchungen zur kinetischen Theorie der Flüssigkeiten werden kurz und anschaulich dargestellt, wobei insbesondere auf die Erklärung der irreversiblen Prozesse eingegangen wird. Inhalt: Impuls- und Energiefluß; Hypothese der molekularen Unordnung; Reibungskraft; Wahrscheinlichkeitsverteilung; Viskosität, Wärmeleitung und Diffusion; Grundlagen einer deduktiven Theorie. *Josef Meixner.*

Fournet, G.: Généralisation de la théorie cinétique des fluides de Born et Green aux ensembles de particules de plusieurs espèces différentes. *J. Phys. Radium* 12, 592—595 (1951).

Rushbrooke, G. S. and H. I. Scoins: On virial coefficients and the Born-Green theory of fluids. *Philos. Mag., VII. Ser.* 42, 582—593 (1951).

Die Superpositions-Approximation der Born-Greenschen Theorie der Flüssigkeiten (d. i. ein Ansatz, welcher die Verteilungsfunktion für Molekültripel durch die Verteilungsfunktionen von Paaren und von Einzelmolekülen ausdrückt) wird geprüft, indem die Virial-Entwicklung des Druckes nach Potenzen der Dichte  $\rho$  berechnet und mit den exakten Ergebnissen von Mayer [*J. chem. Physics* 5, 67, 74, (1937); 6, 87 (1938)] verglichen wird. Abweichungen werden im Glied mit  $\rho^4$  gefunden. Ferner wird gezeigt, daß im Falle binärer Mischungen sich für die drei radialen Verteilungsfunktionen vier nicht-lineare miteinander nicht verträgliche Gleichungen ergeben; die Ursache hierfür hängt eng mit der erwähnten Ungenauigkeit der Virial-Entwicklung zusammen. *Josef Meixner.*



**Piekara, A.: The phenomena of molecular orientation in polar liquids and their solutions. I. Extension of Onsager's theory.** Acta phys. Polon. 10, 37—68 (1950).

Verf. knüpft an die Tatsache an, daß die Molekularpolarisation einer Substanz in einer Flüssigkeit einen anderen Wert besitzt als im gasförmigen Zustand. Dieses deutet darauf hin, daß die Dipolmolekeln in Flüssigkeiten untereinander verkettet sind. Auf diese Weise erweitert Verf. die bekannte Onsager-Theorie, indem er die Onsager-Kugel vergrößert und die Wirkung der Moleküle aufeinander, die in der nächsten Nachbarschaft eines Zentralmoleküls liegen, berücksichtigt. Weiter zeigt Verf., daß in einer Lösung von Nitrobenzol in Benzol bei höheren Konzentrationen neben einer Paarbildung noch ein größerer Zusammenschluß von Molekeln stattfindet, wodurch die Polarisation erhöht wird. Ebenso gestatten es der Kerr-Effekt, die Erhöhung der Dielektrizitätskonstante unter der Einwirkung einer äußeren elektrischen Feldstärke, die elektrische Sättigung und der Cotton-Mouton-Effekt die Kopplung der Molekeln zu untersuchen.

*Hans Falkenhagen.*

**Piekara, A.: The phenomena of molecular orientation in polar liquids and their solutions. II. Further development of the theory of dipole coupling in polar liquids.** Acta phys. Polon. 10, 107—140 (1951).

Verf. geht im zweiten Teil seiner Arbeit näher auf die verschiedenen Arten der Kopplung ein und unterscheidet dabei drei Fälle: 1. Das Zentralmolekül wird von seinen Nachbarn büschelartig eingehüllt. 2. Ein gegebener Dipol ist an den nächsten gebunden, so daß je nach der Struktur der Molekeln parallele oder antiparallele Paare gebildet werden. Diese Art der Kopplung ist in polaren Flüssigkeiten vorherrschend. 3. Es kann auch ein Zusammenschluß zu Doppelpaaren stattfinden, was im allgemeinen in konzentrierten Lösungen der Fall ist. Es zeigt sich, daß alle Arten der Molekülkopplung in einer Lösung mit vier Konstanten erfaßt werden können, die sich im wesentlichen aus den Kopplungsenergien in  $kT$ -Einheiten gemessen, herleiten lassen. Mit Hilfe dieser Konstanten werden die Reduktionsfaktoren für die in der ersten Arbeit erwähnten Erscheinungen berechnet und graphisch dargestellt, wobei stets Vergleiche mit experimentellen Daten durchgeführt werden.

*Hans Falkenhagen.*

**Brodersen, Svend and A. Langseth: Localization of the electronic lines in continuous absorption spectra by the temperature-effect.** Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 26, Nr. 3, 55 S. (1951).

Es soll die Wellenzahl der  $0 \leftrightarrow 0$ -Linien (Elektronensprung ohne Schwingungsanregung) für mehratomige organische Moleküle in gelöstem Zustand bestimmt werden. Da die Spektren meist mehr oder weniger stark diffus sind, ist eine Festlegung dieser Frequenzen durch eine Analyse der Vibrationsstruktur nicht durchführbar. Es wird daher die Temperaturabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten in der Umgebung dieser Frequenzen dazu herangezogen. Dieser wird als Funktion der Temperatur einerseits unter sehr vereinfachten Annahmen theoretisch berechnet, andererseits für einige organische Substanzen gemessen. Durch Vergleich mit den Rechnungen werden die dort auftretenden Parameter bestimmt, aus denen sich die gesuchten Wellenzahlen für die betreffenden Substanzen mehr oder weniger sicher ermitteln lassen.

*Gerd Burkhardt.*

**Enderby, J. A.: On electrical effects due to sound waves in colloidal suspensions.** Proc. Roy. Soc., London, Ser. A 207, 329—342 (1951).

Schon Debye wies darauf hin, daß bei der Ausbreitung von Schallwellen in Elektrolytlösungen mit Ionen verschiedener Masse Potentialdifferenzen zu erwarten sind. Dieser Effekt ist jedoch außerordentlich klein. Enthält der Elektrolyt aber außerdem noch kolloidale Teilchen, so resultieren Potentialdifferenzen, die um einige Zehnerpotenzen größer sind. Im allgemeinen werden die schweren Teilchen wegen ihrer Trägheit gegenüber der Bewegung des Lösungsmittels etwas zurückbleiben. Die sie umgebende Ionenwolke ist dadurch nicht mehr kugelsymmetrisch und die auftretenden Dipolmomente erzeugen zwischen einem Knoten und

einem Bauch der Schallwelle jene Potentialdifferenzen. In der Arbeit des Verf. werden nun die beiden Fälle einer sehr dünnen und einer sehr ausgedehnten Ionenwolke behandelt. Die Näherungsdarstellungen für die Potentialdifferenzen für kugelförmige Teilchen werden unter folgenden einschränkenden Voraussetzungen abgeleitet: 1. Die Wellenlänge ist groß im Vergleich zum Teilchendurchmesser. 2. Der Radius der Ionenwolke ist klein gegenüber dem mittleren Teilchenabstand. 3. Die Geschwindigkeitsamplitude ist klein. 4. Die Teilchen bestehen aus einem nichtleitenden Material. Verf. führt die Rechnung zunächst für den Fall einer dünnen Ionenatmosphäre durch. Die Gleichungen für die Ionenbewegung und die Flüssigkeitsbewegung werden durch sukzessive Approximation gelöst. Dann erfolgt die Bestimmung der relativen Geschwindigkeitsverteilung um ein geladenes Kügelchen und im Anschluß daran wird das Potential der Ionenatmosphäre um ein geladenes Zentrum berechnet. Teilchen und Ionenwolke bilden einen elektrischen Dipol; Verf. leitet dann einen komplizierten mathematischen Ausdruck für die Potentialdifferenz in Ausbreitungsrichtung der Schallwelle ab. Es ergibt sich, daß diese Potentialdifferenz im wesentlichen unabhängig von der Frequenz ist wenigstens für nicht zu hohe Frequenzen. Ist hingegen die Ionenwolke groß gegenüber der Ausdehnung des Teilchens, aber immer noch klein im Vergleich zur Schallwellenlänge, so ergibt die Rechnung, daß die entstehende Potentialdifferenz reziprok proportional der Frequenz ist. Am Schluß der Arbeit werden die Größenordnungsverhältnisse des Effektes untersucht. Der Radius der kugelförmigen Teilchen wird zu  $5 \cdot 10^{-6}$  cm angenommen; die Teilchen setzen sich aus Ag J Molekeln zusammen. Die Ladung der Teilchen wird zu 100 e angenommen. Für die Geschwindigkeitsamplitude bzw. die Frequenz verwendet Verf. die Werte 2 cm/sec<sup>-1</sup> bzw.  $3 \cdot 10^5$  sec<sup>-1</sup>. Als Dichte der Teilchen nimmt Verf. 6 g/cm<sup>-3</sup> an. Für den Grenzwert der Potentialdifferenz für niedrige Elektrolytkonzentrationen ergibt sich der Wert 50 mV, falls die Masse des kolloidalen Stoffes pro cm<sup>3</sup> 0,065 g und das  $\zeta$ -Potential 40 mV beträgt. Für höhere Elektrolytkonzentrationen sinkt die Potentialdifferenz. So ergibt sich beispielsweise bei einer 0,001 Normallösung bei 25° C der Wert 5 mV und bei einer 0,1 Normallösung der Wert von 0,04 mV. Die experimentellen Werte für die Potentialdifferenzen scheinen unterhalb denen der Theorie zu liegen. Indessen ist zu bedenken, daß der Vergleich schwer durchführbar ist, da der Radius der Teilchen und der Wert des  $\zeta$ -Potentials nicht genau bekannt sind.

*Hans Falkenhagen.*

**Mandel, Jean:** Sur la consolidation des sols. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 209—211 (1951).

Fortsetzung einer früheren Note (dies. Zbl. 35, 255). Das Problem des Niederschlags aus einer gesättigten Lösung wird für eine ebene Schicht ( $y = \pm b$ ) gelöst, die zugehörigen Eigenfunktionen sind durch Besselsche Funktionen ausdrückbar und werden angegeben. Als Grenzfall für  $b = \infty$  ergibt sich eine von Boussinesq herrührende Lösung.

*Theodor Pöschl.*

**Groot, S. R. de and H. A. Tolhoek:** Electric and chemical potential; different methods of treatment and their relation. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B 54, 42—53 (1951).

Im Zusammenhang mit der Messung von Potentialen in elektrischen Zellen mit Elektrolyten taucht die Frage auf, ob das chemische Potential  $\mu_k$  der  $k$ -ten Komponente und das elektrische Potential  $\varphi$  gesondert gemessen werden können oder nur in Kombination  $\tilde{\mu}_k = \mu_k + e_k \varphi$ .  $e_k$  bedeutet die elektrische Ladung der Masseneinheit der  $k$ -ten Komponente.  $\tilde{\mu}_k$  heißt das elektrochemische Potential. In dieser Arbeit wird diese Frage eingehend untersucht. Dabei zeigt sich folgendes: Solange keine Raumladungen existieren, können  $\mu_k$  und  $\varphi$  nicht gesondert bestimmt werden. Diese Bedingung ist in normalen Elektrolyten in guter Näherung erfüllt. Hierauf wies Guggenheim schon hin. Dieses Ergebnis bedeutet nicht, daß  $\mu_k$  und  $\varphi$  keine gesonderte physikalische Bedeutung besitzen; beispielsweise ist  $\varphi$  als Mittelwert des mikroskopischen Potentials definiert. Während  $\varphi$  einer direkten Messung nicht zugänglich ist, wenn keine Raumladung existiert, kann es gesondert von den  $\mu_k$  gemessen werden, wenn wir es nahezu mit isolierenden Medien zu tun haben, so daß Raumladungen auftreten können.

*Hans Falkenhagen.*

**Levine, S. and A. Suddaby:** Simplified forms for free energy of the double layers of two plates in a symmetrical electrolyte. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 287—302 (1951).

In einem kürzlich veröffentlichten Werk über die Theorie der Stabilität lyophober Kolloide behandeln Verwey und Overbeek die Wechselwirkung der



elektrischen Doppelschichten zweier paralleler Platten, die in ein großes Volumen eines binären symmetrischen Elektrolyten eingetaucht sind. Ihre Formeln für die gegenseitige freie Energie führen auf elliptische Integrale, wobei die Poisson-Boltzmann-Gleichung zugrunde gelegt wurde. Die Arbeit der Verff. enthält 3 einfachere Ausdrücke für diese wechselseitige Energie, die angenähert gelten. Diese drei gewonnenen Formeln beziehen sich auf folgende Fälle: 1. Der Abstand zwischen den Platten ist groß. 2. Der Plattenabstand ist klein. 3. Die Potentiale sind genügend klein. Bei großem Abstand entsteht eine Reihenentwicklung, die über die für diesen Fall von Verwey und Overbeek gewonnenen Ergebnisse hinausgeht. Die Reihenentwicklung bei kleinem Abstand befindet sich mit den strengen Resultaten von Verwey und Overbeek in guter Übereinstimmung. Schließlich stehen die Betrachtungen bei mäßigen Potentialen mit bekannten Rechnungen von Gronwall, La Mer und Sandved, die sich auf die Lösung der Poisson-Boltzmann-Gleichung für das Potential im Falle sphärischer Ionen mit Hilfe der Greenschen Funktion beziehen, im Zusammenhang und führen auf bestimmte Näherungen. — Die Ergebnisse der Verff. eignen sich für numerische Berechnungen besser als die strengen Formeln von Verwey und Overbeek. Verff. kündigen die Erweiterung ihrer Rechnungen auf asymmetrische Elektrolyte an.

Hans Falkenhagen.

**Vajnštejn, B. K.: Über Vektormodelle von Kristallstrukturen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 1137—1140 (1951) [Russisch].

Eine Kristallstruktur als ein System von mit Gewichten versehenen Punkten sei durch einen Satz komplexer Zahlen  $S = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  mit  $z = \rho e^{2\pi i x}$  [ $\rho$  = Gewicht,  $x$  = Lagenkoordinate] gegeben.  $S$  werde mit der inversen Struktur  $\bar{S} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)$  multipliziert, was die quadratische Matrix  $W = SS = (w_{jk}) = (z_j \bar{z}_k) = (\rho_j \rho_k \exp \{2\pi i (x_j - x_k)\})$  ( $j, k = 1 \rightarrow n$ ) ergibt. Die Elemente  $w_{jk}$  stellen alle interatomare Vektoren  $(x_j - x_k)$  dar, während das Gewicht jedes Elementes dem Produkt der Gewichte der Atome  $\rho_j$  und  $\rho_k$  gleich ist, d. h.  $W$  ist das Vektordiagramm (Patterson-) der Kristallstruktur  $S$ . In  $W$  sind  $n$  Strukturen  $S$  und  $\bar{S}$  enthalten;  $W$  ist die Superposition von  $n$  Strukturen  $S$  nach dem Gesetz  $\bar{S}$ . Aus  $W = SS$  folgt die Möglichkeit der Ermittlung von  $S$  aus dem Vektordiagramm  $W$ . Man greift einen Vektor heraus, sucht alle zu ihm parallelen auf und markiert z. B. deren rechte Enden. Als Resultat erhält man  $S + \bar{S}$ . Durch Betrachtung der Gewichte läßt sich  $S$  (oder  $\bar{S}$ ) ausscheiden. Gelingt diese Operation mit einem einzigen Vektor nicht, so muß diejenige minimale Figur, welche in  $S$ , jedoch nicht in  $\bar{S}$  vorhanden ist, genommen werden. Ist  $S$  selber zentrosymmetrisch, so wird  $S + \bar{S} = 2S$  und  $S$  kann sofort ausgesondert werden. — Bei einer realen Struktur ist  $S$  eine kontinuierliche Dichtefunktion  $\rho(x)$ . Durch Approximation  $z_k = \rho_k \exp \{2\pi i k \cdot \Delta x\}$  erhält man  $W = (w_{jk}) = (\rho_j \rho_k \exp \{2\pi i (k - j) \Delta x\} \cdot \Delta x)$ . Während die  $x_j - x_k$  willkürliche Werte annehmen, können die neuen Matrixelemente  $w_{jk}$  nach gleichgroßen Werten  $k - j = m$  gruppiert werden. Sie haben die

gleiche Koordinate  $m \Delta x$  und das Gewicht (1)  $W_m = \sum_{j=1}^n \rho_j \rho_{j+m} \Delta x$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ). Im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  wird wegen  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (j \Delta x) = x$  und mit  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (m \Delta x) = u$ :

(2)  $SS = W(u) = \int_0^1 \rho(x) \rho(x+u) dx$ , d. i. das Pattersonintegral. Auch im Falle einer kontinuierlichen Struktur kann das Vektor-(Patterson-)diagramm als Superposition der Struktur  $S$  nach dem Gesetz  $\bar{S}$  aufgefaßt werden. Die Matrix  $(w_{jk})$  wird gleichfalls kontinuierlich, wobei die Integrierung in ihr entlang den Schräglinien  $u = \text{const.}$  die Integrale (2) ergibt. Die Elemente dieser kontinuierlichen Matrix sind uns nicht einzeln gegeben, sondern nur ihre Summe [Integrale (2)]. Es liegt eine nichtlineare Integralgleichung in bezug auf  $\rho(x)$  bei gegebener Funktion  $W(u)$  vor, die durch das Gleichungssystem (1) approximiert wird. Die Positivität der Größe  $\rho$  (und  $w$ ) ist wesentlich. — Es ergibt sich, daß das Aufsuchen von  $\rho(x)$  für asymmetrische Strukturen prinzipiell unbestimmt, für zentrosymmetrische Strukturen hingegen möglich erscheint. Im konkreten Fall ist die Lösung mittels des Systems (1) nicht real. Weiter kann man aus dem Vorhergehenden den Schluß ziehen, daß die Phasen-(Vorzeichen-)bestimmung aller Strukturamplituden im zentrosymmetrischen Fall grundsätzlich möglich, im azentrischen Falle hingegen unbestimmt ist. (Nach deutscher Übersetzung referiert.)

Werner Nowacki.

**Palatnik, L. S.: Quantitative Formulierung einer kristallgeometrischen Zuordnung.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 1141—1144 (1951) [Russisch].



Unter einer räumlichen (ebenen oder linearen) kohärenten Verknüpfung zweier kristallographischen Gitter (Ebenen oder Richtungen) wird eine quasi-gleichwertige Koexistenz verstanden, bei der eine „stetige“ Verbindung und Periodizität in 3, 2, oder 1 Dimension(en) beibehalten wird. Hierbei werden sowohl Kristallgitter vom selben als auch solche verschiedener Typen mit gleicher oder verschiedener Symmetrie untersucht. Diese Erscheinung wird bei der martensitischen Umwandlung, der Alterung von Legierungen usw. beobachtet. Es werden für diese Verknüpfungen die nötigen Formeln abgeleitet und in einer Tabelle für eine Reihe von Beispielen die berechneten mit den beobachteten Werten verglichen. (Nach deutscher Übersetzung referiert).

Werner Nowacki.

**Krishnan, K. S. and Sanat Kumar Roy:** The frequencies and the anharmonicities of the normal modes of oscillation of alkali halide crystals. I. Lattice oscillations. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **207**, 447—460 (1951).

**Brauer, Peter:** Zur Gittertheorie der Ionenkristalle, insbesondere der Erdalkalichalkogenide. *Z. Naturforsch.* **6a**, 255—263 (1951).

Es werden die elastischen Konstanten  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  und  $c_{44}$ , sowie die Kompressibilität und der von den Ionenverschiebungen herrührende Anteil der Dielektrizitätskonstante für die Alkalihalogenide und Erdalkalichalkogenide berechnet, indem außer der gewöhnlichen Coulombkraft und einem exponentiellen Abstoßungsglied bei den Substanzen, die nicht der Cauchy-Beziehung genügen (Li F, sowie die Erdalkalisalze) noch ein bei Winkeländerungen wirksam werdendes Zusatzglied eingeführt wird. Man kommt in allen Fällen zu einer recht guten Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen, wenn man erstens nur die Beiträge der nächsten Nachbarn berücksichtigt, zweitens mit einem universellen Wert  $\varrho = 0,32 \text{ \AA}$  im Exponenten  $\exp(-r/\varrho)$  des Abstoßungsgesetzes rechnet und drittens die effektive Ladung der zweiwertigen Ionen etwas kleiner als 2 annimmt. *Fritz Sauter.*

**Clastre, José:** Accroissement de contraste dans la fonction de Patterson. *C. r. Acad. Sci., Paris* **232**, 2461—2462 (1951).

Da bei der Pattersonfunktion  $P$  die Maxima häufig in Gruppen zusammenfallen, ist es schwierig, ihre genaue Lage festzustellen. Genauer kann dies bei der nach einer Koordinate abgeleiteten Funktion von  $P$  erfolgen. Verf. weist darauf hin, daß eine schärfere Trennung der Maxima auch mit der Funktion  $P^2$  möglich ist, wobei noch eine zusätzliche Verbesserung durch die abgeleitete Funktion von  $P^2$  erzielt werden kann. Begründet sind diese Verbesserungen durch schärfere Ausprägungen des Funktionsreliefs (Kontrasterhöhungen). *Albert Kochendörfer.*

**Wagner, E. H.:** Zur Streifenstruktur der Kossel-Möllenstedtschen Elektroneninterferenzen mit konvergentem Bündel. III. *Z. Naturforsch.* **6a**, 133—139 (1951).

In zwei vorhergehenden Mitteilungen [*Z. Naturforsch.* **6a**, 1—12, 79—84 (1951)] ist rechnerisch untersucht worden, wann sich ein allgemeines  $N$ -Strahlproblem der Elektroneninterferenzen in Zwei- und Dreistrahlprobleme zerlegen läßt. In der vorliegenden Mitteilung wird gezeigt, wie der Interferenzstreifenverlauf ohne Rechnung qualitativ mit Hilfe der Fuesschen Ausbreitungsfläche ermittelt werden kann. Die Voraussetzungen sind dieselben wie früher: Beschränkung auf den Lauefall, nicht mehr als zwei stark gekoppelte Strahlen. Unter diesen Voraussetzungen kann die Ausbreitungsfläche, ausgehend von der nullten Näherung (Kugeln  $K_h$  um die reziproken Gitterpunkte  $h$ , im interessierenden Bereich angenähert durch Paraboloid  $P_h$ ), in nicht zusammenhängende Flächenstücke („Funktionszweige“  $F_h$ ) unterteilt werden, die einfach übersehen werden können und es gestatten, die Streifenstruktur eines ganzen Reflexes auf einmal zu ermitteln. Hierin besteht gegenüber der Rechnung ein Vorzug, die wegen formaler mathematischer Schwierigkeiten nur für bestimmte Reflexbereiche bis zu Endformeln durchgeführt werden kann. Als Anwendungsbeispiel wird die Streifenstruktur einiger Glimmerreflexe ermittelt und gute Übereinstimmung mit der Erfahrung festgestellt. *Albert Kochendörfer.*

**Slotnick, M.: Magnetic neutron diffraction from exchange-coupled lattices at high temperatures.** Phys. Review, II. Ser. 83, 1226—1230 (1951).

An dem antiferromagnetischen Stoff MnO ist bei Zimmertemperatur kohärente Streuung von Neutronen infolge der Wechselwirkung der magnetischen Momente der Neutronen und der Elektronen (magnetische Streuung) beobachtet worden. Da die Curietemperatur von MnO 122° K beträgt, so liegt hier einer der wenigen nachweisbaren, zu Austauschwirkungen in Beziehung stehenden Effekte weit oberhalb der Curietemperatur vor. Verf. berechnet diese Effekte genauer, auch für ferromagnetische Stoffe. Ausgegangen wird von einer von Halpern und Johnson (dies. Zbl. 21, 274) aufgestellten Beziehung, welche die gestreute Intensität als Funktion der Impulsvektoren und Spins der Neutronen, der Gitterzustände, sowie geometrischer Größen angibt. Näherungsweise wird dann angenommen, daß die Beträge  $k$  und  $k'$  der Neutronen vor und nach der Streuung sich nicht merklich voneinander unterscheiden (elastische Streuung) und daß die Energiezustände mit nicht verschwindenden Matrixelementen praktisch alle angenommen werden können. Durch Reihenentwicklung nach  $1/T$  ergibt sich als nullte Näherung die paramagnetische Streuung ohne Berücksichtigung der Austauschwirkung und als erste Näherung ein dieser entsprechender Zusatzterm, der eine Funktion von  $k \cdot \sin \theta/2$  ( $\theta$  Streuwinkel), der Austauschenergien zwischen den nächsten und den übernächsten Nachbarn und den Abständen derselben ist. Dieser Term ist für ferromagnetische Stoffe wesentlich positiv, für antiferromagnetische Stoffe wesentlich negativ. Insgesamt fällt daher im ersten Fall die Intensität monoton mit wachsendem  $k \cdot \sin \theta/2$  ab, durchläuft aber im zweiten Fall ein Maximum, das der Beobachtung leicht zugänglich ist und so Aussagen über die genannten Gittergrößen gestattet. Der Einfluß der unelastischen Streuung wird diskutiert.

Albert Kochendörfer.

**Burton, W. K., N. Cabrera and F. C. Frank: The growth of crystals and the equilibrium structure of their surfaces.** Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 243, 299—358 (1951).

Die bisher in kurzen Veröffentlichungen mitgeteilten Vorstellungen der Verff. über das Wachstum und die Oberflächenbeschaffenheit der Kristalle werden ausführlich dargestellt und theoretisch begründet. In Teil 1 wird die Beweglichkeit adsorbierter Moleküle auf einer Kristalloberfläche, ihre Anlagerung an eine auf der Oberfläche gebildete zweidimensionale Atomschicht und das Wachstum des Randes einer solchen Schicht untersucht als Funktion der Übersättigung und der mittleren Zahl der Vorsprünge und Einsprünge längs des Randes (Knicke, kinks). In vielen Fällen ist dieses Wachstum orientierungsunabhängig, so daß der Wachstumsrand kugelförmig ist. In Teil 2 wird ausgeführt, daß unter den normalen experimentellen Bedingungen eine Atomschicht nicht durch Bildung eines zweidimensionalen Flächenkeims entstehen kann, sondern schon Stufen durch Schraubenversetzungen, die auf der Oberfläche enden, vorhanden sein müssen. Die Wachstumsgeschwindigkeit in Richtung senkrecht zur Oberfläche ergibt sich dann für kleine Übersättigungen proportional zum Quadrat derselben, für große Übersättigungen proportional zu diesen selbst. Die Ergebnisse sind mit den Meßergebnissen von Volmer und Schultze an Jodkristallen aus der Dampfphase in Einklang. Die Anwendung dieser Vorstellungen auf das Wachstum aus der Schmelze wird kurz skizziert. In Teil 3 wird die Gleichgewichtsstruktur der Ränder der Schichten untersucht, insbesondere die Statistik der Knicke in Abhängigkeit von der Temperatur, den Parametern der Bindungsenergien und der Orientierung. Form und Größe der Flächenkeime und die Aktivierungsenergie für die Bildung einer Verbindungsstufe zwischen zwei Versetzungen ungleichen Vorzeichens werden berechnet. Diese ist sehr groß, wenn der Abstand der Versetzungen kleiner als die kritische Keimgröße ist und verschwindet für größere Abstände. In Teil 4 wird die Oberflächenstruktur als kooperative Erscheinung behandelt, da die Stufenunterschiede der einzelnen Moleküle nicht unabhängig voneinander sind. Für den Fall, daß nur ein oder zwei Atomabstände Stufenunterschiede auftreten, können die Ergebnisse der Theorie von Onsager [Phys. Review, II. Ser. 65, 117 (1944)] für zweidimensionale Ferromagnetika mit geringen Änderungen übertragen werden. Es besteht demnach eine „Umwandlungstemperatur“, bis zu welcher eine am absoluten Nullpunkt atomar glatte Oberfläche praktisch glatt bleibt, oberhalb deren sie aber rasch aufgeraut wird (Oberflächenschmelzen). Die Umwandlungstemperatur ist für Kristallflächen mit Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn von der Größenordnung oder größer als die Schmelztemperatur, für Flächen mit merklicher Wechselwirkung zwischen übernächsten Nachbarn kleiner und entspricht einem Oberflächenschmelzen dieser Bindungen. Für größere Stufenunterschiede wird die Theorie von Bethe [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 150, 552 (1935), dies. Zbl. 12, 45] verallgemeinert.

Albert Kochendörfer.

**Cottrell, A. H. and B. A. Bilby: A mechanism for the growth of deformation twins in crystals.** Philos. Mag., VII. Ser. 42, 573—581 (1951).

Es ist unwahrscheinlich, daß sich bei der mechanischen Zwillingbildung alle Atome gleichzeitig gegeneinander bewegen, es ist vielmehr anzunehmen, daß ein makroskopischer Zwilling von einem „Keim“ atomarer Größe aus kontinuierlich weiterwächst. Auf der Grundlage der



Vervielfachung von Versetzungen nach Frank und Read [Phys. Review, II. Ser. 79, 722 (1950)] wird folgender Wachstumsmechanismus begründet: Treffen drei Versetzungen in einem Knoten zusammen und liegt eine von ihnen (Nr. 3) und ihr Burgersvektor (Gleitvektor) in einer Gleitebene, während die Burgersvektoren der beiden andern eine Komponente  $t$  in Richtung der Gleitebenenormalen  $\nu$  besitzen, so bewegt sich die Versetzung 3 nicht nur in der Gleitebene, sondern gleichzeitig aus dieser heraus in Richtung  $\nu$  und zwar um den Betrag  $t$  bei einem Umlauf. Damit auf diese Weise eine Zwillingsbildung stattfinden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein: 1. Die sich bewegende Versetzung muß die richtige Schiebung für eine Zwillingsbildung ergeben; 2.  $t$  muß gleich dem Netzebenenabstand in Richtung  $\nu$  sein; 3. die andern Versetzungen müssen genügend fest verankert sein, damit sie sich nicht mitbewegen; 4. die Versetzungen müssen sich in einem Knoten treffen. Es wird gezeigt, daß alle diese Bedingungen im kubisch raumzentrierten Gitter für die {112}-Zwillingsbildung erfüllt sein können, während im flächenzentrierten Gitter die Bedingung 4 für die {111}-Zwillingsbildung nicht befriedigt werden kann, mit dem Ergebnis, daß in einem solchen Gitter nur einatomare Zwillings Ebenen gebildet werden können. Es wird weiter ausgeführt, daß die Schubspannung für die Auslösung des atomaren Zwillingskeims größer sein muß als diejenige für das Weiterwachstum, woraus sich die rasche Entstehung der Zwillinge erklärt. Eine Abschätzung der Bildungsdauer ergibt in Übereinstimmung mit den Beobachtungen einige Mikrosekunden.

*Albert Kochendörfer.*

**Frank, F. C.:** Crystal dislocations. — Elementary concepts and definitions. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 809—819 (1951).

In den letzten Jahren sind in verstreuten Veröffentlichungen und auf Diskussionstagungen Vorstellungen über besondere Arten von Versetzungen entwickelt worden. Verf. stellt diese, soweit sie allen Kristallstrukturen gemeinsam sind, unter einheitlichen topologischen Gesichtspunkten zusammen. Im einzelnen werden behandelt: Burgersvektor (Gleitvektor), Stufen- und Schraubenversetzungen, vollkommene und unvollkommene Versetzungen (bei ersteren ist der Burgersvektor ein Gittervektor, bei letzteren nicht), bewegliche und unbewegliche Versetzungen (glissile bzw. sessile dislocations), Zwillinge und Zwillingsversetzungen.

*Albert Kochendörfer.*

**Seeger, Alfred und Albert Kochendörfer:** Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. II. Beliebig angeordnete und beschleunigte Versetzungen. Z. Phys. 130, 321—336 (1951).

In Fortführung des 1. Teils (dies. Zbl. 37, 133) wird ein Verfahren für Näherungslösungen von Versetzungen im eindimensionalen Fall entwickelt. Angewandt wird dieses Verfahren auf Wechselwirkung zweier Versetzungen sowie auf die Wechselwirkung mit einer zeitlich periodischen äußeren Schubspannung. Besonders der letztere Fall ist interessant, da gezeigt wird, daß die Versetzung keineswegs als starres Gebilde mitschwingt. Die Grundgleichungen für eine zweidimensionale Theorie werden aufgestellt. Die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall soll in einer weiteren Arbeit behandelt werden.

*Günther Leibfried.*

**Nabarro, F. R. N.:** The synthesis of elastic dislocation fields. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 1224—1231 (1951).

Die Ausdrücke für die Verschiebungen eines infinitesimalen Versetzungsrings in seiner Gleitebene werden berechnet; dies ist ein Spezialfall der von Peach und Köhler (dies. Zbl. 39, 233) angegebenen allgemeinen Formeln. Die Ergebnisse werden auf bewegte Versetzungen erweitert, speziell wird der Fall einer beliebig bewegten geradlinigen Schraubenversetzung diskutiert.

*Günther Leibfried.*

**Yoffe, Elizabeth H.:** The moving Griffith crack. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 739—750 (1951).

Das Spannungsfeld eines sich bewegenden Risses mit rechteckigem Querschnitt in einem isotropen Körper wird berechnet. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Spannungen wird im Zusammenhang mit dem Verhalten von Rissen in Glas diskutiert.

*Günther Leibfried.*

**Hill, R.:** On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 868—875 (1951).

Die Bedeutung der „Streckgrenze“ wird erläutert und mathematisch im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. mit einigen Beispielen diskutiert.

*Günther Leibfried.*



Slezkin, N. A.: Die Differentialgleichungen eines Deformationsprozesses. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 561—564 (1951) [Russisch].

L'interprétation des résultats d'un grand nombre d'expériences conduit l'A. à admettre une certaine interdépendance entre les phénomènes macroscopiques et microscopiques qui accompagnent le processus de déformation des corps réels. Ainsi, une déformation finie peut provoquer un changement des structures du corps à l'échelle moléculaire: une portion du voisinage d'un point, par exemple, peut subir des dislocations, sans que ce changement d'état atteigne la totalité du voisinage. Inversement, d'ailleurs, des changements d'état locaux partiels peuvent avoir des effets sensibles à l'échelle macroscopique. Or, ces faits sont en contradiction avec l'hypothèse d'homogénéité et d'uniformité en moyenne qui est à la base des théories classiques des déformations. L'A. cherche alors à édifier une théorie générale, indépendante de cette hypothèse simplificatrice; les résultats de sa note antérieure [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 205—208 (1951)] lui fournissent le moyen de former des relations, généralisant celles de la théorie classique et qui tiennent compte de la coexistence à l'échelle moléculaire des particules atteintes ou non par le changement d'état (dislocation, cristallisation, diffusion etc). *Julien Kravtchenko.*

### Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Clemence, G. M.: Reports on the progress of astronomy. Celestial mechanics. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 111, 219—231 (1951).

Chazy, Jean: Sur la valeur d'un déterminant fonctionnel. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 537—539 (1951).

Die oskulierende Bahn eines Planeten zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  ist entweder charakterisiert durch die sechs Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten  $x, x'; y, y'; z, z'$  oder durch die oskulierenden elliptischen Elemente  $a, e, i, \theta, \tilde{\omega}, \tau$ . Die Funktionaldeterminante  $\Delta = D(x, x', y, y', z, z')/D(a, e, i, \theta, \tilde{\omega}, \tau)$  der Transformation des ersten Systems auf das zweite, eine sehr wichtige Größe in der Himmelsmechanik, läßt sich durch direkte Rechnung nur sehr umständlich bestimmen. Verf. gibt einen sehr bequemen indirekten Weg zur Berechnung dieser Determinante an: Wenn  $C_i, C_k$  irgend zwei der sechs elliptischen Elemente sind, und wenn  $R$  die Störungsfunktion bedeutet, so lauten die Lagrangeschen Störungsgleichungen  $dC_i/dt = \sum_k P_{ik} \partial R / \partial C_k$ , wobei sich die 36 Koeffizienten  $P_{ik}$  durch die Poissonschen

Klammerausdrücke in der Form  $P_{ik} = \frac{D(C_i, C_k)}{D(x, x')} + \frac{D(C_i, C_k)}{D(y, y')} + \frac{D(C_i, C_k)}{D(z, z')}$  darstellen lassen. Es ist dann  $||P_{ik}|| = \Delta^{-2}$ , und die Determinante  $||P_{ik}||$  läßt sich sehr leicht berechnen, da in ihr von 36 Elementen nur zehn von null verschieden sind und überdies auch alle Elemente oberhalb der Diagonale verschwinden. Hieraus leitet man leicht ab, daß  $\Delta = \pm \frac{1}{2} n^4 a^5 e \sin i$ . *Karl Stumpff.*

Goldsbrough, G. R.: The stability of saturn's rings. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 244, 1—17 (1951).

In einer Arbeit über Zusammenstöße zwischen den Partikeln des Saturnrings hat Jeffreys (Monthly Not. Roy. astron. Soc. 107, 263) abgeleitet, daß der Endzustand ein Ring sein müsse, der nirgends mehr als Partikeldicke und so große Zwischenräume habe, daß Kollisionen nicht mehr stattfinden können. Eine weitere Frage ist, ob ein solches System gegen kleine Störungen stabil oder instabil ist. Maxwell hat diese Frage schon 1857 untersucht und kommt zu folgenden Ergebnissen: 1. Ein Ring von Teilchen, die gleich groß und gleichmäßig über eine Kreisbahn angeordnet sind, und die sich mit der dieser Kreisbahn entsprechenden Winkelgeschwindigkeit bewegen, ist stabil gegen kleine Störungen, wenn die Masse der Partikel gegen die Saturnmasse klein ist. 2. Zwei solcher Ringe mit verschiedenem Radius, aber in der gleichen Ebene stören sich gegenseitig — die Maxwellschen

Ergebnisse hierüber sind jedoch unvollständig und entbehren der Allgemeinheit. Verf. greift diese Frage erneut auf und findet, daß es ein System von Bewegungen gibt, in dem die Partikel in den Ringen gleichabständig verteilt sind, und in dem die Ringe gleichförmig rotieren, sofern die Partikel zahlreich und klein genug sind. Kleine Störungen, die auf die Partikel in der Bahnebene wirken, lassen sich in periodische Reihen entwickeln. Ein Paar von Ringen, unter Bedingungen, die im Saturnring erfüllt sind, bildet also ein stabiles System. Die zum Beweise dieses Satzes benutzten analytischen Methoden können auf ein System von mehr als zwei Ringen angewandt werden. Diese Erweiterung wird nicht explizit vorgenommen, die analytischen Indizien lassen aber an ihrer Berechtigung kaum einen Zweifel. *Karl Stumpff.*

**Öpik, E. J.: Collision probabilities with the planets and the distribution of interplanetary matter.** Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 54, Nr. 12, 165—199 (1951).

Versuch einer statistischen Theorie der Verteilung der planetarischen und interplanetarischen Materie des Sonnensystems unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit von Zusammenstößen. Insbesondere wird die Lebensdauer kleiner Materieteilchen (von staubförmiger bis zu planetoidischer Größe) abgeschätzt und die Möglichkeit des Eingefangenwerdens von großen Planeten diskutiert. Der Bahnbereich der großen Planeten müßte von Meteoriten längst leergefegt worden sein, wenn nicht infolge des Poynting-Robertsoneffekts ein gegen die Sonne gerichteter Strom interplanetarischer Materie die Lücken immer wieder auffüllen würde. Infolgedessen zeigt auch die Helligkeitsverteilung des Zodiakallichtes nicht die Lücken, die infolge der materieabsorbierenden Tätigkeit von Merkur und Venus zu erwarten wären. Die sehr gründliche Arbeit behandelt alle Fragen, die sich aus der Möglichkeit von Kollisionen ergeben und schließt mit einer Betrachtung über die Natur des Zodiakallichtes. *Karl Stumpff.*

**Thüring, B.: Numerische Untersuchungen zu den Bewegungstheorien der Planeten der Jupitergruppe.** Astron. Nachr. 279, 217—230 (1951).

**Vogelaere, René de: Une nouvelle famille d'orbites périodiques dans le problème de Störmer: Les ovales.** Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver 1949, 170—171 (1951).

**Fleckenstein, J. O.: Zur antifokalen Keplerschen Bewegung.** Experientia 7, 254—255 (1951).

**Kulaschko, B.: Zur Verbesserung der Hypothesen für die Dreiecksflächen bei der Parabel.** Astron. Nachr. 279, 213—216 (1951).

**Ivanenko, D. D., A. M. Brodskij und L. P. Ginsburg: Über die Stabilität astronomischer Systeme.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 565—567 (1951) [Russisch].

**Gurevič, L. E.: Die Evolution von Sternsystemen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 941—944 (1951) [Russisch].

**Wundt, H.: Bestimmung der Sonnenfleckperioden mit Hilfe des Periodogramms.** Z. angew. Math. Mech. 31, 247—249 (1951).

Die Schustersche Methode der Periodogrammanalyse wird kurz und in mathematisch eleganter Weise dargestellt, auch unter Berücksichtigung der praktischen Schwierigkeiten, die eintreten, wenn die Beobachtungsreihe in Vergleich mit der Länge der auftretenden Perioden zu kurz ist, wenn zwei Perioden zu dicht benachbart sind, so daß die Linien im Periodenspektrum sich stören, und schließlich, wenn die Funktion mit einem additiven Glied behaftet ist. Die Methode wird auf die monatlichen Sonnenfleckrelativzahlen von 1749—1948 angewandt. Von den Ergebnissen wird lediglich eine Liste der Maxima des Periodogramms für Perioden zwischen 5 und 100 Jahren gebracht. Realitätsuntersuchungen, Phasendiagramme usw. fehlen. *Karl Stumpff.*

**Meurers, J.: Ein statistisches Kriterium zur Beurteilung des Globuli-Phänomens.** Z. Astrophys. 29, 189—197 (1951).



**Klauder, H.:** Über den Exponenten der Temperatur im stellaren Energieerzeugungsgesetz. *Astron. Nachr.* **280**, 41—43 (1951).

**Frank-Kameneckij, D. A.:** Nicht-adiabatische Pulsationen in Sternen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **80**, 185—188 (1951) [Russisch].

**Gardiner, J. G.:** A model of a red giant star. *Monthly Not. Roy. astron. Soc.* **111**, 102—110 (1951).

**Gardiner, J. G.:** Integration of the Cowling stellar model. *Monthly Not. Roy. astron. Soc.* **111**, 94—101 (1951).

**Weizsäcker, Carl Friedrich v.:** Anwendungen der Hydrodynamik auf Probleme der Kosmogonie. *Festschr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1951, math.-phys. Kl., 86—122 (1951).

**Curtis, A. Robert:** Elasticity corrections for pendulums used in the absolute measurement of gravity. *Monthly Not. Roy. astron. Soc.*, geophys. Suppl. **6**, 159—162 (1951).

**Bullen, K. E.:** Theoretical amplitudes of the seismic phase PKJKP. *Monthly Not. Roy. astron. Soc.*, geophys. Suppl. **6**, 163—167 (1951).

**Nedelkow, I.:** Bestimmung der Schwerkraftverteilung in der Nähe homogener Körper mittels elektrischer Modelle. *Izvestija Bulgarskata Akad. Nauk, Otdel. fiz.-mat. techn. Nauki*, Ser. fiz. **1**, 263—269, russische und deutsche Zusammenfassgn. 270, 270—271 (1951) [Bulgarisch].

**Fjeldstad, Jonas Ekman:** The determination of longitudinal seiches in lakes. *Arch. Math. Naturvid.* **51**, Nr. 2, 21—27 (1951).

Die Theorie der durch Wind erregten scheinbaren Gezeiten, die auf dem Genfer See beobachtet wurden, ist von Doodson, Carey und Baldwin [Trans. roy. Soc. Edinburgh **52**<sub>III</sub>, no 28] gegeben worden. Verf. gibt eine einfachere Methode zur Berechnung dieser longitudinalen Gezeiten. *Joachim Pretsch.*

**Davies, T. V.:** The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude. I. *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A **208**, 475—486 (1951).

Im Gegensatz zu der Theorie von Levi-Civita [Math. Ann. **93**, 264 (1925)], in welcher die nichtlineare Randbedingung des Problems durch die lineare Bedingung kleiner Amplituden angenähert und die Lösung als unendliche Reihe dargestellt worden war, wird hier die ursprüngliche Randbedingung durch eine andere nichtlineare Bedingung angenähert und eine geschlossene analytische Lösung gewonnen. Dadurch gelingt es, schon in der ersten Näherung alle Wellenamplituden zu untersuchen. Für die Schwerewellen endlicher Amplitude in unendlich tiefem Wasser erhält man in erster Näherung die von Havelock auf anderem Wege gefundene Näherung; die höheren Näherungen werden nach der Methode von Poincaré abgeleitet. Das Problem für endliche Wassertiefe wird in einer weiteren Mitteilung behandelt werden. *Joachim Pretsch.*

**Jeffreys, Harold:** On the highest gravity waves on deep water. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **4**, 385—387 (1951).

**Press, Frank and Maurice Ewing:** Theory of air-coupled flexural waves. *J. appl. Phys.* **22**, 892—899 (1951).

Vorliegende Arbeit gibt die Theorie zu experimentellen Untersuchungen über die Ausbreitung elastischer Wellen in Eisdecken auf Seen. Dabei werden die Wellen durch kleine Explosionen im Wasser oder in der Luft erzeugt. Theorie und Experiment ergeben übereinstimmend: Bei Erregung durch Explosion im Wasser entstehen im Eis Biegewellen mit Dispersion (Phasengeschwindigkeit nimmt mit steigender Frequenz zu). Durch die Explosion in der Luft hingegen wird bei jedem Seismographen ein Wellenzug mit konstanter Frequenz aufgezeichnet, der seine größte Amplitude bei Eintreffen des Luftschalles erreicht und dann abbricht. Diese Wellen werden durch eine Druckwelle erzeugt, die mit der Schallgeschwindigkeit der Luft  $v_a$  über das Medium mit Dispersion läuft. Dabei sendet sie an jedem Ort,



den sie erreicht, einen Wellenzug im Eis aus. Bei der Überlagerung dieser Wellenzüge erhält man nur eine Verstärkung derjenigen Wellen, deren Phasengeschwindigkeit gleich  $v_a$  ist. Die zugehörigen Rechnungen werden vollständig durchgeführt und das Ergebnis in Form von Diagrammen gegeben, die die Abhängigkeit der Geschwindigkeiten und Amplituden von der Frequenz, den Daten des Eises und der Höhe bzw. Tiefe der Explosion zeigen.

W. Kertz.

**Linejkin, P. S.:** Über die Abkühlung der Oberflächenschicht des Meeres. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 205—208 (1951) [Russisch].

**Jeffreys, Harold and Merriell E. M. Bland:** The instability of a fluid sphere heated within. Monthly Not. Roy. astron. Soc., geophys. Suppl. 6, 148—158 (1951).

Es wird das Verhalten einer flüssigen Kugelmasse mit fester Begrenzung untersucht, die von innen erwärmt wird. An Hand der Ergebnisse wird diskutiert, wie weit die auftretende zelluläre Bewegung zur Erklärung der Land- und Wasserhemisphäre (Theorie von Hills) herangezogen werden kann.

W. Kertz.

**Wilkes, M. V.:** The thermal excitation of atmospheric oscillations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 207, 358—371 (1951).

Die Literatur bis 1940 über die harmonischen Schwingungen der Atmosphäre, wie sie durch die halbtägigen Schwankungen des Luftdrucks angezeigt werden, hat J. Bartels im Lehrbuch der Meteorologie von Hann und Süring, 5. Auflage (1940), S. 301—305 kritisch besprochen, u.ä. auch die Arbeiten von G. J. Taylor und C. L. Pekeris, deren prinzipiellen Gedankengängen Verf. sich angeschlossen hat. Er setzt die Kenntnis einer älteren Abhandlung von S. Chapman voraus. — Die Achillesferse der Theorie dieser Erscheinungen ist die aus den hydrodynamischen Gleichungen unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen erschlossene halbtägige freie Schwingung der Atmosphäre. Die nur sehr geringe halbtägige Druckschwankung infolge der gezeitenenerregenden Anziehungskraft der Sonne erfährt dann infolge Resonanz zwar eine erhebliche Vervielfachung, aber die Verschiebung der wirklich beobachteten Eintrittszeiten der Maxima und Minima bleibt ungeklärt. Zur Lösung dieses Rätsels wurde aus dem täglichen Gang der Temperatur, allerdings rein rechnerisch mit Hilfe der harmonischen Analyse, die halbtägige Temperaturwelle ermittelt und aus dem gleichzeitigen Auftreten beider Wellen die beobachtete Verschiebung erklärt. — Die Arbeiten von G. J. Taylor 1929 und 1932 über die Eigenschaften der nach der Krakatau-Katastrophe aufgetretenen Druckwelle brachten nun das überraschende Ergebnis, daß aus den gemessenen Daten auf eine freie Schwingung der Atmosphäre von  $10\frac{1}{2}$  Stunden geschlossen werden mußte, so daß diese Eigenschwingung nicht in Resonanz mit den von der Sonne erzeugten Schwingungen stehen konnte. Nach einer Methode von G. J. Taylor (1936) zur Behandlung des Problems bei verschiedener Temperaturschichtung der Atmosphäre hat dann C. L. Pekeris 1937 gezeigt, daß eine Lufthülle, deren vertikaler Temperaturverlauf dem entspricht, der sich auf Grund der Theorie der äußeren Hörbarkeitszone bei Explosionen — Temperaturzunahme zwischen 30 und 60 km Höhe auf etwa  $50^\circ\text{C}$  — ergibt, auch eine freie Schwingung von halbtägiger Periode besitzt. (Inzwischen sind aber durch Radiosondenaufstiege in 40 km Höhe über Mitteleuropa einwandfreie Temperaturen zwischen  $-33$  und  $-46^\circ\text{C}$  gemessen worden.) Die Schwingungen der von ihm angenommenen Atmosphäre unter dem Einfluß der Gezeitenkräfte wurden dann berechnet. — An diese Arbeit knüpft Verf. an, indem er sie ergänzt durch eine Studie über den Einfluß der täglichen Erwärmung und Abkühlung auf das Zustandekommen der halbtägigen Druckschwankung bei empirisch gegebener Temperaturschichtung. Das mathematisch-physikalische Hauptstück ist die Gewinnung und Lösung einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung für die Divergenz der Geschwindigkeit als Funktion von  $z$  mit nichtkonstanten Koeffizienten und der zugehörigen Randbedingung, wobei die Koeffizienten im wesentlichen die von der jeweiligen Temperaturschichtung abhängige Höhe der homogenen Atmosphäre bzw. deren Ableitung nach  $z$  bezeichnen. Diese Gleichungen werden dann in § 3 verwandt, um die in einer am Boden periodisch geheizten bzw. abgekühlten Atmosphäre erregten Schwingungen zu untersuchen; die Ergebnisse werden in „äquivalenten Gezeiten-schwingungen“ ausgedrückt. Annahmen über die Art, in welcher abwechselnd der unteren Luftschicht Wärme zugeführt bzw. entzogen wird, werden nicht gemacht. § 4 behandelt die Erwärmung der unteren Luftschicht durch Wärmeleitung, § 5 berührt die Frage einer Schwingungserregung bei periodischer Erwärmung bzw. Abkühlung der Luft in einer Höhe ohne Berührung mit dem Erdboden. — Auch diese Untersuchung erfüllt nicht die Anforderung, die an eine leistungsfähige Theorie gestellt werden muß, nämlich die Ableitung aller Beobachtungstatsachen aus vorangestellten Differentialgleichungen. Für die Forschung bleibt hier also noch ein weites Feld der Betätigung offen. Wegen der überall und immer auftretenden harmonischen Schwingungen der Atmosphäre sollte man die Bedeutung dieser Erscheinungen um ihres scheinbar winzigen Effekts willen nicht unterschätzen.

B. Neis.



Matschinski, Matthias: Sur la structure du vent et sur les phénomènes secondaires (différents „wind marks“ sur le sable et sur la neige, etc.) qu'elle provoque. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 580—582 (1951).

Stümke, H.: Zur Berechnung der Drucktendenz bei Wärmezufuhr innerhalb einer isothermen Atmosphäre von konstanter Grundgeschwindigkeit. Z. angew. Math. Mech. 31, 294—295 (1951).

Stolov, Harold L.: The semi-diurnal tidal oscillation of the earth's atmosphere. Amer. J. Phys. 19, 403—410 (1951).

Luchak, George: The fall of a particle through the atmosphere. Amer. J. Phys. 19, 426 (1951).

Squire, William: Motion of a particle through a resisting medium of variable density. Amer. J. Phys. 19, 426—427 (1951).

Jeffreys, Harold: The surface elevation in cellular convection. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 283—288 (1951).

Krastanow, L.: Über eine Grundfrage bei den Kondensationsvorgängen in der Atmosphäre. C. r. Acad. Bulgare Sci., Sci. math. natur. 3, Nr. 1, 13—16 und russische Zusammenfassg. 16 (1951).

Argence, Émile: Sur les trajectoires d'un signal électromagnétique dans l'ionosphère. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 607—608 (1951).

Becker, Walter: Ein Beitrag zur Frage der Dreifachaufspaltung in der Ionosphäre. Z. angew. Physik 3, 83—88 (1951).

Durch ein äußeres Magnetfeld wird ein homogenes ionisiertes Medium doppelbrechend. Für die Ionosphäre nahm man nun an, daß der ordentliche und der außerordentliche Strahl sich unabhängig voneinander fortpflanzen und daß demgemäß die Reflexionsstellen bei senkrechter Inzidenz aus den Nullstellen des Brechungsindex berechnet werden können. Ist  $\omega_k$  die sog. gyromagnetische Kreisfrequenz,  $\omega$  die benutzte Kreisfrequenz, so gelten zwei von diesen Nullstellen für  $\omega < \omega_k$ , alle drei für  $\omega > \omega_k$ , und zwar unabhängig von der Richtung des erdmagnetischen Feldes, d. h. von der Lage des Beobachtungsortes. Dies ist aber nicht in Übereinstimmung mit den Beobachtungen; Dieminger u. Möller haben Dreifachaufspaltungen in Lindau (einem Ort mittlerer geographischer Breite) bei gestörter Ionosphäre deshalb interpretiert als Überlagerung einer relativ zum Erdfeld quasitransversalen und einer quasilongitudinalen Echolotung. In Erweiterung einer Untersuchung von Försterling auf starke Veränderlichkeit des Polarisationskoeffizienten des Ionosphärenplasmas gibt hier der Verf. (in stark gekürzter Fassung) eine eingehende allgemeine Analyse des Ausbreitungsvorganges, die sich wegen der vielen Formeln und Bezeichnungen in einem Referat leider nicht wiedergeben läßt. Er kann exakt zeigen, daß die Ansicht von Dieminger u. Möller, es handle sich bei der Beobachtung einer Dreifachaufspaltung in mittl. g. Br. um die Übereinanderlagerung zweier Aufnahmen, einer Zenithbeobachtung und einer Beobachtung in Feldrichtung, zutrifft, und daß der Übergang von der quasitransversalen zur quasilongitudinalen Ausbreitung durch die sog. kritische Stoßzahl bestimmt wird. Mathematisch handelt es sich letzten Endes um die Diskussion der beiden simultanen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d^2 M_1}{dz^2} - \frac{dM_1}{dz} \left( \frac{d}{dz} \ln \frac{dP}{dz} \right) + M_1 \left( \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + n_0 \right) &= - \frac{dM_2}{dz} \cdot \frac{dP}{dz} \\ \frac{d^2 M_2}{dz^2} - \frac{dM_2}{dz} \left( \frac{d}{dz} \ln \frac{dP}{dz} \right) + M_2 \left( \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + n_0^2 \right) &= - \frac{dM_1}{dz} \cdot \frac{dP}{dz}\end{aligned}$$

und ihre Herleitung aus den Maxwellschen Gln. Dabei hängen  $M_1$  und  $M_2$  mit den Feldstärkekomponenten  $E$  zusammen durch  $E_x + q E_y = \varphi M_1$ ,  $E_x - q E_y = \varphi M_2$  und es ist gesetzt  $q = e^P$ ,  $\varphi = q / \sqrt{\frac{dq}{dz}}$ .

Rudolf Seeliger.